

MUC11 Matematická analýza 1

Druhé cvičení – Hornerovo schéma, rozklad na parciální zlomky

Petr Liška

Masarykova univerzita

16.10.2020

Příklad 1:

Proveďte rozklad polynomů v \mathbb{R} a určete jejich znaménko

a) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

b) $P(x) = x^5 - 10x^4 + 34x^3 - 36x^2 - 27x + 54$

c) $P(x) = x^4 - 7x^2 - 4x + 20$

d) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

- a) Je-li číslo α reálný k -násobný kořen polynomu Q , pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

- b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k -násobné kořeny polynomu Q , pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Řešení:

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3},$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Řešení:
$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3},$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Řešení:

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3},$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

$$x = 1$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení: $R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \implies 5 = 2A$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Řešení: $R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3},$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

$$x = 1 \quad \implies \quad 5 = 2A \quad \implies \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:
$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \implies 5 = 2A \implies A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \implies 10 = -B$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:
$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \implies \quad 5 = 2A \quad \implies \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \implies \quad 10 = -B \quad \implies \quad B = -10$$

$$x = 3$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

Řešení: $R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3},$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 10 = -B \quad \Longrightarrow \quad B = -10$$

$$x = 3 \quad \Longrightarrow \quad 17 = 2C$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:
$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \implies \quad 5 = 2A \quad \implies \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \implies \quad 10 = -B \quad \implies \quad B = -10$$

$$x = 3 \quad \implies \quad 17 = 2C \quad \implies \quad C = \frac{17}{2}$$

Příklad 2 a)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení: $R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \implies 5 = 2A \implies A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \implies 10 = -B \implies B = -10$$

$$x = 3 \implies 17 = 2C \implies C = \frac{17}{2}$$

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{10}{x-2} + \frac{17}{2(x-3)}.$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$x^3 : 0 = A \quad + D$$

$$x^2 : 0 = A + B$$

$$x^1 : 0 = B + C$$

$$x^0 : 1 = C,$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$x^3 : 0 = A \quad + D$$

$$x^2 : 0 = A + B$$

$$x^1 : 0 = B + C$$

$$x^0 : 1 = C,$$

$$\implies A = 1, B = -1, C = 1, D = -1$$

Příklad 2 b)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$x^3 : 0 = A \quad + D$$

$$x^2 : 0 = A + B$$

$$x^1 : 0 = B + C \quad \implies A = 1, B = -1, C = 1, D = -1$$

$$x^0 : 1 = C,$$

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}.$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

$$x^2 + 4x = A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 4).$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

$$x^2 + 4x = A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 4).$$

$$x^3 : 0 = A + B + C$$

$$x^2 : 1 = 2A - 2B + D$$

$$x^1 : 4 = 4A + 4B - 4C$$

$$x^0 : 0 = 8A - 8B - 4D,$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

$$x^2 + 4x = A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 4).$$

$$x^3 : 0 = A + B + C$$

$$x^2 : 1 = 2A - 2B + D \implies A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$$

$$x^1 : 4 = 4A + 4B - 4C$$

$$x^0 : 0 = 8A - 8B - 4D,$$

Příklad 2 c)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

$$x^2 + 4x = A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 4).$$

$$x^3 : 0 = A + B + C$$

$$x^2 : 1 = 2A - 2B + D \implies A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$$

$$x^1 : 4 = 4A + 4B - 4C$$

$$x^0 : 0 = 8A - 8B - 4D,$$

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16} = \frac{3}{8(x - 2)} + \frac{1}{8(x + 2)} + \frac{1 - x}{2(x^2 + 4)}.$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Řešení:

$$\frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2}.$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Řešení:

$$\frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2}.$$

$$8x^3 + x - 2 = Ax^2(x - 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2) + Dx^3$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Řešení:

$$\frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2}.$$

$$8x^3 + x - 2 = Ax^2(x - 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2) + Dx^3$$

$$x^3 : 8 = A + D$$

$$x^2 : 0 = -2A + 2B$$

$$x^1 : 1 = -2B + C$$

$$x^0 : -2 = -2C, \quad ,$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Řešení:

$$\frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2}.$$

$$8x^3 + x - 2 = Ax^2(x - 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2) + Dx^3$$

$$\begin{aligned} x^3 : \quad 8 &= A && + D \\ x^2 : \quad 0 &= -2A + 2B \\ x^1 : \quad 1 &= -2B + C && \implies A = 0, B = 0, C = 1, D = 8 \\ x^0 : \quad -2 &= -2C \end{aligned},$$

Příklad 2 d)

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)}$$

Řešení:

$$\frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2}.$$

$$8x^3 + x - 2 = Ax^2(x - 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2) + Dx^3$$

$$x^3 : 8 = A + D$$

$$x^2 : 0 = -2A + 2B$$

$$x^1 : 1 = -2B + C$$

$$x^0 : -2 = -2C,$$

$$\implies A = 0, B = 0, C = 1, D = 8$$

$$R(x) = 1 + \frac{8x^3 + x - 2}{x^3(x - 2)} = 1 + \frac{1}{x^3} + \frac{8}{x - 2}.$$

Domácí úkol

Příklad 1

Určete znaménko racionální lomené funkce

$$R(x) = \frac{x^5(x-3)(x^2+1)^3}{(x-1)^4(x+5)^5(x-2)(x^2+4)^5}$$

Příklad 2

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

a)

$$R(x) = \frac{-2x^2 + 21x + 35}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30}$$

b)

$$R(x) = \frac{2x^2 - 2x + 3}{(x+2)(x^2+1)}$$