Písemná práce Geometrie 2, 27.10.2017
Ukázka řešení

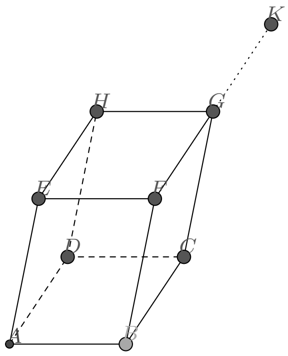
- A1 Určete příklad rovin α a β v A_4, které jsou různoběžné a mají společný právě jeden bod.
  Řešením jsou například roviny α a β:
  $\alpha \equiv X = [0,0,0,0] + t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0)$
  $\beta \equiv X = [0,0,0,0] + m(0,0,1,0) + n(0,0,0,1)$
  Tyto roviny se protínají v bodě $P = [0,0,0,0]$, vektory musí odpovídat našemu schématu
  $\left(\begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, tj. k určení rovin potřebujeme celkem čtyři nezávislé vektory.

- B1 Určete příklad rovin α a β v A_4, které jsou mimoběžné a mají společný jeden směr. Pro tento případ vypadá naše schéma takto: $\left(\begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x & x & x & x \end{array}\right)$, tedy jeden z určujících vektorů použiji dvakrát (směr určený tímto vektorem bude právě ten společný) a body musím volit tak, aby určovaly vektor LN s předchozími třemi (nejjednodušeji dám jedničku do souřadnice, kde nemají jedničku vektory). Takové podmínky splňují například roviny:
  $\alpha \equiv X = [0,0,0,0] + t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0)$
  $\beta \equiv X = [0,0,0,1] + m(1,0,0,0) + n(0,0,1,0)$.

- A2 V A_3 určete parametrické vyjádření nějaké přímky, která prochází bodem $M = [1,3,2]$ a je různoběžná s rovinou $\omega \equiv x + y - z = 0$.

- B2 V A_3 určete parametrické vyjádření nějaké přímky, která prochází bodem $M = [1,2,3]$ a je různoběžná s rovinou $\eta \equiv x + y + z = 0$.
  Jsou-li přímka a rovina různoběžné, mají společný bod. Stačí tedy zvolit, v kterém bodě se přímka do roviny zabodne. Jeho souřadnice samozřejmě musí vyhovovat zadané rovnici roviny. Zvolíme tedy nějaký takový bod (například tak, že si zvolíme nějaké dvě jeho souřadnice a třetí z rovnice dopočítáme). Takto získáme druhý bod hledané přímky, díky kterému určíme směrový vektor přímky.
  Pro pro variantu A rovnici roviny vyhovuje např. bod $P = [1,1,2]$, který nám spolu se zadaným bodem M učí vektor $\underline{u} = (0,2,0) \sim (0,1,0)$, dostaneme přímku $p \equiv X = [1,3,2] + t(0,1,0)$.
  Pro variantu B funguje např. bod $P = [1,1,-2]$, určující spolu s M vektor $\underline{u} = (0,1,5), p \equiv X = [1,2,3] + t(0,1,5)$.
  Nebo stačilo prostě něco tipnout. To by byla velká náhoda, abyste se trefili zrovna do přímky, která by byla rovnoběžná.

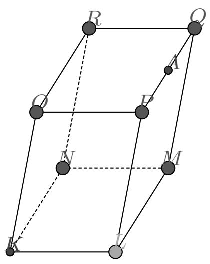
- A3 V A_3 je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Zvolte si vhodný repér a vyjádřete s jeho pomocí souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu a bodu K na polopřímce FG, pro nějž platí $|FK| : |FG| = 2 : 1$.



