Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta

PLANIMETRIE

Leo Boček
Jaroslav Zhouf

Praha 2009

Obsah

1. Geometrická zobrazení ... 7
2. Posunutí, otočení ... 8
3. Osová souměrnost, posunutá osová souměrnost ... 12
4. Shodná zobrazení ... 16
5. Shodnost trojúhelníků ... 18
6. Využití shodností v konstrukčních úlohách ... 20
7. Skládání shodných zobrazení ... 25
8. Stejnolehlost ... 30
9. Podobná zobrazení ... 34
10. Podobnost trojúhelníků ... 37
11. Využití podobností v konstrukčních úlohách ... 41
12. Euklidovy věty. Pythagorova věta ... 44
13. Konstrukční úlohy řešené pomocí výpočtu ... 48
14. Věta Menelaova a věta Cèvova ... 52
15. Těžnice, osy stran, osy úhlů a výšky v trojúhelníku ... 54
16. Goniometrické funkce ... 57
17. Věta sinová a kosinová ... 59
18. Kružnice ... 62
19. Věta o obvodovém a středovém úhlu ... 65
20. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku ... 70
21. Délka oblouku kružnice, obsah výseče a úseče ... 74
22. Vzájemná poloha dvou kružnic, stejnolehlost kružnic ... 76
23. Feuerbachova a Apolloniova kružnice ... 81
24. Mocnost bodu ke kružnici ... 86
25. Kruhová inverze ... 93
26. Apolloniovy úlohy ... 99
27. Čtyřúhelníky ... 108
28. Konvexní mnohoúhelníky. Pravidelné mnohoúhelníky ... 115
29. Dělicí poměr ... 120
30. Průměry ... 125

Výsledky cvičení ... 131

Použitá a doporučená literatura ... 147

1. Geometrická zobrazení

Zopakujte si pojmy související s pojmem zobrazení, např. *zobrazení, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot zobrazení, zobrazení (z) množiny, zobrazení na množinu, zobrazení do množiny, prosté zobrazení, vzájemně jednoznačné zobrazení, inverzní zobrazení, složené zobrazení.*

V tomto textu se budeme zabývat **geometrickými zobrazeními**, což jsou zobrazení, jejichž definičním oborem a oborem hodnot je celá rovina, případně podmnožina množiny všech bodů v rovině. Je-li f geometrické zobrazení, bod X je z definičního oboru zobrazení f a bod Y je jeho obraz, píšeme $Y = f(X)$. Někdy místo $f(X)$ píšeme X', je-li jasné, o jaké zobrazení se jedná.

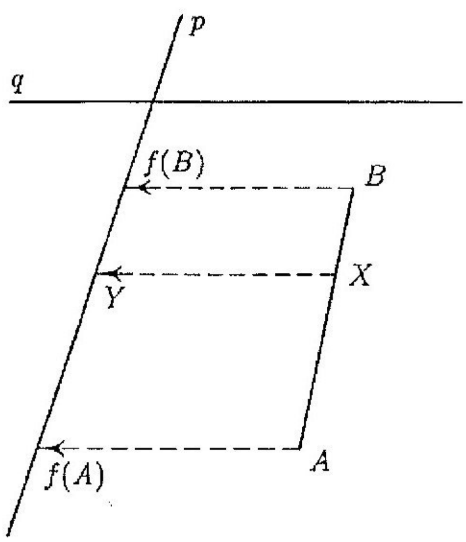
o **Příklad 1.** Jsou dány různoběžky p, q a úsečka AB. Označme K množinu všech bodů úsečky AB, L množinu všech bodů přímky p, f zobrazení K do L, které každému bodu X z K přiřadí ten bod Y z L, pro který platí: $X = Y$ nebo přímka XY je rovnoběžná s přímkou q. Určete definiční obor a obor hodnot zobrazení a zjistěte, zda je toto zobrazení prosté nebo zobrazení K na L. Je vzdálenost libovolných dvou bodů z K rovna vzdálenosti jejich obrazů?

Řešení.

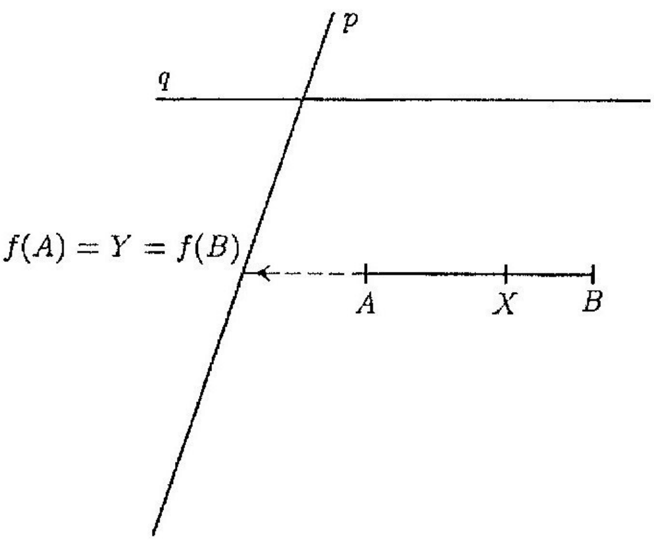
a) Přímka AB není rovnoběžná s přímkou q. Zobrazení f je prosté zobrazení K do L, definiční obor je úsečka AB, obor hodnot je úsečka $f(A)f(B)$ (obr. 1a).

b) Přímka AB je rovnoběžná s přímkou q. V tomto případě se všechny body úsečky AB zobrazí do jednoho bodu na přímce p, proto se nejedná o zobrazení prosté. Oborem hodnot je jednobodová množina obsahující bod $f(A)$ (obr. 1b).

V případě, že úsečka AB je rovnoběžná s přímkou p, je vzdálenost dvou libovolných bodů z K rovna vzdálenosti jejich obrazů.



