1.5 Numerické řešení počáteční úlohy

V mnoha případech nejsme schopni danou diferenciální rovnici přímo vyřešit a musíme se spokojit pouze s přibližným řešením, kterého můžeme dosáhnout pomocí tzv. *numerických metod*. Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je *Eulerova metoda*. Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou.

Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Chceme nalézt přibližné řešení $y(x)$ pro $x \in [x_0, x_0+a]$. Postupujeme tak, že interval rozdělíme na n podintervalů délky h_i. Dostaneme tak dělicí body

$$x_1 = x_0 + h_1, \quad x_2 = x_1 + h_2, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + h_n = x_0 + a,$$

kde $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = a$. Vypočteme $y_0' = f(x_0, y_0)$ a položíme

$$y_1 = y_0 + h_1 y_0' = y_0 + h_1 f(x_0, y_0).$$

Podobně určíme $y_2 = y_1 + h_2 f(x_1, y_1)$ atd. a dostaneme přibližné řešení

$$y(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i) \quad \text{pro} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Nejjednodušším způsobem dělení intervalu je použití stejně vzdálených dělicích bodů. V tomto případě můžeme Eulerovu metodu popsat následovně:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Pomocí Eulerova algoritmu určete přibližné řešení počáteční úlohy

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1 \tag{1.7}$$

s krokem $h = 0{,}1$. Porovnejte tento výsledek s přesným řešením.

Řešení. Máme dáno $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x, y) = x + y$. Podle předchozího postupu tak dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22, \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362. \end{aligned}$$

Tedy hodnota řešení v bodě $x = 0{,}3$ je $y(0,3) \approx 1,362$. Pokračovaním v podobných výpočtech dostaneme další hodnoty:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485

Přibližné řešení počáteční úlohy (1.7) na intervalu $[0,1]$ je lomená čára spojující body $[x_i, y_i]$ z předchozí tabulky. Jelikož se jedná o lineární rovnici, můžeme najít přesné řešení, kterým je funkce

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Porovnáme-li hodnotu tohoto řešení v bodě $x = 1$, tj. $y(1) = 2e - 2 \approx 3{,}436564$ s řešením pomocí Eulerova algoritmu $y(1) = 3{,}187485$, dostaneme rozdíl 0,249079. ▲

Poznámka 1.16. a) Při použití Eulerovy metody se dopouštíme chyby, která je přímo úměrná velikosti dělicího intervalu, nejjednodušší cestou ke zpřesnění je tak zmenšení dělicího intervalu. Vliv velikosti kroku h na řešení předchozího příkladu v $x = 1$ je vidět v následující tabulce.

Velikost h	Hodnota $y(1)$
0, 500	2, 500000
0, 250	2, 882813
0, 100	3, 187485
0, 050	3, 306595
0, 020	3, 383176
0, 010	3, 409628
0, 005	3, 423034
0, 001	3, 433848

b) Nelze jednoduše říci, jak velká je chyba, které se dopouštíme při použití Eulerovy metody, snadno však můžeme poznat, zda-li naše přibližné řešení leží pod nebo nad skutečným řešením v okolí uzlového bodu. Dá se ukázat, že v případě, kdy je řešení konvexní (konkávní) v okolí uzlového bodu, pak naše přibližné řešení leží v okolí tohoto bodu pod (nad) skutečným řešením. O tom, zda-li je řešení konvexní nebo konkávní, se můžeme přesvědčit přímo ze zadání.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice:

   a) $y = \frac{1}{x+C}$, $y' = -y^2$, b) $y = e^{-t} + te^{-t}$, $y'' + 2y' + y = 0$,

   c) $y = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$, $y' = xy^3$, d) $y = \frac{1+Ce^t}{1-Ce^t}$, $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

   Pro rovnice z části c) a d) najděte funkce, které vyhovují počáteční podmínce $y(0) = 2$.

2. Řešte rovnice se separovanými proměnnými:

   a) $\frac{dy}{dx} = y^2$, b) $2y - x^3y' = 0$,

   c) $1 + y^2 + xyy' = 0$, d) $y + xy + xy' - xyy' = 0$,

   e) $xyy' = 1 - x^2$, f) $\frac{dy}{dt} = \frac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}}$.