MIN101 Matematika I - příklady počítané na cvičení (podzimní semestr 2020)

1 1. týden – komplexní čísla a zbytkové třídy (prezenční výuka)

Cvičení konané 7. 10. 2020.

2 2. týden – diferenční rovnice, kombinatorika

Cvičení konané 14. 10. 2020.

Příklad 2.1: (Příklady 1.27 a 1.28 z Drsné matematiky.) Mirek si chce koupit nové auto, které stojí 300 000 č. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%.

(i) Mirek by chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?

(ii) Jak dlouho by Mirek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?

Příklad 2.2: Na schůzi má promluvit pět řečníků A,B,C,D,E (každý právě jednou).

(i) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.

(ii) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A.

(iii) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A.

Příklad 2.3: Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer

(i) 1, 2, 3, 4

(ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6

(iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Kolik z nich je sudých? Kolik z nich je dělitelných čtyřmi?

Příklad 2.4: Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet všech možných rozdělení. Určete počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.

Příklad 2.5: Pro libovolné pevné $k, n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

Příklad 2.6: Pro libovolné pevné $k, n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení nerovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

Příklad 2.7: (Příklady 1.36 z Drsné matematiky.) Do řady v kině o $2n$ místech je náhodně rozmístěno n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

3 3. týden – pravděpodobnost

Cvičení konané 21. 10. 2020.

Příklad 3.1: Ve zprávě školy jsou uvedeny následující údaje. Dokažte, že tato zpráva je chybná.

- Do ročníku chodí 45 dětí, z toho 30 chlapců.
- 30 dětí má dobrý prospěch, z nich je 16 chlapců.
- 28 dětí sportuje, z toho 18 chlapců a 17 dětí s dobrým prospěchem.
- 15 chlapců má dobrý prospěch a zároveň sportuje.

Příklad 3.2: Dvě kostky mají netradičně popsané stěny - jedna má čísla 113366 a druhá 223444. Která z nich bude „častěji“ vítězit? Přesněji řečeno, určete pravděpodobnost vítězství první kostky, pravděpodobnost remízy a pravděpodobnost vítězství druhé kostky. (Pozn.: Když přidáme třetí kostku s čísly 113555, kostky se „navzájem porazí“.)

Příklad 3.3: Hodíme červenou a modrou (standardní) kostkou a uvažujeme následující jevy:

- Jev A: součet na kostkách je dělitelný třemi.
- Jev B: na kostkách jsou stejná čísla.
- Jev C: na červené kostce je vyšší číslo než na modré.

Rozhodněte, zda jsou tyto jevy stochasticky nezávislé.

Příklad 3.4: Karel má ve skříni jsou 2 zelené, 6 modrých a 6 černých ponožek.

- Ráno Karel náhodně vytáhne ze skříně 2 ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že budou mít stejnou barvu?
- Karel přijde ke skříni druhý den a opět vytáhne 2 ponožky (špinavé se do skříně nevrací). S jakou pravděpodbností vytáhne dvě stejnobarevné za předpokladu, že první den vytáhl dvě stejnobarevné?

Příklad 3.5: Následující příklady řešte pomocí geometrické pravděpodobnosti:

(i) V kruhové ohradě s kůlem uprostřed je zavřený kůň (jehož výskyt je náhodný). Jaká je pravděpodobnost, že je kůň blíž ke středovému kůlu než k ohradě?

(ii) Kůň je v obdélníkové ohradě, u jejíž jedné strany stojí pozorovatel. Jaká je pravděpodobnost, že je kůň nejblíž ke straně s pozorovatelem?

Příklad 3.6: Když zbyde čas, budeme násobit matice.

4 4. týden – geometrie v rovině

Cvičení konané 30. 10. 2020.

Příklad 4.1: Určete matici A^n pro $n \in \mathbb{N}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.2: (Příklad 1.51 z Drsné matematiky.) Jsou dány přímky

$$p : [2, 0] + t(3, 2), \ t \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q : [-1, 2] + s(1, 3), \ s \in \mathbb{R}.$$

Naůezněte průsečík těchto přímek a určete obecnou rovnici přímky p.