Obr. 1a

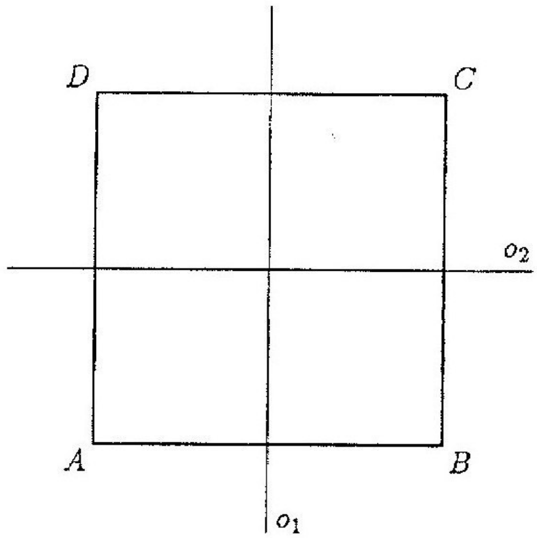


Obr. 1b

o **Příklad 2.** Je dán čtverec $ABCD$, přímka o_1 je osa strany AB, přímka o_2 je osa strany AD, množina K je množina všech vrcholů čtverce $ABCD$. Zobrazení F, G v množině K jsou definována:

$F : Y = F(X)$, jestliže přímka XY je kolmá na přímku o_1 a $X \neq Y$,
$G : Y = G(X)$, jestliže přímka XY je kolmá na přímku o_2 a $X \neq Y$.
Určete zobrazení H složené ze zobrazení F a G (obr. 2).

Řešení. Vidíme, že $F(A) = B$, $F(B) = A$, $F(C) = D$, $F(D) = C$, $G(A) = D$, $G(B) = C$, $G(C) = B$, $G(D) = A$, z čehož plyne $H(A) = C$, $H(B) = D$, $H(C) = A$, $H(D) = B$.



Obr. 2

o **Příklad 3.** Zobrazení, které každému bodu roviny přiřadí tentýž bod, se nazývá **identické zobrazení** nebo stručně **identita.**

Některá další geometrická zobrazení pravděpodobně znáte, je to např. posunutí, otočení, osovou souměrnost. Stručně je připomeneme v následujících kapitolách.

---

o **Cvičení 1.** Rozhodněte, zda se jedná o zobrazení prostá, určete jejich definiční obory a obory hodnot:

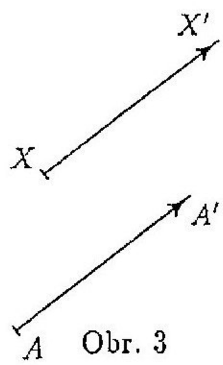
a) každému bodu roviny je přiřazen jeden pevný bod A v rovině,
b) každému bodu roviny je přiřazen jeho kolmý průmět na přímku p ležící v rovině.

o **Cvičení 2.** Body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.

a) Kolik existuje zobrazení množiny $K = \{A, B, C\}$ do množiny K?
b) Pro zobrazení f, g množiny K do K platí $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$, $g(A) = B$, $g(B) = C$, $g(C) = A$. Složte obě zobrazení v obou pořadích. Vzniknou stejná zobrazení? Jsou prostá?

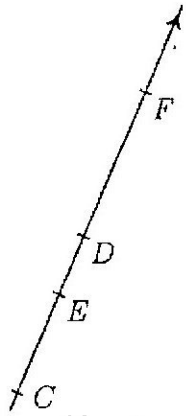
2. Posunutí, otočení

Jednoduché geometrické zobrazení je posunutí. Připomeňme jeho základní vlastnosti. Víte, že posunutí je dáno, jakmile znáte obraz A' jednoho bodu A. Každému bodu X v rovině pak přiřadíme bod X' tak, aby úsečky AA', XX' byly rovnoběžné, stejně dlouhé a aby orientované úsečky AA', XX' měly stejný (orientovaný) směr (obr. 3). Můžeme také říci, že orientované úsečky AA', XX' určují stejný (volný) vektor. Pokud bod X neleží na přímce AA', je $AA'X'X$ rovnoběžník. V každém případě určují i orientované úsečky AX, $A'X'$ stejný vektor, to znamená, že jsou rovnoběžné, stejně dlouhé a stejně orientované.

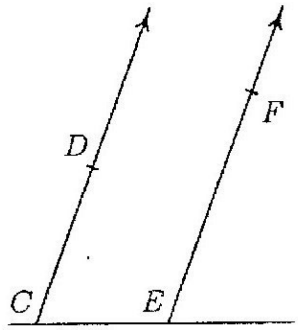


Obr. 3

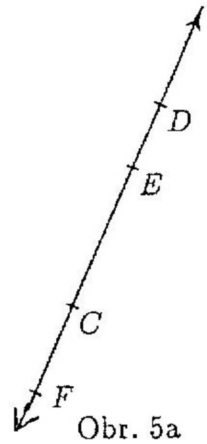
Připomeňme, že o orientované úsečce mluvíme tehdy, když je určeno, který krajní bod je jejím počátečním bodem a který krajní bod je jejím koncovým bodem. Mluvíme-li o orientované úsečce CD, je bod C jejím počátečním a bod D jejím koncovým bodem. Říkáme, že orientované úsečky CD a EF ($C \neq D$, $E \neq F$) mají **stejný (orientovaný) směr**, jestliže jsou úsečky CD, EF spolu rovnoběžné a buď jedna z polopřímek CD, EF obsahuje druhou, nebo polopřímky CD, EF leží na různých přímkách, ale v téže polorovině ohraničené přímkou CE (obr. 4a,b). Nemají-li orientované úsečky CD, EF ($C \neq D$, $E \neq F$) stejný (orientovaný) směr, ale jsou spolu rovnoběžné, říkáme, že mají **opačný směr** (obr. 5a,b).



