8.1 $y'' + y' = x^2 - x + 6e^{2x}$

Zhomogenizovaná rovnice

$y'' + y' = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

má řešení $y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x}$

$= C_1 + C_2 e^{-x}$

(i) $y_1'' + y_1' = x^2 - x \rightsquigarrow$ part. řeš. $y_1(x)$

(ii) $y_2'' + y_2' = 6e^{2x} \rightsquigarrow$ - " - $y_2(x)$

$(y_1+y_2)'' + (y_1+y_2)' = x^2 - x + 6e^{2x}$

(i) $y_1'' + y_1' = x^2 - x \rightsquigarrow$ je tvaru obecné pravé strany

$e^{\alpha x}(P_e(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x)$

pro $\alpha = \beta = 0$ a $P_e(x) = x^2 - x$

$\Rightarrow y_1(x) = ax^2 + bx + c$

$y_1'(x) = 2ax + b$

$y_1''(x) = 2a$

$\Rightarrow 2a + (2ax + b) = x^2 - x$ nejde

protože 0 je

(jednonás.) kořen char. pol.

Tedy spočítáme $y_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$y_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_1''(x) = 6ax + 2b$

$y_1'' + y_1' = x^2 - x$

$6ax + 2b + (3ax^2 + 2bx + c) = x^2 - x$

$3a = 1$ $\quad a = \frac{1}{3}$ $\quad b = -\frac{3}{2}$

$6a + 2b = -1 \rightsquigarrow 2 + 2b = -1$

$2b + c = 0$ $\quad c = 3$ $\quad 2b = -3$

$\boxed{y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x}$

(ii) $y_2'' + y_2' = 6e^{2x}$ je ve tvaru

obecné pravé strany

$e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right)$

pro $\underline{\alpha = 2}$, $\beta = 0$, $P_\ell(x) = 6$ $(\ell = 0)$

není kořen

char. pol.

$\Rightarrow y_2(x) = a e^{2x} \Rightarrow y_2'(x) = 2a e^{2x}$

$\Rightarrow 4ae^{2x} + 2ae^{2x} = 6e^{2x}$ $\quad y_2''(x) = 4a e^{2x}$

$a = 1$

$y_2(x) = e^{2x}$

<u>Závěr</u>: $C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + e^{2x}$

8.2 $\quad y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}\cos x$

zhomogenizovaná rovnice

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$y(x) = C_1 \underbrace{e^{(-1-i)x}} + C_2 \underbrace{e^{(-1+i)x}}$$

$$= e^{-x-ix} = e^{-x} \cdot e^{-ix} =$$

$$= e^{-x}\left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right)$$

$$= e^{-x}\left(\cos x + i\sin x\right)$$

součet: $2e^{-x}\cos x$

rozdíl: $-2ie^{-x}\sin x$

Závěr: $e^{-x}\cos x$ a $e^{-x}\sin x$ generují prostor řešení

Řešení zhomogenní sdružené rovnice je $D_1 e^{-x}\cos x + D_2 e^{-x}\sin x,\ D_1, D_2 \in \mathbb{R}$

Dále hledám part. řešení

$$y'' + 2y' + 2y = \underbrace{3e^{-x}\cos x}_{\text{je v obecném tvaru}}$$

$$e^{\alpha x}\left(P_\ell(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right)$$

pro $\underbrace{\alpha = -1,\ \beta = 1}_{-1+i \text{ je kořen char. pol}}$, $P_\ell(x) = 3$, $\ell = 0$

$Q_k(x) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x e^{-x}(a\cos x + b\sin x) = y(x)}$$

$$y'(x) = e^{-x}\left[a\cos x + b\sin x - ax\cos x - bx\sin x - ax\sin x + bx\cos x\right]$$

$$= e^{-x}\left[(a - ax + bx)\cos x + (b - bx - ax)\sin x\right]$$

$$y''(x) = \Big[-(a - ax + bx)\cos x - (b - bx - ax)\sin x$$
$$+ (-a + b)\cos x + (-b - a)\sin x$$
$$- (a - ax + bx)\sin x + (b - bx - ax)\cos x\Big]$$
$$= e^{-x}\Big[(-2bx - 2a + 2b)\cos x + (2ax - 2a - 2b)\sin x\Big]$$

