

Derivace a integrály v praxi

Zuzana Došlá

Masarykova univerzita, Brno

20. října 2020

Myšlenka na úvod

Skutečným problémem (aplikované) matematiky je, že je jako vzduch, který dýcháme. Je životně důležitá pro všechno, co děláme, ale je neviditelná a lehkou ignorovatelná.

— Chris Budd

Seminář 6.října 2020

- 1 Jak si naplánovat cestu?
- 2 Evoluce je dokonalá. *Iva Michalcová*
- 3 Chemické úlohy: jak se mění koncentrace roztoku *Iva Rambousková, Aneta Benešová*
- 4 Koncentrace látky v krvi. *Adriana Kabátová, Natálie Kozlovská*
- 5 Úloha z ekonomie I. *David Daniš*

Seminář 13.října 2020

- 1 Problém letecké společnosti. *Marika Kaňová*
- 2 Problém stavby silážní jámy. *Lucie Vytlačilová*
- 3 Problém středověkého stavitele. *Petra Trkanová*
- 4 Problém gondoliéra. *Zdeněk Lukeš*

Seminář 20.října

- 1 Problém líného kosa
- 2 Problém náruživého kafaře
- 3 Odhad ideální váhy (BMI)
- 4 Problém lomu světla (Snellův zákon)

Seminář 27.října

- 1 Jak vzniká duha
- 2 Model růstu populace (logistická diferenciální rovnice)
- 3 Model radioaktivního rozpadu

Seminář 3. listopadu

- 1 Numerické řešení počáteční úlohy (Eulerova metoda)
- 2 Podávání glukózy do krevního oběhu
- 3 Rychlost chemických reakcí I
- 4 Rychlost chemických reakcí II

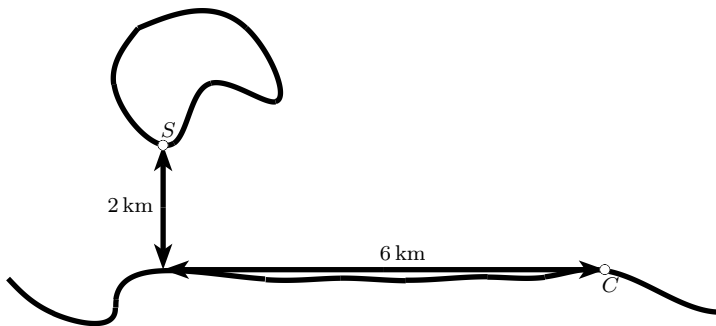
Seminář 10. listopadu

- 1 Druhý Newtonův zákon a pohyb iontů
- 2 Okrajová úloha
- 3 Úlohy z kvantové mechaniky (energie částic)

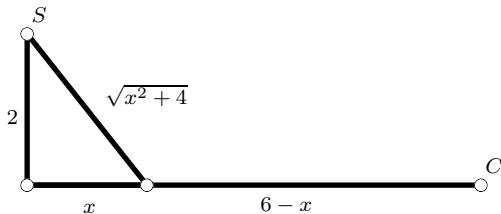
Jak si naplánovat cestu?

Něco na zahřátí

Jak se co nejrychleji dostat z ostrova domů, když ostrov je 2 km daleko od pobřeží a domov je dalších 6 km daleko? Předpokládejme, že jsme v dobré kondici a tak plaveme rychlostí 4 km/h a jdeme rychlostí 8 km/h.



Něco na zahřátí

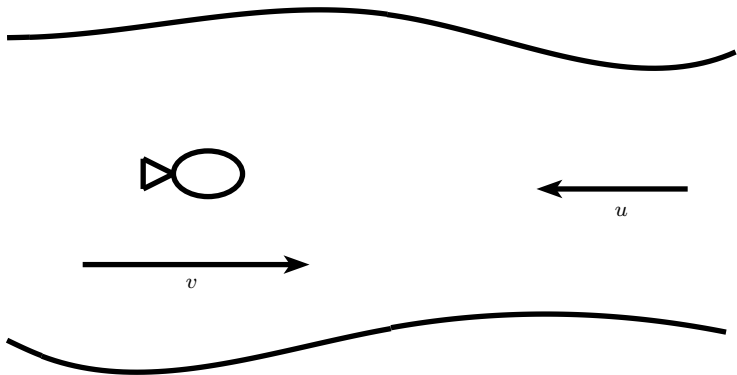


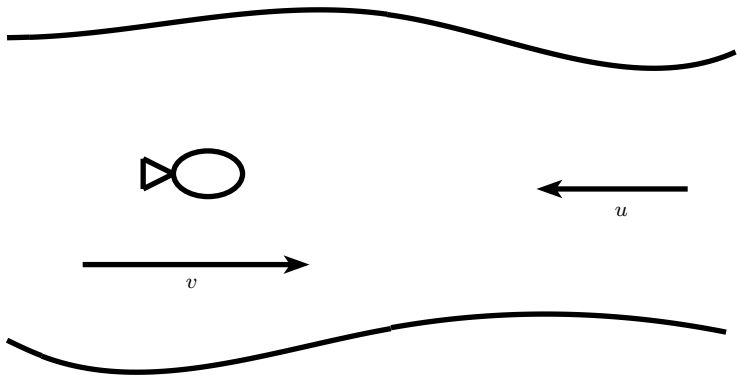
$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{6 - x}{8}$$

Evoluce je dokonalá

Evoluce je dokonalá

Pro ryby plovoucí relativní rychlostí v vůči plynoucí vodě je výdaj energie E za jednotku času přímo úměrný v^3 . Předpokládá se, že se ryby snaží minimalizovat energii potřebnou k překonání dané vzdálenosti. Jakou rychlostí mají ryby tedy ideálně plavat, aby minimalizovaly energii vydanou na cestu proti proudu o rychlosti u do vzdálenosti L .





$$E(v) = k \cdot t \cdot v^3 = k \frac{L}{v - u} v^3$$

Chemické úlohy

Jak se mění pH roztoku

Základní charakteristikou kyselosti, či zásaditosti látek je tzv. pH (power of hydrogen). Je dáno vztahem

$$pH = -\log [H_3O^+], \quad (1)$$

kde $[H_3O^+]$ značí koncentraci oxoniových iontů v roztoku.