Zvolíme-li si například repér $\mathcal{R} = \langle A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \rangle$ mají body následující souřadnice:

$A[0,0,0]$ protože je to počátek
$B[1,0,0]$ dostanu se do něj po prvním vektoru
$C[1,1,0] \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$D[0,1,0]$...
$E[0,0,1]$
$F[1,0,1]$
$G[1,1,1]$
$H[0,1,1]$
$K[1,2,1]$

- B3 V A_3 je dán rovnoběžnostěn $KLMNOPQR$. Zvolte si vhodný repér a vyjádřete s jeho pomocí souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu a bodu A který je středem hrany PQ.



Zvolíme-li si například repér $\mathcal{R} = \langle K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KN}, \overrightarrow{KO} \rangle$ mají body následující souřadnice:

$K[0,0,0]$ protože je to počátek
$L[1,0,0]$ dostanu se do něj po prvním vektoru
$M[1,1,0] \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM}$
$N[0,1,0]$...
$O[0,0,1]$
$P[1,0,1]$
$Q[1,1,1]$
$R[0,1,1]$
$A[1,1/2,1]$

- A4 V $\mathbb{R}^4$ jsou dány báze $\mathcal{U} = \{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \underline{u_4}\}$ a $\mathcal{W} = \{\underline{w_1}, \underline{w_2}, \underline{w_3}, \underline{w_4}\}$, $\underline{u_1} = (1,2,3,4)$, $\underline{u_2} = (0,1,-1,1)$, $\underline{u_3} = (0,0,2,1)$, $\underline{u_4} = (1,2,1,0)$, $\underline{w_1} = (1,0,0,0)$, $\underline{w_2} = (0,1,0,0)$, $\underline{w_3} = (0,0,1,0)$, $\underline{w_4} = (0,0,0,1)$. Pomocí matice přechodu od $\mathcal{U}$ k $\mathcal{W}$ určete, jakou orientaci má báze $\mathcal{W}$, prohlásíme-li $\mathcal{U}$ za kladnou.

- B4 V $\mathbb{R}^4$ jsou dány báze $\mathcal{U} = \{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \underline{u_4}\}$ a $\mathcal{W} = \{\underline{w_1}, \underline{w_2}, \underline{w_3}, \underline{w_4}\}$, $\underline{u_1} = (1,2,3,4)$, $\underline{u_2} = (0,1,-1,1)$, $\underline{u_3} = (0,0,2,1)$, $\underline{u_4} = (1,2,1,0)$, $\underline{w_1} = (1,1,1,1)$, $\underline{w_2} = (1,-1,1,1)$, $\underline{w_3} = (1,1,-1,1)$, $\underline{w_4} = (1,1,1,-1)$ Pomocí matice přechodu od $\mathcal{U}$ k $\mathcal{W}$ určete, jakou orientaci má báze $\mathcal{W}$, prohlásíme-li $\mathcal{U}$ za kladnou.
  Matici přechodu od $\mathcal{U}$ k $\mathcal{W}$ dostanu tak, že si do matice sepíšu po sloupcích prvně vektory báze $\mathcal{U}$, poté $\mathcal{W}$. Upravím-li řádkovými úpravami $\mathcal{U}$ vlevo na jednotkovou matici, dostanu vpravo hledanou matici přechodu. Protože se ve variantě A i B báze $\mathcal{U}$ shodují, provedeme oba případy naráz:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \cdots$$

$$\cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & -1 & 2 & 5 & 11 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -16 & 6 & 4 & -2 & -8 & -20 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 3 & 1 & -2 & 1 & -5 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/6 & -1/2 & -1/6 & 1/3 & 5/6 & 11/6 & 7/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/3 & 1 & 2/3 & -1/3 & -4/3 & -10/3 & -8/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & -5/6 & -1/6 & 5/6 \end{array}\right)$$

  Matice přechodu je tedy v případě A:

$$\begin{pmatrix} 7/6 & -1/2 & -1/6 & 1/3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -8/3 & 1 & 2/3 & -1/ \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

  a v případě B:

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 11/6 & 7/6 & 1/6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ -4/3 & -10/3 & -8/3 & -2/3 \\ 1/6 & -5/6 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

  Je-li determinant matice přechodu kladné číslo, jsou báze shodně orientovány, je-li to číslo záporné, jsou orientovány opačně.

$$detA = \begin{vmatrix} 7/6 & -1/2 & -1/6 & 1/3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -8/3 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 1/6 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/6, \text{ tj. báze je opačně záporně orientovaná.}$$

$$detB = \begin{vmatrix} 5/6 & 11/6 & 7/6 & 1/6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ -4/3 & -10/3 & -8/3 & -2/3 \\ 1/6 & -5/6 & -1/6 & 5/6 \end{vmatrix} = 4/3, \text{ tj. báze je stejně (kladně) orientovaná.}$$

Orientaci lze samozřejmě zjistit i pomocí výpočtů dvou determinantů:

$$detU = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \text{ !ale pozor! báze je definována jako kladná!}$$

$$detW_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

, tj. je opačného znamínka a tedy záporně orientovaná. $detW_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ -8, je tedy shodně (kladně) orientovaná.

- A5 V A_3 určete neparametrické vyjádření roviny ϱ, která obsahuje přímky $p = \{A; L(\underline{u})\}$ a $q = \{B; L(\underline{v})\}$, kde $A = [3, -1, 2], \underline{u} = (5, 2, 4), B = [8, 1, 6], \underline{v} = (3, 1, -2)$.
  Dvě různoběžky určují rovinu (p a q jsou různoběžky, protínají se v bodě B, pro potvrzení stačí dosadit $t = 1$). Rovina má parametrické vyjádření $\varrho \equiv X = [3, -1, 2] + t(5, 2, 4) + s(3, 1, -2)$. Pro převod do neparametrického vyjádření použijme např. metodu vyloučení parametrů, rovina je nadrovinou v A_3, potřebujeme proto 1 rovnici, ve které se nám odupraví parametry.
  Z rovnic pro jednotlivé souřadnice bodů roviny vytvoříme matici a pod čarou vytvoříme na místě t a s nuly:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 11 \\ \hline 0 & -22 & 4 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 11 \\ \hline 0 & 0 & -40 & 110 & -5 & -240 \end{array}\right)$$

  V posledním řádku už máme vyloučené parametry, získáváme hledanou rovnici roviny $-40x + 110y - 5z = -240$, což je po úpravě $8x - 22y + z = 48$.

- B5 V A_3 určete neparametrické vyjádření roviny ϱ, která prochází bodem $M = [4, 0, -1]$ obsahuje přímku $p = \{A; L(\underline{u})\}$, kde $A = [2, 1, 2], \underline{u} = (-2, 1, 3)$.
  Bod M leží na přímce p, tedy pomocí něj nemůžeme vytvořit další vektor, který by spoluurčil rovinu. Řešením jsou všechny roviny, které prochází přímkou p.
  Roviny mají parametrické vyjádření $\varrho \equiv X = [2, 1, 2] + t(-2, 1, 3) + s(a, b, c)$.Jejich neparametrické vyjádření zjistíme např. metodou vyloučení parametrů.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ -2 & a & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & c & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 1 & b & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & a & -1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 3 & c & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 1 & b & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & a+2b & -1 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 3b-c & 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} t & s & x & y & z & b \\ 1 & b & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & a+2b & -1 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 3b-c & -3a-2c & a+2b & -a+10b-4c \end{array}\right)$$

Naše roviny mají tedy tvar $(3b-c)x-(3a+2c)y+(a+2b)z=-a+10b-4c$. Konkrétní roviny dostaneme volbou za parametry a, b, c. Namátkou například:

$$\begin{array}{cc} a=1, b=c=0 & -3y+z=-1; \\ b=1, a=c=0 & 3x+2z=10; \\ c=1, a=b=0 & -x-2y=-4. \end{array}$$