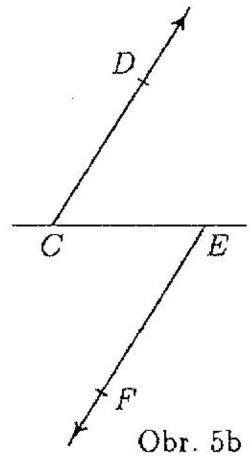
Obr. 4a



Obr. 4b

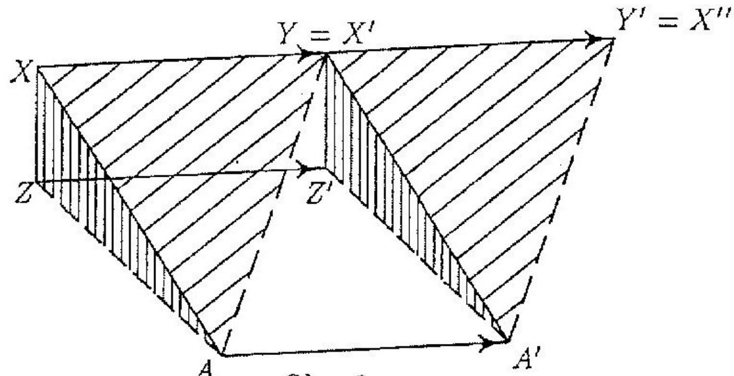


Obr. 5a



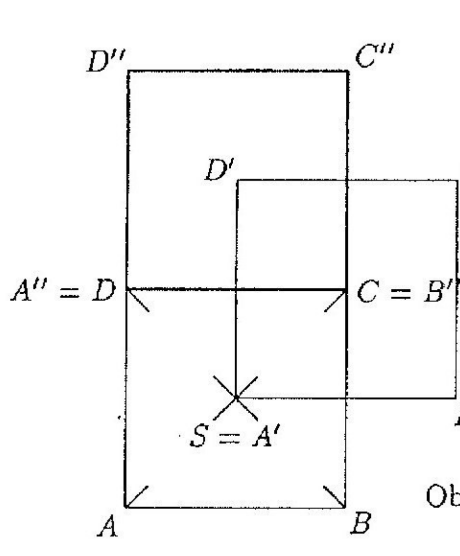
Obr. 5b

Mezi posunutí zahrnujeme také **identitu** – zobrazení, které každému bodu v rovině přiřadí tentýž bod, tedy $X' = X$ pro každý bod X. Víme, že složením dvou posunutí je opět posunutí a že ke každému posunutí existuje posunutí opačné. Zobrazí-li se při posunutí bod X na bod X', zobrazí se při opačném posunutí bod X' na bod X. Složením posunutí a posunutí opačného dostaneme tedy identitu. A ještě jednu důležitou vlastnost posunutí připomeneme. Máme-li posunutí, které není identitou, a zobrazí-li se bod X na bod X', zobrazí se při tomtéž zobrazení bod $Y = X'$ na bod $Y' = X''$, který je různý od bodu X (obr. 6). Vidíme, že při neidentickém posunutí neplatí tvrzení: Zobrazí-li se bod X na bod Y, zobrazí se bod Y na bod X. Musíme tedy vždy rozlišovat vzor a obraz. Zobrazí-li se bod X na bod X', říkáme, že bod X je vzorem bodu X', bod X' je obrazem bodu X. Bod X' je však také vzorem, a to vzorem bodu X''. Každý bod tedy hraje dvojí roli, je obrazem některého bodu a vzorem jiného bodu.



Obr. 6

o **Příklad 4.** V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Sestrojte jeho obraz $A'B'C'D'$ v posunutí, při kterém se zobrazí bod A na bod S. Dále sestrojte obraz $A''B''C''D''$ čtverce $A'B'C'D'$ v posunutí, které zobrazí bod $S = A'$ na bod $A'' = D$. Přesvědčte se, že výsledný čtverec můžeme dostat též jako obraz čtverce $ABCD$ v posunutí, zobrazujícím bod A na bod A'' (obr. 7).

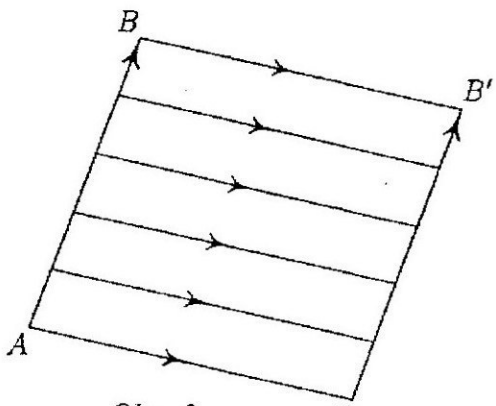


Obr. 7

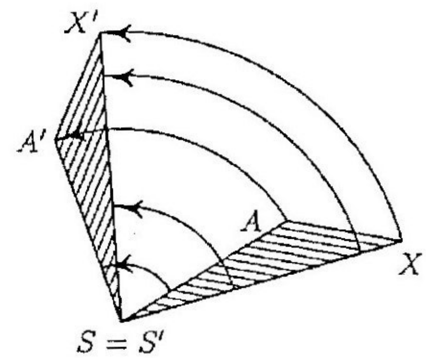
O posunutí si budeme pamatovat:

Jsou-li A, A' dva libovolné body roviny, pak existuje právě jedno posunutí, zobrazující bod A na bod A'. Zobrazí-li se při tomtéž posunutí bod B na bod B', jsou orientované úsečky AB, $A'B'$ rovnoběžné, stejně dlouhé a mají stejný (orientovaný) směr. Je-li ještě obrazem bodu C bod C', je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$.

Obráceně, jsou-li orientované úsečky AB, $A'B'$ rovnoběžné, stejně dlouhé a stejně orientované, existuje posunutí, které zobrazí bod A na bod A' a bod B na bod B' (obr. 8).



Obr. 8

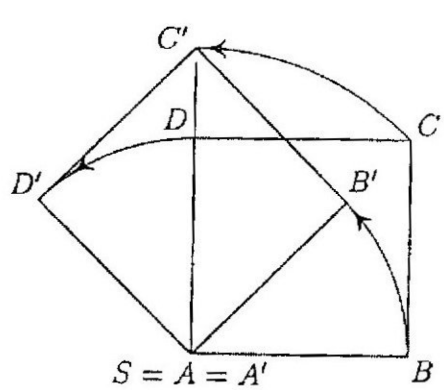


Obr. 9

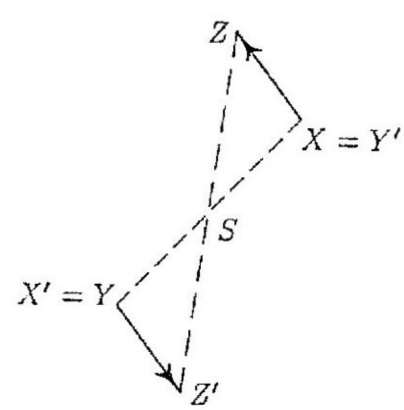
Dalším zobrazením, které znáte, je otočení. Opět připomeneme jeho základní vlastnosti. Otočení je určeno, jakmile známe jeho střed S a obraz A' jednoho bodu $A \neq S$. Pro bod A' musí ovšem platit $|SA'| = |SA|$ (obr. 9). Střed S je bodem samodružným, $S' = S$. Ke každému bodu $X \neq S$ sestrojíme jeho obraz X' tak, aby ležel na kružnici se středem S a poloměrem $|SX|$, aby úhly ASA' a XSX' měly stejnou velikost a aby $|AX| = |A'X'|$. Poslední podmínka nám zaručuje, že smysl otočení polopřímky SA o úhel ASA' do polopřímky SA' je stejný, jako otočení polopřímky SX o tentýž úhel do polopřímky SX'.

o **Příklad 5.** Sestrojte obraz čtverce $ABCD$ v otočení, které má střed S totožný s bodem A a zobrazí bod C do bodu, který leží na polopřímce AD.

