5. domácí úkol – MIN101 – podzim 2020 – odevzdat do **10.1.2021**

U každého z lineárních zobrazení φ_i, $i = 1, \dots, 4$ rozhodněte, zda se jedná o ortogonální zobrazení a určete jeho vlastní čísla a vektory (nad $\mathbb{R}$). V případě ortogonálních zobrazení navíc toto zobrazení geometricky popište použitím pojmů symetrie, rotace apod. V případě neortogonálních zobrazení rozhodněte, zda se jedná o kolmou projekci na nějaký podprostor.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určeno násobením maticí

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je určeno násobením maticí

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určeno vztahy

$$\varphi_3(\epsilon_1) = \epsilon_2, \quad \varphi_3(\epsilon_2) = \epsilon_3, \quad \varphi_3(\epsilon_3) = \epsilon_1.$$

(d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určeno vztahy

$$\varphi_4(\epsilon_1) = \epsilon_2, \quad \varphi_4(\epsilon_2) = \epsilon_3, \quad \varphi_4(\epsilon_3) = \epsilon_2.$$

Zde ϵ_i jsou vektory standarní báze, tj. $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$ a $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$.

Řešení:

(a) φ_1 je ortogonální; má vlastní číslo -1 s vlastním vektorem $(1, 1, 0)$ a dále vlastní čísla $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Je to tedy rotace kolem osy $(1, 1, 0)$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ složená se symetrií podle roviny kolmé na $(1, 1, 0)$ procházející počátkem.

(b) φ_2 není ortogonální; má vlastní číslo 0 s vlastním podprostorem $\sigma_1 = \langle (0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$ a vlastní číslo 1 s vlastním podprostorem $\sigma_2 = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$. Jelikož $\sigma_1 \perp \sigma_2$, jedná se o kolmou projekci na podprostor σ_2.

(c) Ze zadání je vidět, že φ_3 je rotace kolem osy $(1, 1, 1)$ o $\frac{\pi}{3}$, tj. je to ortogonální zobrazení. Totéž lze spočíst z matice tohoto zobrazení, která je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Ze zadání vidíme dva vlastní vetory: $\varphi_3(\epsilon_2+\epsilon_3)=\epsilon_2+\epsilon_3$ (vlastní číslo 1) a $\varphi_3(\epsilon_1-\epsilon_3)=0$ (vlastní číslo 0). Tedy se nejedná o ortogonální zobrazení a ani to není kolmá projekce (vlastní vektory na sebe nejsou kolmé). Vše lze též spočíst z matice tohoto zobrazení, která je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$