$$y'' + 2y' + 2y =$$
$$= e^{-x}\Big[(-2bx - 2a + 2b)\cos x + (2ax - 2a - 2b)\sin x$$
$$+ 2\big((a - ax + bx)\cos x + (b - bx - ax)\sin x\big)$$
$$+ 2(ax\cos x + bx\sin x)\Big]$$
$$= e^{-x}\big[2b\cos x - 2a\sin x\big] = 3e^{-x}\cos x$$
$$\hookrightarrow a = 0$$
$$2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ part. řešení je $y = \frac{3}{2}xe^{-x}\sin x$

Závěr: $y(x) = D_1 e^{-x}\cos x + D_2 e^{-x}\sin x + \frac{3}{2}xe^{-x}\sin x$

8.3 $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1$

Zhomogenizovaná úvavnice:

$y^{(5)} + y^{(3)} = 0 \rightsquigarrow \lambda^5 + \lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda^2+1) = 0$

kořeny $\lambda_1 = 0$ trojnásobný

$\left.\begin{array}{l}\lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i\end{array}\right\}$ jednonásobné

$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 x^2 e^{0x} +$

$+ C_4 \underbrace{e^{ix}}_{\cos x + i \sin x} + C_5 \underbrace{e^{-ix}}_{\cos x - i \sin x}$

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + D_1 \sin x + D_2 \cos x$

Partikulární řešení

$y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1$ je tvaru

$e^{\alpha x}(P_\ell(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x)$

pro $\alpha = 0, \beta = 0, P(x) = x^2 - 1, \ell = 2$

0 je koreň char. pol. stupňa 3

$$\Rightarrow y(x) = x^3(ax^2+bx+c)$$
$$= ax^5+bx^4+cx^3$$
$$y'(x) = 5ax^4+4bx^3+3cx^2$$
$$y''(x) = 20ax^3+12bx^2+6cx$$
$$y^{(3)}(x) = 60ax^2+24bx+6c$$
$$y^{(4)}(x) = 120ax+24b$$
$$y^{(5)}(x) = 120a$$

$$y^{(5)}+y^{(3)} = 120a+(60ax^2+24bx+6c) =$$
$$= x^2-1$$

$$60ax^2+24bx+(120a+6c) = x^2-1$$

$a = \frac{1}{60}$ $\qquad$ $b = 0$ $\qquad$ $120a+6c = -1$

$$2+6c = -1$$

$$y(x) = x^3\left(\frac{1}{60}x^2-\frac{1}{2}\right) \qquad +6c = -3$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

<u>Záver</u>: obecné riešenie je

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + D_1 \sin x + D_2 \cos x + x^3\left(\frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

8.4 $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^2 + 2$

lineární DR s nekonstantními koeficienty

$\rightsquigarrow$ trikové substituce

neznámou funkci $y(x)$

převedeme na funkci

$h(z) = y(e^z)$ $\boxed{\text{subs. } x = e^z}$

$$\frac{dh}{dz} = y'(x) \cdot \underbrace{e^z}_{x} = x \cdot y'(x) = e^z \cdot y'(e^z)$$

$$\frac{d^2h}{dz^2} = e^z \cdot y'(e^z) + e^z\left(y''(e^z) \cdot e^z\right)$$

$$= x \cdot y'(x) + \underbrace{e^{2r}}_{x^2} \cdot y''(x)$$

$$\frac{d^2h}{dr^2} = x^2 \cdot y'' + x y'$$

$$\frac{dh}{dr} = x y'$$

$$\frac{d^2h}{dr^2} - \frac{dh}{dr} = x^2 y''$$

$\Rightarrow$ převedu rce

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^2 + 2$$

$$\boxed{h' = \frac{dh}{dr} \qquad h'' = \frac{d^2h}{dr^2}} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$(h'' - h') - 2h' + 2h = e^{2r} + 2$$

$$\boxed{h'' - 3h' + 2h = e^{2r} + 2}$$

lineární DR s konstantními koeficienty a nesnímou funkcí $f(r)$ ....