2. domácí úkol – MIN101 – podzim 2020 – odevzdat do **11.11.2020**

Nechť A je množina všech přímek v rovině $\mathbb{R}^2$, které nejsou rovnoběžné s žádnou ze souřadných os. Na množině A uvažujme následující relaci ρ pro přímky p a q zadané rovnicemi $p : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ a $q : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 = 0$:

$$(p, q) \in \rho \iff |a_3^2 b_1 b_2| = |b_3^2 a_1 a_2|.$$

Ukažte, že se jedná o relaci ekvivalence a geometricky popište rozklad množiny A na třídy ekvivalence.

Nápověda: zkuste se podívat na průsečík dané přímky s některou ze souřadných os.

Řešení: Jelikož parametry a_1, a_2, b_1, b_2 jsou podle předpokladu nenulové, předchozí display lze přepsat jako

$$\frac{a_3^2}{|a_1 a_2|} = \frac{b_3^2}{|b_1 b_2|}$$

a tedy se zjevně jedná o relaci ekvivalence. Třídy rozkladu jsou parametrizované konstantami $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a příslušná třída rozkladu je tvořena všemi přímkami $r : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 = 0$ takovými, že

$$\frac{c_3^2}{|c_1 c_2|} = \alpha.$$

Přímka r protíná souřadné osy v bodech $[-\frac{c_3}{c_1}, 0]$ a $[0, -\frac{c_3}{c_2}]$, tedy trojúhelník tvořený těmito body a počátkem má obsah $\frac{\alpha}{2}$. Závěr: do stejné třídy rozkladu patří ty přímky, které se souřadnými osami vytínají trojúhelník stejného obsahu.