Příklad 4.3: (Příklad 1.53 z Drsné matematiky.) Najděte obecnou rovnici přímky p, jež prochází bodem $[2, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $x - 3y + 2 = 0$. Dále určete parametrickou rovnici přímky q procházející body $[1, 3]$ a $[-2, 1]$.

Příklad 4.4: Je dán trojúhelník ABC, kde $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$ a $C = [-4, 6]$.

(i) Určete obsah trojúhelníku ABC.

(ii) Určete vnitřní úhly.

(iii) Je bod $R = [0, 4]$ uvnitř trojúhelníka?

(iv) Které strany (resp. vrcholy) jsou viditelné z bodu $P = [-8, 9]$?

Příklad 4.5: Na množině $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je relace ρ definována vztahem $x\rho y \Longleftrightarrow x \cdot y > 0$. Dokažte, že ρ je ekvivalencí na $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a popište rozklad $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\rho$.

5 5. týden – relace, soustavy lineárních rovnic

Cvičení konané 4. 11. 2020.

Příklad 5.1: Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je definována relace ρ. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence a načrtněte, jak vypadá rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\rho$ (zde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chápeme jako množinu všech bodů v rovině). Přitom pro $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je:

(i) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow x - u = 0$.

(ii) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow y - v = 2(x - u)$.

(iii) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow (x - u)(x + u) = (v - y)(v + y)$.

(iv) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = u^2 + v^2 + u + v$.

Příklad 5.2: Rozhodněte, zda jsou následující relace uspořádání, resp. lineární uspořádání na $\mathbb{N}$. Je-li tomu naznačte Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \preceq)$:

(i) $x \preceq y \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $x \preceq y \Longleftrightarrow x \leq y$,

(iii) $x \preceq y \Longleftrightarrow x < y$,

(iv) $x \preceq y \Longleftrightarrow$ počet cifer čísla x je menší nebo roven počtu cifer čísla y,

(v) $x \preceq y \iff y = 4 \vee x = y$,

(vi) $x \preceq y \iff (x = y) \vee (2 \not| x \wedge 2|y) \vee (2|x + y \wedge x < y)$.

Příklad 5.3: Řešte soustavu rovnic

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 3, \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0, \quad x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

Gaussovou eliminací (zpětné eliminace).

Příklad 5.4: Řešte soustavu rovnic

$$7x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \quad -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2, \quad 50x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4.$$

Pak najděte řešení příslušné zhomogenizované soustavy.

6 6. týden – soustavy lineárních rovnic, vektorové prostory

Cvičení konané 11. 11. 2020.

Příklad 6.1: Najděte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.2: Popište množinu řešení následující soustavy rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Příklad 6.3: V $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory

$$v_1 = (1, 1, 1, 2), \quad v_2 = (-1, -1, 1, 2), \quad v_3 = (1, 1, 3, 6), \quad v_4 = (3, 3, 1, 2).$$

(i) Vyberte z nich bázi α podprostoru $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Pak tuto bázi doplňte na nějakou bázi β podprostoru $\mathbb{R}^4$.

(ii) Určete souřadnice vektoru $u = (5, 4, 2, 4)$ v bázi β.

Příklad 6.4: Rozhodněte, zda je následující množina vektorovým podprostorem a případně najděte bázi a určete jeho dimenzi:

(i) $M, M' \subseteq Mat_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad M' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

(ii) $Q, S \subseteq \mathbb{R}_4[x]$,

$$Q = \{f(x) \mid f(1) = 0 \wedge f(2) = 0\}, \quad S = \{g(x) \mid g(x) = g(-x)\}.$$

Příklad 6.5: Mějme podprostory $Q, S \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ z předchozího příkladu. Určete bázi a dimenzi podprostorů $Q + S$ a $Q \cap S$ v $\mathbb{R}_4[x]$.

