6.3 $\quad y' + \dfrac{2y}{x^2-1} = x$ lineární DR s nekonstantními koeficienty, nehomogenní

$y' + \dfrac{2y}{x^2-1} = 0$ zhomogenizovaná

má řešení $\quad y = C_2 \dfrac{x+1}{x-1}$

"metoda variace konstanty"

od teď $C_2 = C_2(x)$

$$y(x) = C_2(x)\,\frac{x+1}{x-1}$$

$$\left(C_2(x)\,\frac{x+1}{x-1}\right)' + \frac{2C_2(x)\,\frac{x+1}{x-1}}{(x+1)(x-1)} = x$$

$$C_2'\,\frac{x+1}{x-1} + C_2 \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{2C_2}{(x-1)^2} = x$$

$$C_2'\,\frac{x+1}{x-1} + (-2+2)\,\frac{C_2}{(x-1)^2} = x$$

$$C_2' = \frac{x(x-1)}{x+1} \qquad \frac{dC_2}{dx} = \frac{x^2-x}{x+1}$$

$$dC_2 = \frac{x^2-x}{x+1}\,dx \quad \Big| \int$$

$$C_2 = \int \frac{x(x+1)-2x}{x+1}\,dx =$$

$$= \int \left(x - \frac{2(x+1)-2}{x+1}\right)dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + D$$

Obecné řešení původní rovnice je tvaru $D \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + D\right)\frac{x+1}{x-1}}$$

Řešení splňující poč. podm. $y(0) = -1$

$$y(0) = D\cdot(-1) = -1 \implies D = 1$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + 1\right)\frac{x+1}{x-1}$$

Řešení splňující poč. podm. $y(2) = 3$

$$y(2) = (2 - 4 + 2\ln 3 + D)\cdot 3 = 3$$

$$D = 3 - 2\ln 3$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + (3 - 2\ln 3)\right)\frac{x+1}{x-1}$$

6.4 $xy' + y\ln x = y\ln y \quad / \frac{1}{x}$ $\quad$ $x>0$, $y>0$

$y(1) = 1$ $\quad$ 1. kvadrant

$$y' + \frac{y}{x}\ln x = \frac{y}{x}\ln y$$

$$y' + \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} = 0 \quad \Big| \quad y' = -\frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}$$

Vhodná substituce $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$r = r(x)$

$$r = \frac{y}{x} > 0$$

$$r' = \frac{dr}{dx} = \frac{y'x - y}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(-r\ln(r^{-1}) - r\right)$$

$$\frac{dr}{dx}$$
$$\parallel$$
$$r' = +\frac{1}{x}r\ln r - \frac{r}{x} = \frac{1}{x}r(\ln r - 1)$$

$$\frac{dr}{r(\ln r - 1)} = \frac{1}{x}dx \quad \Big/ \int \quad \text{separování proměnné}$$

$$\left|\begin{array}{l} u = \ln r - 1 \\ du = \frac{1}{r}dr \end{array}\right|$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|u| = \ln|x| + \underset{\ln C_2,\ C_2>0}{\underbrace{C_1}}$$

$$\ln|u| = \ln\left(C_2|x|\right), \quad x>0$$

$$|u| = C_2 x \leadsto \boxed{u = C_3 x, \quad C_3 \in \mathbb{R}}$$

$$u = \ln z - 1$$

$$C_3 x + 1 = \ln z$$

$$\boxed{e^{C_3 x + 1} = z} = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{y = x e^{C_3 x + 1}}$$

Řešení splňující poč. podm. $y(1) = 1$.

$$y(1) = e^{C_3 + 1} = 1 = e^0$$

$$C_3 = -1$$

$$\boxed{y(x) = x e^{-x+1}}$$

Lin. DR s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$

- char. pol. $\rightsquigarrow$ zhomogenizovaná rce
- pravá strana $\rightsquigarrow$ umíme řešit pro "jednoduché" pr. strany

7.1. $y'' = 2y' - y + 1$

$$y'' - 2y' + y = 1$$

7.2 $y'' + 3y' + 2y = \underline{(x+1)e^{-3x}}$

zhomogenizovaná rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$\hookrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ char. pol.

$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ obecné řešení zhom. rovnice je $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $C_i \in \mathbb{R}$

Najdeme partikulární řešení původní rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{-3x}$$

Pozn: Je-li $b(x) = p(x)e^{\alpha x}$

- $p(x)$ polynom stupně k
- $\alpha \in \mathbb{R}$,

pak partikulární řešení je tvaru $\boxed{x^s v(x) e^{\alpha x}}$, kde

- s je násobnost kořene α v char. polynomu
- $v(x)$ je pol. stupně k

$y(x) = (ax+b)e^{-3x}$ part. řešení

$$y'(x) = ae^{-3x} - 3(ax+b)e^{-3x} =$$

$$= [-3ax + (a-3b)]e^{-3x}$$

$$y''(x) = -3ae^{-3x} - 3[-3ax + (a-3b)]e^{-3x}$$
$$= [9ax + (-6a+9b)]e^{-3x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = [9ax - 6a + 9b + 3(-3ax + (a-3b)) + 2(ax+b)]e^{-3x} = (x+1)e^{-3x}$$

$$2ax - 6a + 9b + 3(a-3b) + 2b = x+1$$

$$2ax + (-3a+2b) = x+1$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad -3a + 2b = 1$$
$$-\frac{3}{2} + 2b = 1$$
$$2b = \frac{5}{2}$$
$$\boxed{b = \frac{5}{4}}$$

Obecné řešení je

$$C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'' + 3y' + 2y = \underbrace{e^{-x}}_{b(x)}$$

-1 je kořenem char. pol. násobnosti jedna

Partikulární řešení je tvaru

$$y(x) = axe^{-x}$$

$$y'(x) = ae^{-x} - axe^{-x} = a(-x+1)e^{-x}$$

$$y''(x) = a[-1-(-x+1)]e^{-x}$$

$$= a(x-2)e^{-x}$$

$$[a(x-2)+3a(-x+1)+2ax]e^{-x} = e^{-x}$$

$$-2a+3a = 1$$

$$a = 1$$

Závěr: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + xe^{-x}$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

7.1 $y'' = 2y' - y + 1$

$$y'' - 2y' + y = 1$$

Zhomogenizujeme rovnici:

$$y'' - 2y' + y = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1$ dvojnásobný kořen

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Partikulární řešení

$y'' - 2y' + y = 1$ je tvaru $y = a$, $a \in \mathbb{R}$

$$a = 1$$

Obecné řešení je

$$\boxed{y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 1} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Počáteční podm.: $y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

$$y'(x) = C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x$$

$x = 0$: $y(0) = C_1 + 1 = 0$

 $y'(0) = C_1 + C_2 = 1$

$C_1 = -1$

$C_2 = 2$

Řešení: $\boxed{y(x) = -e^x + 2xe^x + 1}$