- Nakreslete graf funkce pH .
- Co se stane s hodnotou pH , zvýší-li se koncentrace oxoniových iontů?
- Vyjádřete koncentraci oxoniových iontů v závislosti na pH roztoku.

Jak se mění molární koncentrace roztoku

Molární koncentrace c_V vyjadřuje množství látky (počet molů) v jednom litru roztoku. Je dána vztahem

$$c_V = \frac{n}{V}, \quad (2)$$

kde n je látkové množství rozpuštěné látky a V je objem rozpouštědla.

Co se stane s hodnotou molární koncentrace, zvýší-li se objem rozpouštědla V dvakrát a látkové množství rozpuštěné látky zůstane stejné?

Koncentrace látky v krvi

Jak se mění koncentrace drogy

Koncentrace $C(t)$ jisté drogy v krevním oběhu za dobu t hodin po jejím vpichu do svalové tkáně je dána vztahem

$$C(t) = \frac{2t}{16 + t^3}. \quad (3)$$

- Určete, kdy je koncentrace nejvyšší.
- Načrtněte graf funkce $C(t)$.

Koncentrace účinné látky v krvi

Účinná látka je vstříknuta do krve v čase $t = 0$. Koncentrace $c(t)$ této látky v krevním oběhu je dána vztahem

$$c(t) = e^{-t} - e^{-2t}. \quad (4)$$

- Určete, kdy je koncentrace látky v krvi nejvyšší.
- Načrtněte graf funkce $c(t)$.

Úlohy z ekonomie

Maximální zisk

Výrobce může prodat x výrobků v ceně

$$C = 200 - 0,01x$$

za výrobek, přičemž náklady na výrobu x výrobků jsou

$$N = 50x + 20000.$$

Při jaké produkci bude zisk maximální?

Seminář 13. října

Problém letecké společnosti

1. Problém letecké společnosti

Cena letenky vyhlídkového letu je 100 EUR, jestliže se ho zúčastní 50 – 100 turistů. Za každého pasažéra nad 100 se snižuje jeho cena o 0,5 EUR každému z nich. Letadlo má 200 míst.

Při jakém počtu účastníků bude mít letecká společnost maximální zisk?

2. Problém stavby silážní jámy

Silážní jáma má tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu s objemem 200 m^3 . Délka je čtyřnásobkem šířky; 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny.

Jaké mají být rozměry silážní jámy, aby její stavba byla co nejlevnější?

3. Problém středověkého stavitele

Středověký stavitel má tento problém:

Má železný pás o délce 200 palců a chtěl by z něj udělat rám románského okna.

Jakou má zvolit šířku okna, aby do chrámu procházelo co nejvíce světla (resp. aby okno mělo co největší plochu)?

4. Problém gondoliéra

Představte si, že jste v Benátkách a řídíte gondolu plnou turistů. Náhle před sebou vidíte ostrou pravouhlou zatáčku. Předpokládejme, že se nacházíte v kanálu šířky a a druhý kanál má šířku b .

Najděte nejdelší možnou tyč, kterou se můžete dostat z jednoho kanálu do druhého.

Seminář 20. října

1. Problém líného kosa

Na plotě, jehož výška je 1 m, sedí kos. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 m. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly.

V jaké vzdálenosti od plotu má kos sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot – žížala – větev po přímkách a po nejkratší dráze?

2. Problém naruživého kafaře

Jako milovník kávy máte následující problém. Máte papír na kávový filtr kruhového tvaru o poloměru 10 cm, vystřihnutím kruhové úseče o úhlu φ vznikne kávový filtr.

Jak zvolíte úhel φ , aby se do něj vešlo co nejvíce kávy?
Kolik si budete moci maximálně přefiltrovat kávy [cm^3]?

3. Odhad ideální váhy (BMI)

Index tělesné hmotnosti (BMI - Body Mass Index) je číslo používané jako měřítko obezity, umožňující statistické porovnání lidí s různou výškou. Index tělesné hmotnosti B je veličina vypočtená podle vzorce

$$B = \frac{m}{v^2},$$

kde m je hmotnost člověka v kilogramech a v je jeho výška v metrech. Ideální BMI je v rozmezí 19 až 24.

Považujme hodnotu BMI $B = 22$ za ideální. Potom ideální hmotnost člověka o výšce v je

$$m(v) = 22v^2.$$

- Proveďte lineární aproximaci této funkce v okolí bodu $v_0 = 1,8$ (což představuje typickou lidskou výšku vyjádřenou v metrech).
- Odtud stanovte rychlý odhad ideální tělesné hmotnosti.

4. Problém lomu světla (Snellův zákon)

Podle Fermatova principu se světlo šíří z bodu A do bodu B po takové dráze, aby doba šíření byla minimální. Bod A leží v prostředí, v němž je rychlost světla c_1 , bod B v prostředí, v němž je rychlost světla c_2 .

Určete dráhu paprsku z bodu A do bodu B .