Řešení. Obraz C' bodu C má ležet na polopřímce AD, a protože musí platit $|SC'| = |SC|$, jsou bod C', a tím i otočení jednoznačně určeny (obr. 10). Velikost úhlu CSC' je 45°, jde tedy o otočení o 45°.



Obr. 10



Obr. 11

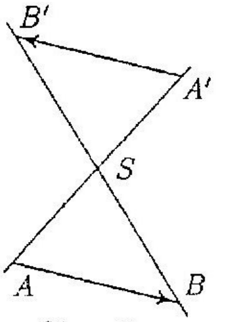
Identické zobrazení považujeme za otočení kolem libovolného bodu o nulový úhel. Při této úmluvě pak platí, že složením dvou otočení o témže středu S je opět otočení se středem S.

Zvláštním případem otočení je otočení o 180°. Při otočení o úhel 180° kolem středu S se každý bod X zobrazí na bod X' souměrně sdružený s bodem X podle středu S, jde tedy o **středovou souměrnost** podle středu S. Tento bod je středem každé úsečky XX', kde X je libovolný bod roviny a X' jeho obraz v této rovině (obr. 11). Obrazem bodu $Y = X'$ je v tomto případě bod $Y' = X$. Při středové souměrnosti nemusíme tedy rozlišovat vzor a obraz. Je-li bod Y obrazem bodu X, je bod X obrazem bodu Y. Každá úsečka XZ se zobrazí na úsečku $X'Z'$, která je stejně dlouhá jako úsečka XZ a orientované úsečky XZ, $X'Z'$ mají opačný směr.

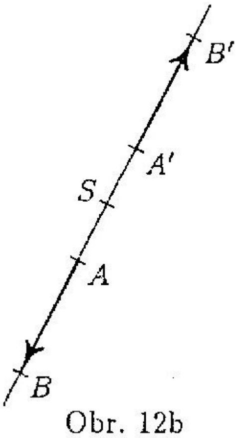
O otočení si budeme pamatovat:

Jsou-li A, A' dva libovolné body roviny a jestliže pro bod S platí $|SA| = |SA'| > 0$, pak existuje právě jedno otočení se středem S zobrazující bod A na bod A'. Zobrazí-li se při něm bod B ($B \neq A$) na bod B', jsou úsečky AB, $A'B'$ stejně dlouhé, a pokud jsou navíc rovnoběžné, tak buď splývají (otočení je identitou), nebo jsou směry orientovaných úseček AB, $A'B'$ opačné (otočení je středovou souměrností). Orientované úsečky AB, $A'B'$ nemohou mít tentýž (orientovaný) směr a nebýt totožné. Zobrazí-li se při otočení body A, B, C po řadě na body A', B', C', je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$.

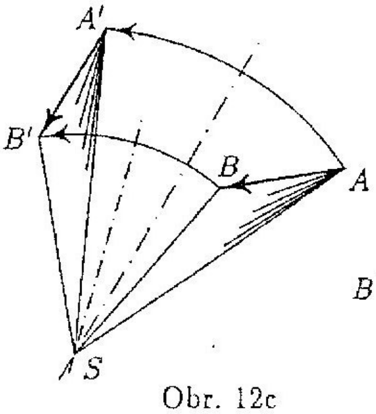
Obráceně, jsou-li orientované úsečky AB, $A'B'$ stejně dlouhé a nemají-li stejný (orientovaný) směr, existuje právě jedno otočení, které zobrazí bod A na bod A' a bod B na bod B'. Jsou-li navíc orientované úsečky AB, $A'B'$ rovnoběžné, a opačných (orientovaných) směrů, je tímto otočením středová souměrnost, středem je střed úsečky AA', který splývá se středem úsečky BB' (obr. 12a, 12b). Nejsou-li úsečky AB, $A'B'$ rovnoběžné, dostaneme střed otočení jako průsečík os úseček AA', BB' (pokud tyto osy nesplývají – obr. 12c), nebo jako průsečík přímek AB, $A'B'$ (splývají-li osy úseček AA', BB' – obr. 12d).



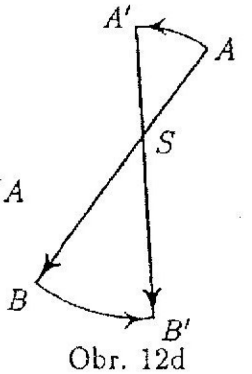
Obr. 12a



Obr. 12b



Obr. 12c



Obr. 12d

Uvedené výsledky o posunutích a otočeních můžeme shrnout: Jsou-li úsečky AB, $A'B'$ shodné, tj. $|AB| = |A'B'|$, existuje právě jedno posunutí nebo otočení f zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'.

---

o **Cvičení 1.** Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte jeho obraz v posunutí zobrazujícím bod A na bod C. Obdržený čtverec zobrazte ve středové souměrnosti podle středu C. V jakém vztahu jsou výsledný čtverec a čtverec $ABCD$?

o **Cvičení 2.** V rovině jsou dány dva různé body S, T. Jaké zobrazení dostaneme složením středové souměrnosti podle středu S a středové souměrnosti podle středu T?

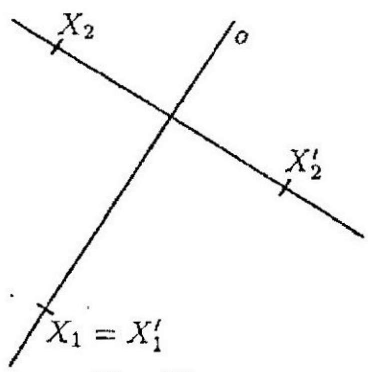
o **Cvičení 3.** Body A, B jsou dva různé body roviny. Každému bodu X roviny přiřadíme bod X' tak, aby střed úsečky BX splynul se středem úsečky AX' (uvažujeme zde i úsečky nulové délky). Jaké zobrazení jsme dostali?

