$$x_{n+1} = a\,x_n + b, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$x_n = a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a} \cdot b$$

2.1 • Cena auta $C = 300\,000$
• měsíční úročení
roční úrok 6 %

(i) Doba splácení 3 roky.
Jaké budou měsíční splátky.

x_n – dluh po n měsících

$x_0 = C$

měsíční úrok $u = \frac{0{,}06}{12} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$

S := měsíční splátka

$$x_{n+1} = x_n - S + u \cdot x_n$$

$$= \underbrace{(1+u)}_{q = 1{,}005} x_n - S$$

$b = -S$

$$x_n = q^n \cdot C - \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot S$$

$$x_{36} = q^{36} C - \frac{q^{36} - 1}{q - 1} \cdot S = 0$$

$\Downarrow$

jediná neznámá

Numerika: $S \doteq 8857$

(ii) Měsíční splátka je $S = 500$. Jaká bude doba splácení?

$$\boxed{x_n = q^n \cdot C - \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot S}$$

S zadané, chceme $x_n = 0$

$\Downarrow$

určit n

$$x_n = q^n \left(C - \frac{S}{q-1} \right) + \frac{S}{q-1}, \quad u = q - 1 = 0{,}005$$

$$x_n = q^n \left(C - \frac{S}{u} \right) + \frac{S}{u} = 0$$

$$q^n\left(c - \frac{S}{n}\right) = -\frac{S}{n} \quad / \cdot n$$

$$q^n(\underbrace{cn - S}_{<0}) = -S \quad \leftarrow$$

$$cn < S$$

$$q^n(\underbrace{S - cn}_{>0}) = S \qquad \ln(a^b) = b\ln a$$

$$q^n = \frac{S}{S - cn} \quad / \ln$$

přirozený logaritmus o základu e

$$n \ln q = \ln\left(\frac{S}{S - cn}\right) = \ln S - \ln(S - cn)$$

$$n = \frac{\ln S - \ln(S - cn)}{\ln q}$$

Výsledek: $n \doteq 6$ roků

(poslední splátka menší)

2.2 Pět řečníků A, B, C, D, E

(i) Počet všech možných pořadí: $5!$

(ii) — " —, má-li řečník B vystoupit bezprostředně po A. "AB" $4!$

(iii) B promluví po A (ne nutně bezprostředně).

- čtyři případy kde může A

$A\_\ \_\ \_\ \_$ $4!$

$\_\ A\_\ \_\ \_$ $3\cdot 3!$

$\_\ \_\ A\_\ \_$ $3\cdot 2\cdot 2$

$\_\ \_\ \_\ AB$ $3!$

sečíst

- Jiné řešení $\dfrac{5!}{2}$

- Ještě jinak $\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

Nejprve vyberu dvojici

pořadí pro A a B: $\binom{5}{2}$

$\Rightarrow$ celkem $\binom{5}{2} \cdot 3! =$

$$= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3! = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} =$$

$$= \frac{5!}{2}$$

2.3 Kolik čtyřciferných čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z čísel

(i) 1, 2, 3, 4

(ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6

(iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5

Kolik z nich je sudých?

Kolik z nich je dělitelných 4?

(i) ~~4~~ $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ _ _ _ _

sudých: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ _ _ _ _

↳ sudé 2, 4

dělitelných čtyřmi:

$3 \cdot 2 \cdot 1$

12, 32, 42

14, 24, 34

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{3}$

(ii) samo studium

(iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5

Celkem: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

_ _ _ _ → 5 možností

Sudých:

_ _ _ 0 ⇝ $5 \cdot 4 \cdot 3$

_ _ _ _ ⇝ 2 nebo 4

4 ab 2

$4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$

Dělitelných čtyřmi: doma

2.4 Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 stejných tenisových míčků.

(i) Určete počet všech možných rozdělení.

(ii) — " — takových, že každé dítě dostane alespoň jeden míček.

kombinace s opakováním

(i) $\underbrace{\circ\circ\circ}_{1.\,\text{dítě}} \,|\, \underbrace{\circ\circ\circ}_{2.\,\text{dítě}} \,|\, \underbrace{\circ\circ\circ\circ}_{3.\,\text{dítě}} \,|\underbrace{}_{4.\,\text{dítě}}|\, \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{5.\,\text{dítě}} \,|\underbrace{}_{6.\,\text{dítě}}$

15 míčků

$6-1=5$ oddělovačů

Chceme počet posloupností míčků a oddělovačů

$$\underbrace{P(15,5)}_{\text{permutace s opakováním}} = \frac{(15+5)!}{15!\,5!} = \binom{20}{5}$$

(ii) každé dítě alespoň jeden míček

- každému dítěti jeden míček
- 9 míčků rozdělit mezi 6 dětí

$$P(15-6,5) = P(9,5) = \frac{(9+5)!}{9!\,5!} = \binom{14}{5}$$

2.5 $k, n \in \mathbb{N}$

Určete počet řešení rovnice $x_1 + \dots + x_k = n$

kde (i) $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$

(ii) $x_i \in \mathbb{N}$

(i) $\underbrace{1 \quad 1}_{x_1 = 2} \,|\, | \, \underbrace{1}_{x_3 = 1} \,| 1 \dots 1$

$x_2 = 0$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}$

- n jedniček
- $k-1$ oddělovačů

$$P(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n}{k-1}$$

(ii) $x_i \in \mathbb{N}$

$x_1 + \dots + x_k = n \quad / -k \qquad x_i \in \mathbb{N}$

$\underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \dots + \underbrace{(x_k - 1)}_{y_k} = n - k \qquad y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$P(n-k, k-1) = \frac{(n-k)+k-1}{(n-k)!\,(k-1)!} =$$

$$= \frac{n-1}{(n-k)!\,(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

<u>Vložený příklad</u> $k, n \in \mathbb{N}$

$$x_1 + \ldots + x_k \leq n$$

Určete počet všech řešení nerovnice, kde

(i) $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$

(ii) $x_i \in \mathbb{N}$

(i) Řešení nerovnice odpovídají řešením rovnice

$$x_1 + \ldots + x_k + y = n$$

$x_i, y \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$, $y \geq 0$

$$P(n,k) = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \binom{n+k}{k}$$

(ii) $x_1 + \ldots + x_k \leq n \quad / -k$

$x_i \in \mathbb{N}$ $(x_1 - 1) + \ldots + (x_k - 1) \leq n - k$

$$y_1 + \ldots + y_k \leq n - k$$

$y_i \in \mathbb{Z},\ y_i \geq 0$

$$P(n-k, k) = \frac{(n-k)+n}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

2.6 Rada v kine má dĺžku 2n, náhodne do nej rozmiestnime n mužov a n žien.
Aká je pst, že žiadne dve osoby stejného pohlavia nesedia vedľa seba?

- Počet všetkých možných rozsadení: $(2n)!$
- Počet možností splňujúcich podmienku:

$$\underline{M}\ \underline{Ž}\ \underline{M}\ \underline{Ž}\ \underline{M}\ \underline{Ž}\ \underline{M}\ \underline{Ž}$$

$$Ž\ M\ Ž\ M\ Ž\ M\ Ž\ M$$

$(n!)^2$ $(n!)^2$

Výsledok: $\dfrac{2(n!)^2}{(2n)!}$