

3. domácí úkol – MIN101 – podzim 2020 – odevzdat do **27.11.2020**

Uvažme následující vektory v \mathbb{R}^3 ,

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (-1, -1, a), \quad v_3 = (a, a + 1, -1) \quad \text{a} \quad w = (1, 2, a + 2)$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Dále uvažme podprostory $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ a $W = \langle w \rangle$.

- Určete dimenzi podprostoru V v závislosti na parametru a .
- Určete dimenzi podprostoru $V + W$ v závislosti na parametru a .
- Napište w jako lineární kombinaci vektorů v_1 , v_2 a v_3 (nebo ukažte, že to není možné) v závislosti na parametru a .

Řešení: Napíšeme-li tyto čtyři vektory do sloupců matice, tak Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 1 \\ 2 & -1 & a+1 & 2 \\ 1 & a & -1 & a+2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-2) & a+1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je odpověď na část b) a hodnost podmatice tvořené prvními třemi sloupci je odpověď na část a). Budeme-li první matici chápat jako matici soustavy tří rovnic o třech neznámých s pravou stranou danou posledním sloupcem, dostaneme odpověď na část c). Tedy

- $\dim V = 2$ pro $a \in \{-1, 2\}$ a $\dim V = 3$ pro ostatní hodnoty a ,
- $\dim(V + W) = 2$ pro $a = -1$ a $\dim(V + W) = 3$ pro ostatní hodnoty a ,
- pro $a = 2$ toto není možné, pro $a \notin \{-1, 2\}$ je tato lineární kombinace dána jednoznačně $\frac{a-3}{a-2}v_1 + \frac{a-1}{a-2}v_2 + \frac{1}{a-2}v_3 = w$ a pro $a = -1$ jsou tyto lineární kombinace tvaru $(3p+1)v_1 + 2pv_2 + pv_3 = w$ pro libovolné $p \in \mathbb{R}$.