$G=(V,E)$, $E \subseteq 2^{\binom{V}{2}}$

$K_n = (V, 2^{\binom{V}{2}})$ – úplný graf

↳ n-prvková množina

$G=(V,E)$ bipartitní graf

$V = V_1 \cup V_2$ disjunktní

$e \in E$, $e \not\subseteq V_1$

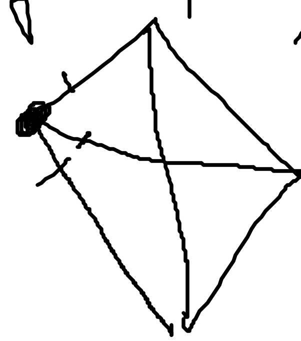
$e \not\subseteq V_2$

$K_{m,n}$ úplný bipartitní graf

$m = |V_1|$, $n = |V_2|$

<u>10.1</u>: K_n – úplný graf

$n=4$

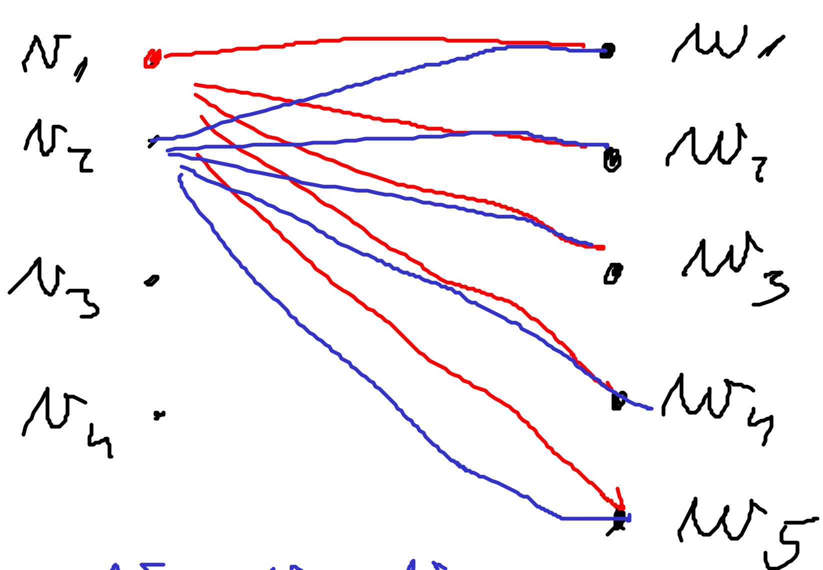


- n vrcholů
- $\binom{n}{2}$ – hran
- $\underbrace{\deg v}_{\text{stupeň vrcholu } v} = n-1$
- skóre $(\underbrace{n-1, \dots, n-1}_{n})$

- matice sousednosti pro K_6 je tvaru 6×6

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
v_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

<u>úplný bipartitní graf $K_{4,5}$</u>:



- 9 uzlů
- $4 \cdot 5 = 20$ hran
- $\deg v_i = 5$

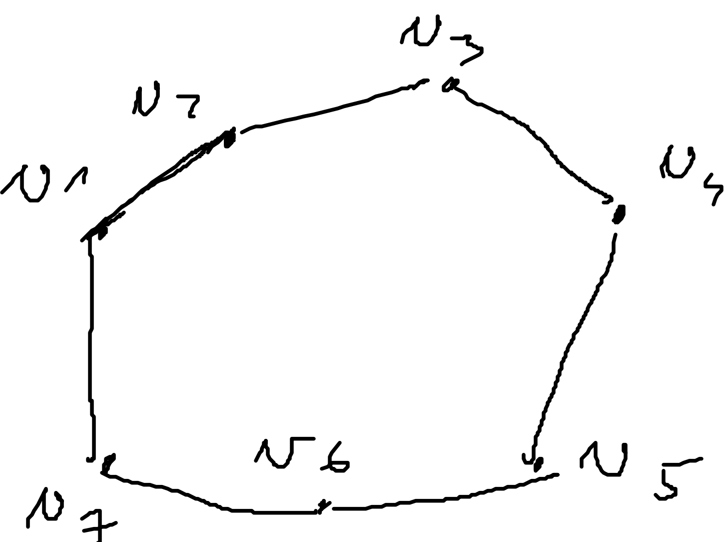
  $\deg w_i = 4$
- skóre

  $(4,4,4,4,4,5,5,5,5)$

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\
\hline
v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

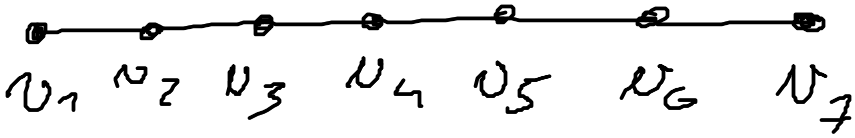
$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
v_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
v_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \ddots & & \\
v_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Cyklus C_7:



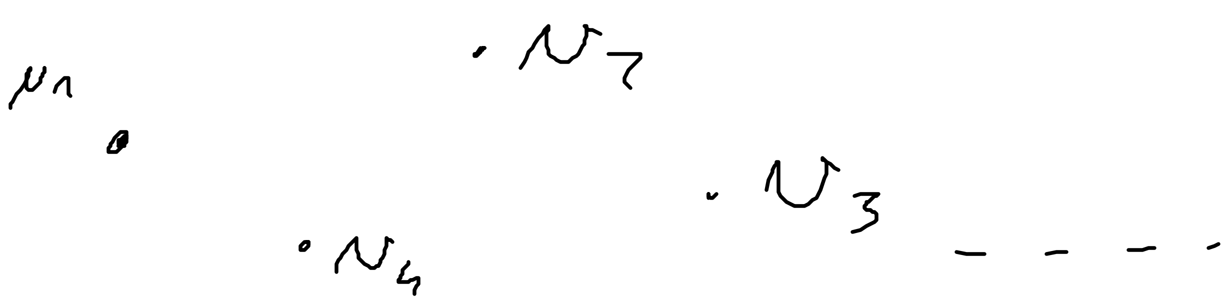
- 7 vrcholů
- 7 hran
- $\deg v_i = 2$
- skóre $(2,2,2,2,2,2,2)$

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Cesta P_6: 

- 7 vrcholů
- 6 hran
- $\deg v_1 = \deg v_7 = 1$
  $\deg v_2 = \dots = \deg v_6 = 2$
- skóre $(1,1,2,2,2,2,2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.2
(a) 

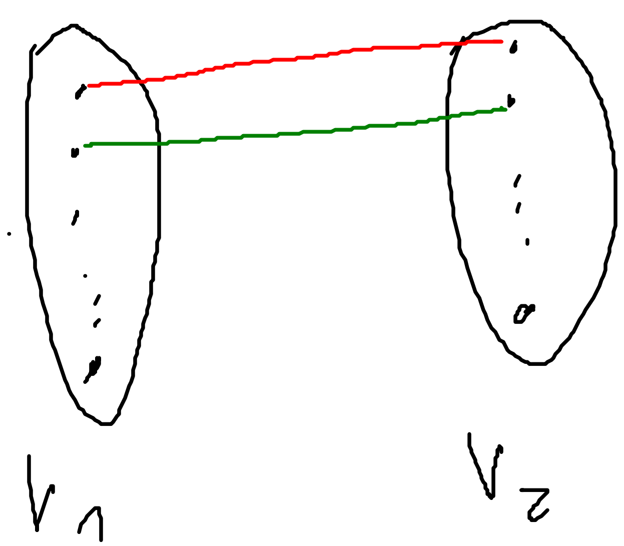
Kolik ex grafů na vrcholech $v_1, \dots, v_n$?

$2^{\binom{n}{2}}$

Počet podmnožin na ← $\underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{počet hran úplného grafu}}$ - prvkové množiny

(b)

$V = V_1 \cup V_2$ disjunktní sjednocení

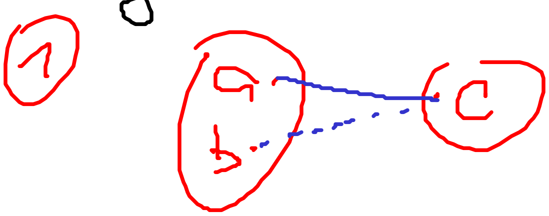


Výsledek: $2^{\boxed{m \cdot n}}$

$m \cdot n$ je počet hran úplného bipartitního grafu

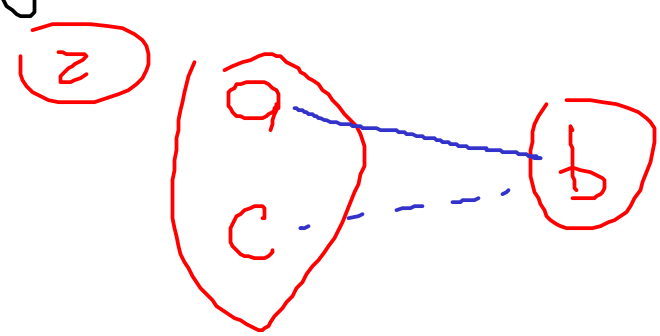
10.3 (a) $V = \{a, b, c\}$

Kolik ex. různých bipartitních grafů?

