4. domácí úkol – MIN101 – podzim 2020 – odevzdat do **10.12.2020**

Uvažme vektorový prostor $Mat_2(\mathbb{R})$ reálných čtvercových matic 2x2 a v něm prvky

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na tomto vektorovém prostoru uvažujme skalární součin $\langle\, , \rangle$ definovaný tím, že báze $\alpha = (M_1, M_2M_3, M_4)$ je ortonormální. Dále uvažujme vektorový podprostor

$$V = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0\} \subseteq Mat_2(\mathbb{R}).$$

Najděte nějakou ortonormální bázi (vzhledem k výše definovanému skalánímu součinu $\langle\, , \rangle$) podprostoru V.

Řešení: Dle zadání platí $\langle M_i, M_j\rangle = 1$ pro $i = j$; pro $i \neq j$ je tento skalární součin nulový.

Začneme s libovolnou bazí V, např. $\gamma_1 = (A_1, A_2, A_3)$, kde

$$A_1 = M_2 - M_1, \quad A_2 = M_3 - M_1, \quad A_3 = M_4 - 2M_1.$$

Dále najdeme ortogonální bázi $\gamma_2 = (B_1, B_2, B_3)$ prostoru V pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Položíme $B_1 := A_1 = M_2 - M_1$ a $B_2 = A_2 + rB_1 = M_3 - M_1 + r(M_2 - M_1)$. Kolmost na na B_1 znamená

$$\langle M_3 - M_1 + r(M_2 - M_1), M_2 - M_1\rangle = 1 + 2r = 0,$$

tj. $r = -1/2$. Tedy $B_2 = M_3 - \frac{1}{2}M_2 - \frac{1}{2}M_1$. Podobně $B_3 = A_3 + rB_1 + sB_2 = M_4 - 2M_1 + r(M_2 - M_1) + s(M_3 - \frac{1}{2}M_2 - \frac{1}{2}M_1)$ a kolmost B_3 na na B_1 a B_2 znamená

$$\langle M_4 - 2M_1 + r(M_2 - M_1) + s(M_3 - \tfrac{1}{2}M_2 - \tfrac{1}{2}M_1), M_2 - M_1\rangle = 0,$$
$$\langle M_4 - 2M_1 + r(M_2 - M_1) + s(M_3 - \tfrac{1}{2}M_2 - \tfrac{1}{2}M_1), M_3 - \tfrac{1}{2}M_2 - \tfrac{1}{2}M_1\rangle = 0,$$

tedy $2 + 2r = 0$ a $1 + \frac{3}{2}s = 0$, tj. $r = -1$ a $s = -\frac{2}{3}$. Prvky ortogonální báze γ_2 tedy jsou

$$B_1 = M_2 - M_1, \quad ||B_1|| = \sqrt{2},$$
$$B_2 = M_3 - \tfrac{1}{2}M_2 - \tfrac{1}{2}M_1, \quad ||B_2|| = \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$
$$B_3 = M_4 - \tfrac{2}{3}M_3 - \tfrac{2}{3}M_2 - \tfrac{2}{3}M_1, \quad ||B_3|| = \sqrt{\tfrac{7}{3}}.$$

Odtud dostaneme ortogonální bázi $\beta = (C_1, C_2, C_3)$, kde

$$C_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}B_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(M_2 - M_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}B_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(M_3 - \tfrac{1}{2}M_2 - \tfrac{1}{2}M_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_3 = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}B_3 = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}(M_4 - \tfrac{2}{3}M_3 - \tfrac{2}{3}M_2 - \tfrac{2}{3}M_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}.$$