10.3 (b) $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 4(-3)^n$

Zhom. rovnice: $y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0, \quad \lambda_1 = -3$

$$\boxed{y_n = C_1(-3)^n + C_2\, n(-3)^n}$$

násobnost 2

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$y_n = a n^2 (-3)^n, \quad a \in \mathbb{R}$

dosadíme do

$$y_n + 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 4(-3)^n$$

$$\Rightarrow a n^2 (-3)^n + 6a(n-1)^2(-3)^{n-1} + 9a(n-2)^2(-3)^{n-2} = 4(-3)^n \;/\; (-3)^{n-2}$$

$$9an^2 - 18a(n^2 - 2n + 1) + 9a(n^2 - 4n + 4) = 36$$

$\longrightarrow (-18+36)a = 36$

$18a = 36 \Rightarrow a = 2$

Závěr: $\boxed{y_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n + 2n^2(-3)^n}$

Počáteční podmínky $y_0 = y_1 = 0$:

$y_0 = C_1 = 0$

$y_1 = -3C_1 - 3C_2 - 6 = 0$

$\Rightarrow C_1 = 0, \; C_2 = -2$

$y_n = -2n(-3)^n + 2n^2(-3)^n$

$= \underline{\underline{2n(n-1)(-3)^n}}$

<u>10.4</u>: $y_{n+4} - 2y_{n+2} + y_n = 3$

Char. pol. $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$\lambda_2 = -1 \leftarrow (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 0$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 1$

Řešení zhom. rovnice je

$$\boxed{y_n = C_1 + C_2 \cdot n + C_3(-1)^n + C_4 n(-1)^n}$$

<u>Partikulární řešení</u>

pravá strana je $3 = 3 \cdot 1^n$

kořen násobnosti 2

$y_n = a n^2$.

$\Downarrow$

$$a(n+4)^2 - 2a(n+2)^2 + an^2 = 3$$

$$a(n^2 + 8n + 16) - 2a(n^2 + 4n + 4) + an^2 = 3$$

$(16-8)a = 3 \quad \boxed{a = \frac{3}{8}}$

Závěr:

$$y_n = C_1 + C_2 n + C_3(-1)^n + C_4 n(-1)^n + \frac{3}{8} n^2$$

Počáteční podmínky - - - . .

10.5 (a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = n^2, \quad S_0 = 0}$$

Char. pol.: $\lambda - 1 = 0, \quad \lambda = 1$

Part. řešení: pravá str. $= n^2 (1)^n$

$$S_n = (an^2 + bn + c)\, n$$

$$(an^2 + bn + c)n - (a(n-1)^2 + b(n-1) + c)(n-1) = n^2$$

$$an^3 + bn^2 + cn - a(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - b(n^2 - 2n + 1) - c(n-1) = n^2$$

$$3an^2 + (c - 3a + 2b - c)n + (a - b + c) = n^2$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3}}$$

$$-3a + 2b = 0$$

$$-1 + 2b = 0$$

$$\boxed{b = \frac{1}{2}}$$

$$a - b + c = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$$

$$\boxed{c = \frac{1}{6}}$$

<u>Obecné řešení:</u>

$$S_n = C_1 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$

111:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Leslieho matice } A} \begin{pmatrix} j_n \\ d_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ d_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix}$$

<u>VB</u>: matice M je <u>primitivní</u>, jestliže M^k pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je pozitivní matice

$$\rightsquigarrow A^2 = \begin{pmatrix} >0 & >0 & >0 \\ >0 & >0 & >0 \\ >0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A^4 je pozitivní $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ je primitivní

$\Rightarrow$ dlouhodobý vývoj nezávisí na počátečním rozložení populace

Další důsledek primitivnosti: existuje dominantní λ_{dom} vlastní číslo, jehož vlastní vektor určuje dlouhodobé rozložení populace.

$$\lambda_{dom} \begin{cases} > 1 & \text{vzestup populace} \\ = 1 & \text{stabilní} - \text{"} - \\ < 1 & \text{klesající} \text{ "} \end{cases}$$

$\lambda_{dom} \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda (-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 3/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \lambda\left(\lambda\left(\lambda - 1/2\right) - \frac{3}{4}\right)$$

$$= -\left[\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8}\right] = 0 \;/ -8$$

$$8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

⇝ racionální kořeny (možné) jsou $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$

	8	−4	−6	−1
$-\frac{1}{2}$	8	−8	−2	0

$$= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(8\lambda^2 - 8\lambda - 2\right) =$$

$$= (2\lambda + 1)\left(4\lambda^2 - 4\lambda - 1\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Vlastní čísla $-\frac{1}{2}, \; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\rightsquigarrow \lambda_{dom} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} > 1$

$\Rightarrow$ populace dlouhodobě roste

Vlastní vektor

$$A - \lambda_{dom} E \underset{\sqrt{2}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot(1-\sqrt{2})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\frac{1}{2} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= p \\ x_2 &= (1+\sqrt{2})p \\ x_1 &= (3+2\sqrt{2})p \end{aligned}}$$

$x_1 - (1+\sqrt{2})^2 p = 0$

$x_1 - (1+2\sqrt{2}+2)p = 0$

vlastný vektor

$v = (3+2\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ 1)$

j : d : s

11.2 Matica Leslieho modelu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$B^2 = \dots \qquad B^4 = \dots$ B primitívna

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

má mať vlastné číslo 1

$$C-E=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 2\\ a & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\mid\cdot a\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

singulär

$a\in\mathbb{R}$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 2\\ 0 & 2a-1 & 4a & 2a\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\quad \mid-(2a-1)$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 8a-2 & 2a\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\quad \mid-(8a-2)$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 18a-4\end{pmatrix}$$

$18a-4=0$

$a=\frac{2}{9}$

$1/2 > \frac{2}{9} \Rightarrow$ přírodní populace roste

Farmář by měl prodat $\frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18}$ jehňat na [illegible].

Rozložení (stabilní) popul. po prodeji jehňat je určena vlastním vektorem pro $\lambda = 1$

$v = (18, 4, 2, 1)$