7 7. týden – skalární součin, lineární zobrazení

Cvičení konané 18. 11. 2020.

Příklad 7.1: Nalezněte ortogonální a ortonormální bázi prostoru $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, kde

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0, 3), \quad v_3 = (1, 2, 1, 0).$$

Příklad 7.2: Napište matice následujícího lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi $\mathbb{R}^3$:

a) φ splňuje $\varphi(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$, $\varphi(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ a $\varphi(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$,

b) φ je kolmá projekce do roviny s nulovou třetí souřadnicí,

c) φ je kolmá projekce do roviny $x + y + z = 1$,

d) φ je kolmá projekce do roviny $x + y + z = 0$,

e) φ je rotace kolem osy $(1, 1, 1)$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$.

Dále určete matici lineárního zobrazení $\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem $f \mapsto (f(1), f(2))$ ve standardních bazích těchto vektorových prostorů.

8 8. týden – determinanty, vlastní vektory

Cvičení konané 25. 11. 2020.

Příklad 8.1: Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8.2: Určete vlastní vektory a čísla matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

9 9. týden – vlastnosti lineárních zobrazení

Cvičení konané 2. 12. 2020.

Příklad 9.1: Určete, jaké lineární zobrazení zadává ortogonální matice

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.2: Určete, jaké lineární zobrazení zadává ortogonální matice

$$C = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Dále mějme rovinu ρ zadanou rovnicí (tj. implicitně) $\rho : x_1 - x_3 = 0$. Určete obraz roviny ρ při zobrazení φ.

10 10. týden – lineární diferenční rovnice

Cvičení konané 9. 12. 2020.

Uvažme diferenční rovnici

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = P(n)\alpha^n$$

kde $P(n)$ je nějaký polynom. Proto takovouto pravou stranu hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_n = Q(n) n^r \alpha^n$$

kde $Q(n)$ je polynom stejného stupně jako $P(n)$ a r je násobnost α jakožto kořene charakteristického polynomu $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. (Jestliže α není kořenem, tak $r = 0$.)

Příklad 10.1: Řešete následující lineární diferenční rovnice:

a) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ s počátečními podmínkami $y_0 = 2$ a $y_1 = 7$. [Řešení: $y_n = 3^{n+1} - 2^n$.]

b) $y_{n+3} = 4y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n$ s počátečními podmínkami $y_0 = 3$, $y_1 = 3$ a $y_2 = 5$. [Řešení: $y_n = 1 - 2n + 2^{n+1}$.]

Příklad 10.2: Najděte obecné řešení lineární diferenční rovnice $y_{n+4} = y_{n+3} + y_{n+1} - y_n = 0$. [Řešení: $y_n = C_1 + C_2 n + C_3 \sin(\frac{2\pi n}{3}) + C_3 \cos(\frac{2\pi n}{3})$, $C_i \in \mathbb{R}$.]

Příklad 10.3: Řešte následující lineární diferenční rovnice:

a) $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = (n+2)2^n$ s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$.

b) $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 4(-3)^n$ s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$. [Řešení: $y_n = 2n(n-1)(-3)^n$.]

Příklad 10.4: Určete řešení lineární diferenciální rovnice $y_{n+4} - 2y_{n+2} + y_n = 3$ s počátečními podmínkami $y_0 = 3$, $y_1 = \frac{11}{8}$, $y_2 = \frac{9}{2}$, $y_3 = \frac{35}{8}$. [Řešení: $y_n = 2 + (-1)^n + \frac{3}{8}n^2$]

Příklad 10.5: Odvoďte vzorce pro součty

a) $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

b) $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

[Řešení: a) $s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (b) $s_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.]

11 11. týden – iterační procesy s nezápornými maticemi

Cvičení konané 16. 12. 2020.

Příklad 11.1: (Leslieho model růstu.) Mějme populaci ovcí rozdělenou do tří skupin:

- jehňata (0-2 roky) - porodnost 1/2, úmrtnost 1/2 (na jedno jehně),
- dospělé ovce (1-2 roky) - porodnost 3/2, úmrtnost 1/2 (na jednu dospělou ovci),
- staré ovce (2-3 roky) - porodnost 1/2 (na jednu starou ovci), všechny staré ovce jdou na jatka.