3. Osová souměrnost, posunutá osová souměrnost

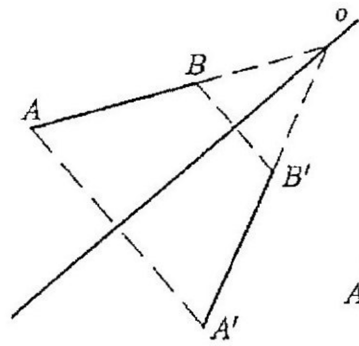
Další typ zobrazení je **osová souměrnost.**

O osové souměrnosti si budeme pamatovat:

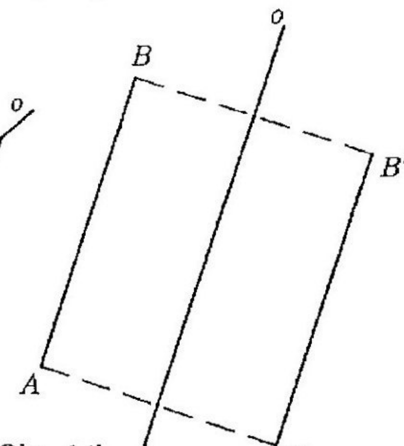
Zvolme v rovině přímku o a přiřaďme každému bodu X roviny bod X' takto: Je-li $X \in o$, je $X' = X$, a pro $X \notin o$ je přímka XX' kolmá na přímku o a střed úsečky XX' leží na přímce o (obr. 13). Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$, přímky AB, $A'B'$ se protínají na přímce o, která se nazývá **osou souměrnosti,** nebo jsou s ní obě rovnoběžné. Osová souměrnost je dána svou osou, nebo také některou dvojicí A, A' vzoru a obrazu, které však nesmějí být totožné. Osou souměrnosti je pak osa úsečky AA' (obr. 14a, 14b).



Obr. 13

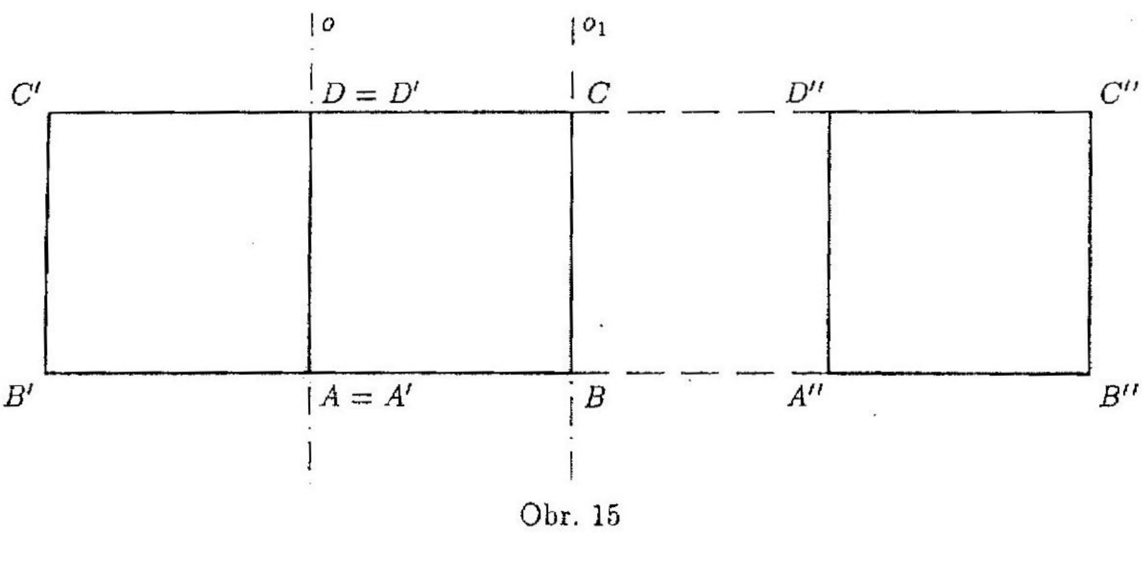


Obr. 14a



Obr. 14b

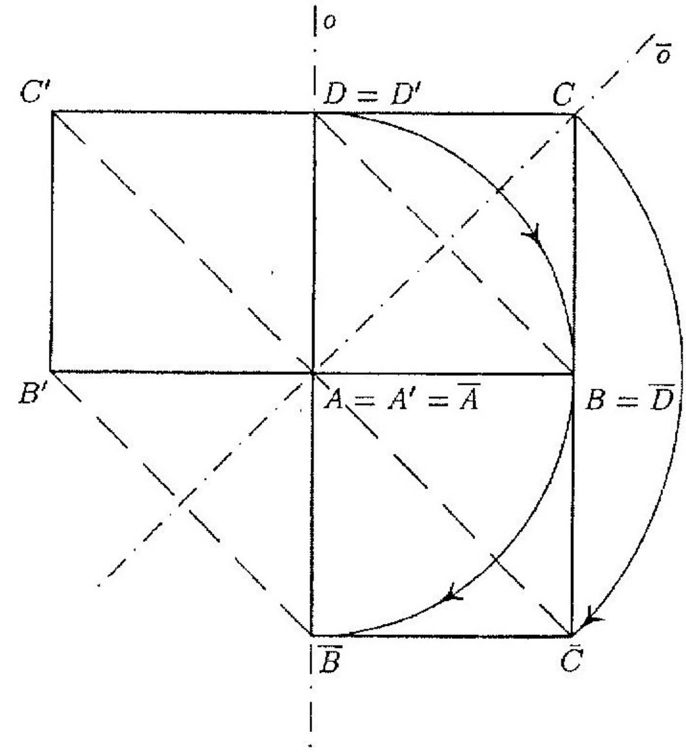
Je-li bod X' obrazem bodu X v osové souměrnosti, je v téže osové souměrnosti obrazem bodu $Y = X'$ bod $Y' = X$. Nemusíme zde tedy opět rozlišovat vzor a obraz.



Obr. 15

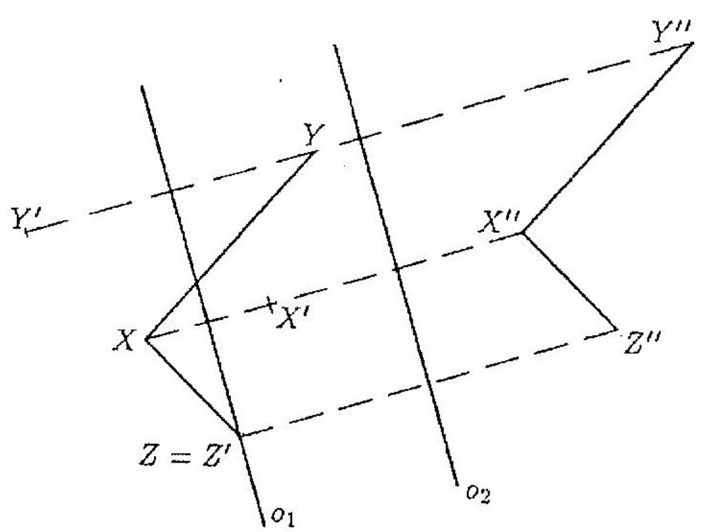
o **Příklad 6.** Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte jeho obraz $A'B'C'D'$ v osové souměrnosti podle osy $o = AD$. Dále sestrojte obraz $A''B''C''D''$ čtverce $A'B'C'D'$ v osové souměrnosti podle osy $o_1 = BC$ (obr. 15). Přesvědčte se, že výsledný čtverec dostanete ze čtverce $ABCD$ posunutím.

o **Příklad 7.** Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte jeho obraz $A'B'C'D'$ v osové souměrnosti podle osy $o = AD$ a pak obraz $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ čtverce $A'B'C'D'$ v osové souměrnosti podle osy $\overline{o} = AC$. Přesvědčte se, že výsledný čtverec dostanete ze čtverce $ABCD$ otočením kolem bodu A o 90° (obr. 16).