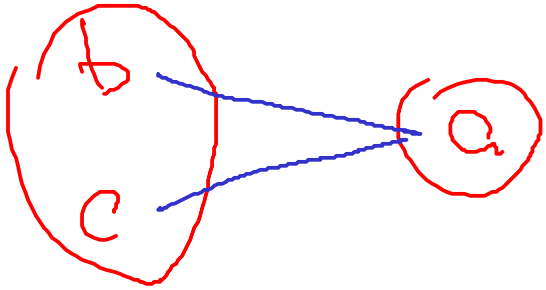


$2 \cdot 1 = 2$ hrany

$2^2 = 4$ grafy



2 grafy

③ 

1 graf

Celkem: $4+2+1 = 7$ grafů

(b) který bipartitní graf na n-prvkové množině má nejvíce hran?

$G = (V, E)$ $n = |V|$

$V = V_1 \cup V$ disjunktní

$p = |V_1|$

$n-p = |V_2|$

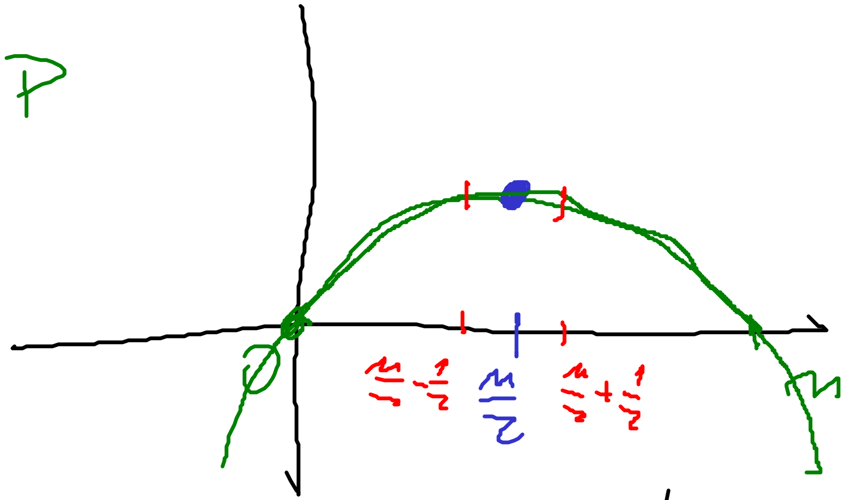
$\Rightarrow$ počet hran bude $p(n-p)$

Tedy hledáme maximum funkce $f(p) = p(n-p)$

$p \in \{0, 1, \dots, n\}$

$f(p) = -p^2 + np$

$f(0) = f(n) = 0$



• <u>n sudé</u> ⟶ maximum nastane pro $p = \frac{n}{2}$, $n - p = \frac{n}{2}$

⟶ počet hran $\left(\frac{n}{2}\right)^2$

• <u>n liché</u> ⟶ max nastane pro $p = \frac{n+1}{2}$ nebo $p = \frac{n-1}{2}$

⟶ počet hran $\frac{(n+1)(n-1)}{4}$

<u>10.4</u> Určete počet podgrafů úplného grafu K_5.

• K_5 má 5 uzlů

Podgrafy rozdělíme podle počtu uzlů:

- 0 vrcholů: $\underline{1 \text{ podgraf}}$
- 1 vrchol: $\underline{5 \text{ podgr.}}$
- 2 vrcholy: $\binom{5}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2 = \underline{20}$
- 3 vrcholy: $\underbrace{\binom{5}{3}} \cdot 8 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = \underline{80}$

$$2^3 = 2^{\binom{3}{2}}$$

- 4 vrcholy: $\binom{5}{4} \cdot 2^{\binom{4}{2}} = 5 \cdot 2^6 = 5 \cdot 64 = \underline{320}$
- 5 vrcholů: $\underbrace{\binom{5}{5}}_{=1} \cdot 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = \underline{1024}$

$\underline{\text{Celkem}}$: $1024 + \underbrace{320 + 80}_{400} + 20 + 5 + 1$

$= 1050 + 400 = 1450$

Sled, tah, cesta

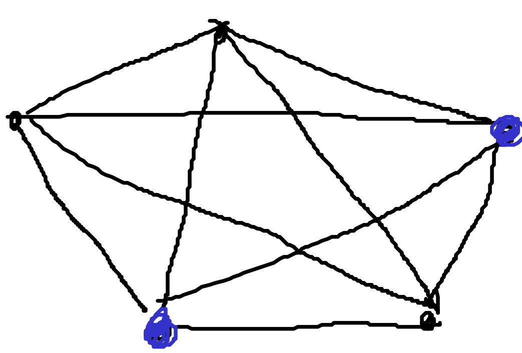
libovolný „příklad" grafu (můžou se opakovat vrcholy i hrany)

lze opakovat pouze vrcholy, ale hrany se nemohou opakovat

nelze opakovat ani hrany ani vrcholy

10.5 Určete, kolik existuje cest mezi pevně zvolenými vrcholy v grafu K_7.

Cesty rozdělíme podle jejich délky:



K_7

+ dvě další vrcholy

Cestyčelily 1: 1

Cestyčelily 2: 5

Cestyčelily 3: $\binom{5}{2} \cdot 2 = 5 \cdot 4 = 20$

Cestyčelily 4: $\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Cestyčelily 5: $\binom{5}{4} \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Cestyčelily 6 $\underbrace{\binom{5}{5}}_{1} \cdot 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

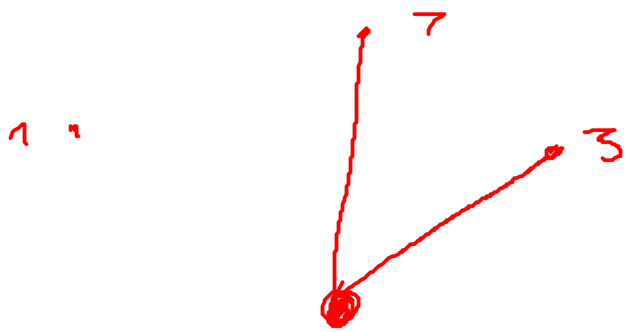
Celkem: $120 + 120 + 60 + 20 + 5 + 1 =$
$= 440 + 86 = \underline{326}$

10.6 Určete počet různých kružnic (cyklů) v úplném grafu K_5.

Možné délky cyklů jsou 3, 4, 5.

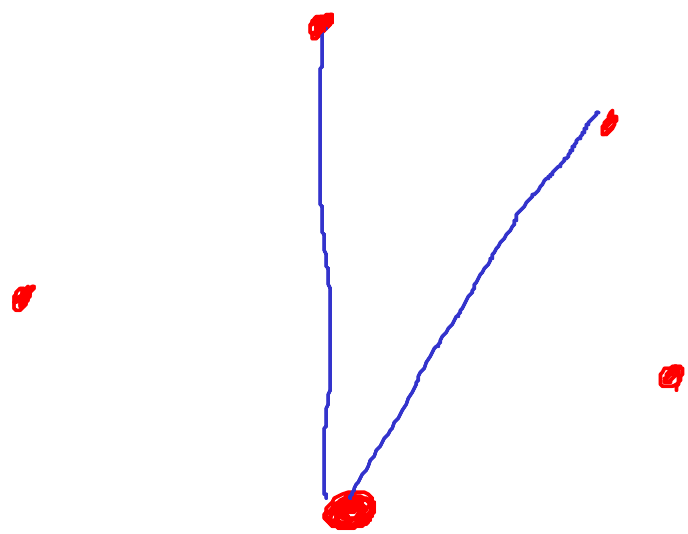
Cykly délky 3: $\binom{5}{3} = 10$

Cykly délky 4: $\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{výběr 4 vrcholů}} \cdot \binom{3}{2} = 5 \cdot 3 = 15$



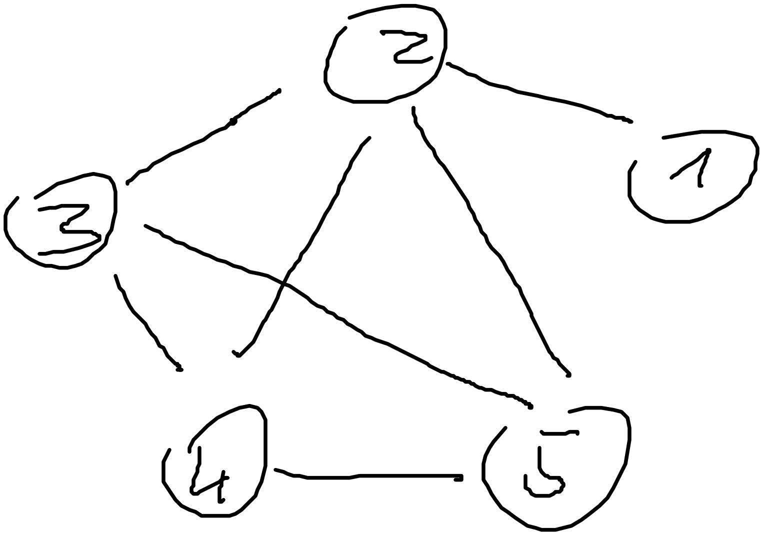
Cykly délky 5: $\binom{5}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 =$

$= 6 \cdot 2 = 12$



Celkem: $12 + 15 + 10 = \underline{\underline{37}}$

$\underline{10.7}$ Určete počet sledů délky 4 z vrcholu ① do vrcholu ② v následujícím grafu



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

počet sledů délky jedna z i-tého do j-tého vrcholu

$$A^2 = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

sledy délky 2

$$A^4 = \begin{pmatrix} * & 17 & * & * & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

s lody dilky 4

Výsledek je $\underline{\underline{17}}$