Popište dlouhodobý vývoj populace.

Příklad 11.2: (Leslieho model růstu.) Mějme populaci ovcí rozdělenou do čtyř skupin:

- jehňata (0-1 rok) - porodnost 0, úmrtnost 1/2 (na jedno jehně),
- mladé ovce (1-2 roky) - porodnost 2, úmrtnost 1/2 (na jednu mladou ovci),
- dospělé ovce (2-3 roky) - porodnost 4, úmrtnost 1/2 (na jednu dospělou ovci),
- staré ovce (3-4 roky) - porodnost 2 (na jednu starou ovci), všechny staré ovce jdou na jatka.

Farmář chce navíc prodávat jehňata na kožešinu. Jakou část jich má prodat, aby měl stabilní chov? A jaké pak bude rozložení populace?

Příklad 11.3: (Markovův proces.) Malé dítě si hraje se 4 kostkami, snaží se z nich postavit věž. Když má rozházené kostky, tak se mu s pravděpodobností 1/2 podaří dát dvě kostky na sebe (věž výšky 2). Když má věž výšky 2 nebo 3, tak se mu podaří s pravděpodobností 1/2 přidat jednu kostku (výška se zvýší o 1) a s pravděpodobností 1/2 stávající věž zboří. Když má věž výšky 4, tak dítě radostně zatleská a věž zboří.

Po dlouhé době se na dítě přijde podívat tatínek. S jakou pravděpodobností najde věž výšky 4 (nebo 3 nebo 2 nebo 1)?

Příklad 11.4: Roztržitý profesor ztrácí s pravděpodobností 1/2 deštník všude, kam přijde, přičemž jeho denní trasa je každý den domov-práce-restaurace-práce-domov. S jakou pravděpodobností se bude deštník na Štědrý večer 2021 nacházet v restauraci?

12 12. týden – Jordanovy kanonické tvary

Cvičení konané 6. 1. 2021.

Příklad 12.1: Určete Jordanův kanonický tvar následujících matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

spolu s příslušnými transformačními maticemi.

13 13. týden – Afinní a Euklidovská geometrie

Cvičení konané 13. 1. 2021.

Budeme pracovat s krychlí

$$\begin{aligned} A &= [0,0,0], \quad B = [1,0,0], \quad C = [1,1,0], \quad D = [0,1,0], \\ E &= [0,0,1], \quad F = [1,0,1], \quad G = [1,1,1], \quad H = [0,1,1]. \end{aligned}$$

Příklad 13.1:

(a) Určete příčku mimoběžek DE a GH procházející bodem B.

(b) Rozmyslete si příčku mimoběžek DE a GH procházející bodem C.

(c) Určete vzdálenost přímek AF a EG.

[Řešení: (a) příčka protíná přímku DE v bodě $[-1,1,1]$ a přímku GH v bodě $[0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, (b) neexistuje, (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

Příklad 13.2: Určete vzdálenost bodu $X = [1,3,0,1]$ od podprostoru

$$\rho : [1,0,0,1] + r(1,1,0,1) + s(1,0,1,-1) + t(2,1,2,0).$$

[Řešení: $\sqrt{6}$.]

Příklad 13.3: Určete vzájemnou polohu rovin

(a) BEG a ACH,

(a) BDE a AFH.

Příklad 13.4: Určete odchylku

(a) přímek AG a BD,

(b) přímek AF a AH,

(c) přímky CG a roviny BDE,

(d) rovin AFG a BDE.

[Řešení: (a) $\frac{\pi}{2}$, (b) $\frac{\pi}{3}$, (c) $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$, (d) $\frac{\pi}{2}$.]

Příklad 13.5: Určete objem čtyřstěnu (a) $ABCE$ a (b) $ACFH$. [Řešení: (a) $\frac{1}{6}$, (b) ...]