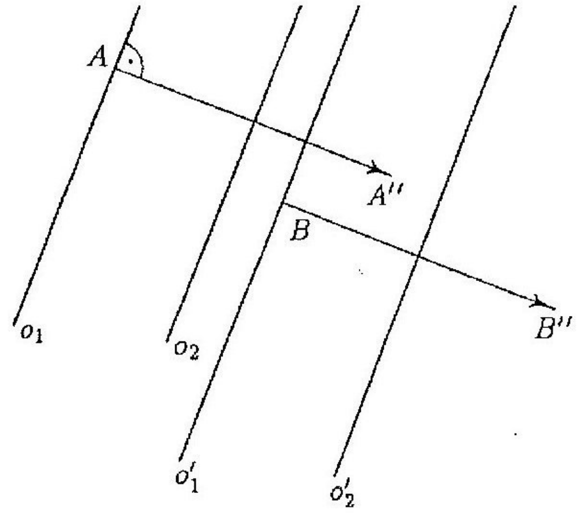
Obr. 16

Výsledek příkladu 6 můžeme zobecnit; dostaneme tak tvrzení: Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je posunutí. Označme o_1 osu první souměrnosti, o_2 osu druhé souměrnosti a předpokládejme, že jsou přímky o_1, o_2 různé a rovnoběžné (obr. 17). Je-li obrazem bodu X v první souměrnosti bod X' a obrazem bodu X' v druhé souměrnosti bod X'', je přímka XX'' kolmá na osu o_1 a $|XX''| = 2d$, kde d značí vzdálenost přímek o_1, o_2. To platí pro každý bod X a jeho obrazy X', X'' nezávisle na tom, kde bod X leží, zda například leží v pásu mezi přímkami o_1, o_2, nebo zda tam neleží. Složené zobrazení přiřazující každému bodu X bod X'' je posunutí, a sice to posunutí, které zobrazí každý bod Z osy o_1 na bod Z'' souměrně sdružený k bodu Z podle přímky o_2. Vidíme, že záleží na pořadí, v jakém obě osové souměrnosti skládáme. V případě, že bychom body zobrazovali nejdříve v osové souměrnosti podle přímky o_2 a pak v osové souměrnosti podle osy o_1, dostali bychom posunutí opačné, tedy posunutí, které by bodu Z'' přiřadilo bod Z. Pokud by byly osy o_1, o_2 totožné, je složené zobrazení samozřejmě identitou.



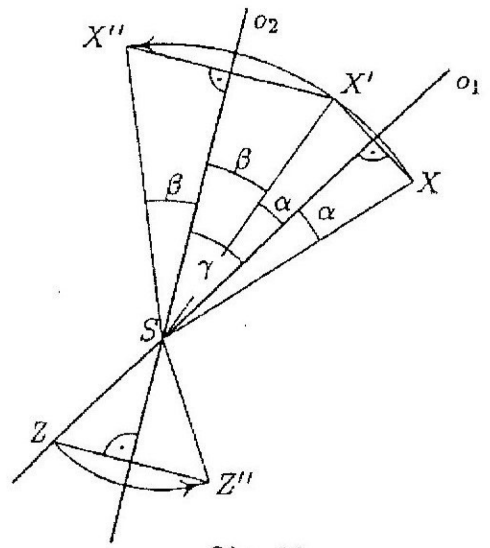
Obr. 17

Ukázali jsme, že složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je posunutí. Můžeme ale též obráceně každé posunutí rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami. Je-li posunutí dáno například bodem A a jeho obrazem A'' ($A'' \neq A$), stačí vzít za přímku o_1 přímku kolmou na přímku AA'' a procházející bodem A, za o_2 osu úsečky AA''. Složením souměrnosti podle osy o_1 se souměrností podle osy o_2 dostaneme právě dané posunutí (obr. 18). Místo o_1, o_2 bychom mohli zvolit jakoukoliv uspořádanou dvojici o_1', o_2' rovnoběžných přímek, kterou bychom dostali z dvojice o_1, o_2 libovolným posunutím. Takže posunutí z příkladu 6 dostaneme též složením souměrností podle přímek $C'B'$ a AD.



Obr. 18

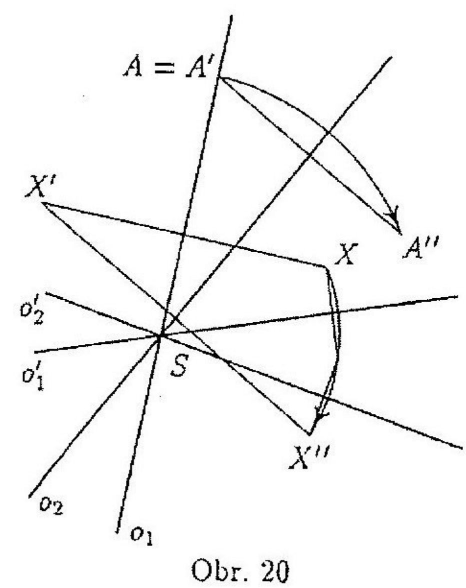
Opět se můžeme pokusit situaci popsanou v příkladu 7 zobecnit a ptát se, co je složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami o_1, o_2 (obr. 19). Na základě rozboru docházíme k závěru, že složením osových souměrností podle osy o_1 a podle osy o_2 je otočení kolem průsečíku S přímek o_1, o_2 o úhel 2γ, kde γ je úhel přímek o_1, o_2, a to otočení v tom smyslu, aby obrazem každého bodu Z přímky o_1 byl bod Z'' souměrně sdružený k bodu Z podle přímky o_2. Opět záleží na pořadí, v jakém souměrnosti skládáme. Kdybychom vzali nejdříve souměrnost podle osy o_2 a složili ji se souměrností podle přímky o_1, dostali bychom otočení kolem téhož středu o tentýž úhel, avšak v opačném smyslu, tedy otočení, při kterém se bod Z'' zobrazí na bod Z. Pouze v případě kolmosti přímek o_1, o_2 nezáleží na pořadí souměrností, složené zobrazení je vždy středová souměrnost podle bodu S.



