Př: Diferenční rovnice

$$x_{n+2} = 2x_n + n, \quad x_1 = x_2 = 2$$

$$x_{n+2} - 2x_n = n$$

$\rightsquigarrow \lambda^2 - 2 = 0$

pro zhomogenizovanou rovnici $x_{n+2} - 2x_n = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ řešení jsou tvaru

$$x_n = A\cdot(\sqrt{2})^n + B(-\sqrt{2})^n$$

$A, B \in \mathbb{R}$

Najdeme nějaké (partikulární) řešení rovnice

$$x_{n+2} - 2x_n = n = P(n)\cdot a^n$$

$\hookrightarrow a = 1, \; P(n) = n$

$$x_n = \underbrace{Q(n)}_{\text{pol. stejného stupně jako } P(n)} \cdot a^n$$

$$x_n = an + b \,, \quad \underbrace{a, b}_{\text{určíme}} \in \mathbb{R}$$

$$\left(a(n+2) + b\right) - 2\left(an + b\right) = n$$

$$-an + (\underbrace{2a + b - 2b}) = n$$

$$\Rightarrow a = -1 \,, \qquad 2a - b = 0$$

$$b = -2 \qquad -2 - b = 0$$

$$\boxed{x_n = -n - 2}$$

Obecné řešení rovnice

$x_{n+2} - 2x_n = n$ je tvaru

$$\boxed{x_n = A(\sqrt{2})^n + B(-\sqrt{2})^n - n - 2}$$

$A, B \in \mathbb{R}$

Počáteční podm.:

$$x_1 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B - 3 = 2 \;/\cdot\sqrt{2}$$

$$x_2 = 2A + 2B - 4 = 2$$

$$4A - 3\sqrt{2} - 4 = 2\sqrt{2} + 2$$

$$4A = 5\sqrt{2} + 6$$

$$A = \frac{5\sqrt{2} + 6}{4}$$

$$B = \dots$$

Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

↳ vlastní číslo ~~jsou~~ je $\lambda = -1$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^3 = -(\lambda+1)^3 = 0$$

$\lambda = -1$ trojnásobný kořen

Vlastní vektory:

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ p & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{v_1 = (1, 0, 0)}$$

jediný vlastní vektor (až na násobek)

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Jordanova buňka

$$0 \xleftarrow{A+E} v_1 \xleftarrow{A+E} v_2 \xleftarrow{A+E} v_3$$

$$(A+E)\, v_2 = v_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = p$ $\quad x_2 = -1$ $\quad x_3 = 0$

$v_2 = (p, -1, 0)$

Dále řešíme

$(A+E)v_3 = v_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & p \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -p$

lze $p = 0 \longrightarrow v_3 = (0, 0, \frac{1}{2})$

Závěr: $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$A = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon,\alpha}} J \underbrace{T^{-1}}_{(id)_{\alpha,\varepsilon}}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Umocňování: $A = TJT^{-1}$

$$A^n = \underbrace{(TJT^{-1}) \cdot (TJT^{-1}) \cdot \ldots \cdot (TJT^{-1})}_{n}$$

$$= T J^n T^{-1}$$

Jordanův tvar matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda = 1$$

trojnásobné

Vlastní vektory

$$(B - E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = (1, 0, 0)$

$v_2 = (0, 1, -1)$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \xleftarrow{B-E} a v_1 + b v_2 \xleftarrow{B-E} v_3$$

$$(B-E)v_3 = av_1 + bv_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right) \Rightarrow b = 0$$

želimo

treba $a = 1$

$$\|$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad v_3 = (0,0,1)$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = x_1 = 0$$

$$0 \xleftarrow{B-E} v_1 \xleftarrow{B-E} v_3$$

$$v_1 = (1,0,0), \qquad v_3 = (0,0,1)$$

$$\alpha = (v_2, v_1, v_3)$$

$$B = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon,\alpha}} J \, T^{-1}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$