Obr. 19

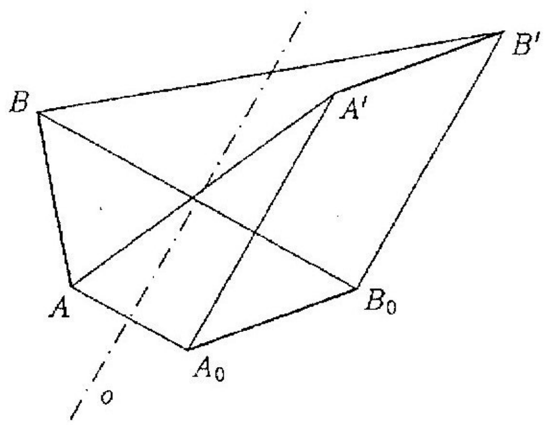
Tak jak jsme složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami dostali otočení, můžeme obráceně každé otočení rozložit na dvě osové souměrnosti. Je-li otočení dáno svým středem S a obrazem A'' bodu $A \neq S$ (obr. 20), můžeme zvolit za osu o_1 přímku AS, za osu o_2 přímku, která je osou úhlu ASA''. Složením osové souměrnosti podle osy o_1 s osovou souměrností podle osy o_2 dostaneme právě dané otočení. Bod S je totiž zřejmě pevný (samodružný) a bod A je při první souměrnosti též pevný, tj. $A' = A$, při druhé souměrnosti se bod A' zobrazí na bod A''.

Místo o_1, o_2 můžeme ovšem vzít libovolnou uspořádanou dvojici o_1', o_2', kterou dostaneme z dvojice o_1, o_2 otočením kolem bodu S o libovolný úhel (obr. 20).



Obr. 20

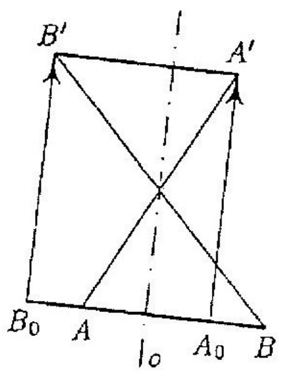
V předchozím článku jsme viděli, že ke stejně dlouhým úsečkám AB, $A'B'$ v rovině existuje právě jedno zobrazení, jež je posunutím nebo otočením a zobrazuje bod A na bod A' a bod B na bod B'. Existuje také osová souměrnost s touto vlastností? Osa o takové souměrnosti by musela procházet středem úsečky AA' i středem úsečky BB'. Sestrojme tedy obraz úsečky AB v osové souměrnosti podle přímky o spojující středy úseček AA', BB' (obr. 21). Dostaneme tak úsečku A_0B_0. Není-li $A' = A_0$, je trojúhelník $AA'A_0$ pravoúhlý a přímky $A'A_0$, $B'B_0$ jsou rovnoběžné s přímkou o, takže $A_0B_0B'A'$ je rovnoběžník. Úsečku $A'B'$ dostaneme z úsečky A_0B_0 posunutím ve směru osy o. Je-li $A' = A_0$, je i $B' = B_0$, a úsečka $A'B'$ je obrazem úsečky AB v osové souměrnosti podle osy o.



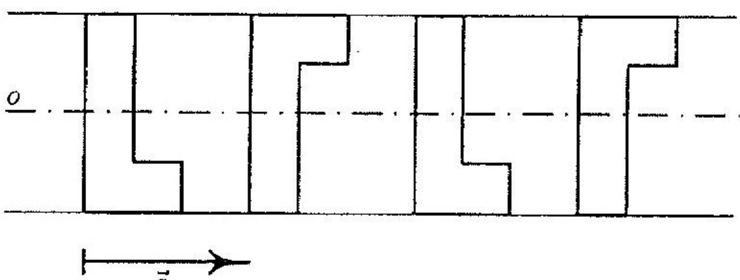
Obr. 21

Promyslete si případ $A = A'$ nebo $B = B'$ a konečně i případ, při kterém splývá střed úsečky AA' se středem úsečky BB' (obr. 22). V tomto případě zvolíme přímku o kolmou na AB. Vždy platí: je-li $|AB| = |A'B'|$, pak jsou A, A' a B, B' dvě dvojice bodů souměrně sdružených podle nějaké přímky o, nebo jsou body A', B' obrazy bodů A_0, B_0 v posunutí ve směru přímky o a A_0, B_0 jsou obrazy bodů A, B v osové souměrnosti podle přímky o. Mluvíme pak o **posunuté osové souměrnosti.**

Platí tedy: Jsou-li úsečky AB, $A'B'$ stejně dlouhé, pak existuje právě jedna osová souměrnost nebo posunutá osová souměrnost (tedy osová souměrnost složená s posunutím ve směru osy) zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'.



Obr. 22



Obr. 23

o **Příklad 8.** Zobrazte písmeno L na obr. 23 v posunuté osové souměrnosti, jež je dána osou o a posunutím o vektor $\vec{a}$ ve směru osy. Zobrazíte-li výsledek v téže osové souměrnosti a budete-li tak stále dál pokračovat, dostanete ornament (obr. 23).

---

o **Cvičení 1.** Posunutá osová souměrnost je složena z osové souměrnosti s osou o a posunutí o vektor $\vec{a}$ ve směru osy. Dokažte, že stejné zobrazení dostaneme, provedeme-li nejdříve posunutí o vektor $\vec{a}$ a pak osovou souměrnost podle osy o.

o **Cvičení 2.** Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte jeho obraz v posunuté osové souměrnosti s osou v přímce BC a vektorem $\overrightarrow{AD}$.

o **Cvičení 3.** Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte obraz tohoto šestiúhelníku podle osy AB a tento pak zobrazte podle osy AC. Totéž proveďte pro osy AC a AD. Porovnejte oba výsledky a zdůvodněte je.

o **Cvičení 4.** Řešte úlohu z cvičení 3 nejprve pro dvojici os AF, BE a pak pro dvojici os BE, CD.

4. Shodná zobrazení

V předchozích odstavcích jsme se seznámili s několika důležitými geometrickými zobrazeními. Byly to identita, posunutí, otočení (speciální případ středová souměrnost), osová souměrnost, posunutá osová souměrnost. Všechna uvedená zobrazení roviny do sebe mají jednu společnou vlastnost – vzdálenost obrazů každých dvou bodů se rovná vzdálenosti těchto dvou bodů. Jinými slovy, úsečka s krajními body A, B je stejně dlouhá jako úsečka s krajními body A', B', což jsou obrazy bodů A, B, tj. úsečka $A'B'$ je shodná s úsečkou AB. Proto se zobrazením s touto vlastností říká **shodnosti** (nebo **shodná zobrazení**).

Je ihned zřejmé, že každá shodnost roviny je zobrazení prosté, jinak by se dva různé body zobrazily na tentýž bod, a nebyla by tedy splněna výše uvedená podmínka shodnosti. Jsou-li dány body A, B, A', B' tak, že $|AB| \neq |A'B'|$, pak samozřejmě neexistuje žádné shodné zobrazení, které by zobrazovalo bod A na bod A' a bod B na bod B'. Je-li obráceně $|AB| = |A'B'|$, existují shodná zobrazení, zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'. V kapitole 2 jsme ukázali, že jedním takovým zobrazením je posunutí nebo otočení, a v kapitole 3 jsme též ukázali, že existuje taková osová souměrnost nebo posunutá osová souměrnost.

Vidíme, že vždy existují dvě shodná zobrazení roviny, při kterých se daná orientovaná úsečka AB v dané rovině zobrazí na orientovanou úsečku $A'B'$ téže délky, ležící v téže rovině jako úsečka AB. Ukážeme, že to jsou všechna shodná zobrazení, zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'.

Je-li X další bod uvažované roviny, je $|AB| \leq |AX| + |BX|$ a zároveň $|AB| \geq ||AX| - |BX||$. V první nerovnosti platí rovnost právě tehdy, když je bod X bodem úsečky AB, ve druhé nerovnosti platí rovnost právě tehdy, když bod X leží na přímce AB a není vnitřním bodem úsečky AB. Protože každá shodnost zobrazuje každou úsečku na úsečku shodné délky, zobrazí se při ní body přímky AB na body přímky $A'B'$, kde A', B' jsou obrazy bodů A, B.

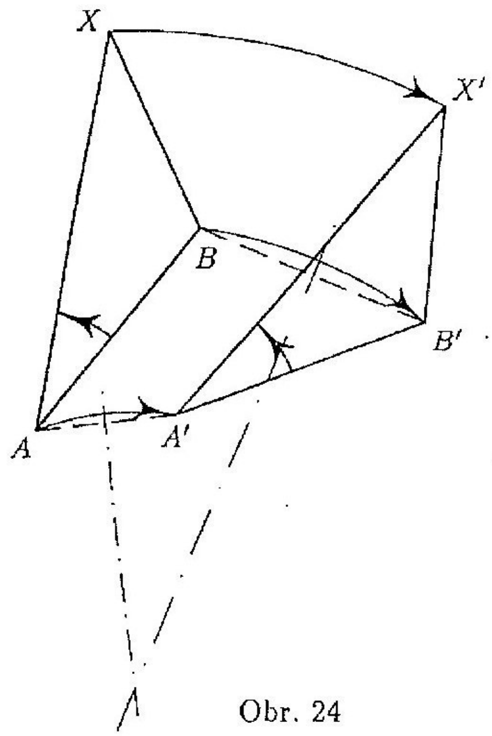
Neleží-li bod X na přímce AB, existují dva body X', pro které platí $|AX| = |A'X'|$ a zároveň $|BX| = |B'X'|$. Jeden z nich je obrazem bodu X v otočení nebo posunutí, při kterém se orientovaná úsečka AB zobrazí na orientovanou úsečku $A'B'$, druhý je k němu souměrně sdružený podle přímky $A'B'$, a je tudíž obrazem bodu X v zobrazení, jež je složením uvedeného otočení nebo posunutí a osové souměrnosti.

Můžeme tedy shrnout: Jsou-li v rovině dány body A, B, A', B' tak, že $|AB| = |A'B'|$, pak existují právě dvě shodnosti této roviny, při kterých se zobrazí bod A na bod A' a bod B na bod B'. Jedna z nich je otočení nebo posunutí, říkáme jí **shodnost přímá** (obr. 24), druhá je osová souměrnost nebo posunutá osová souměrnost, říkáme jí **shodnost nepřímá** (obr. 25).

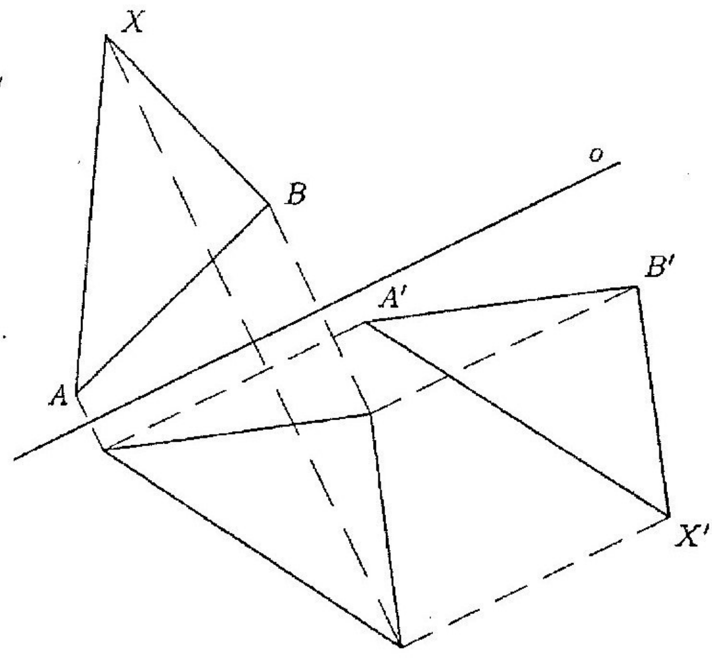
Nyní se přesvědčíme o tom, že shodnost v rovině je zobrazení této roviny na sebe. Nechť se totiž dva různé body A, B zobrazí v dané shodnosti na body A', B'. Vezměme nejprve bod Y, který leží na přímce $A'B'$. Protože $|AB| = |A'B'|$, existuje bod X v naší rovině tak, že $|AX| = |A'Y|$, $|BX| = |B'Y|$ a bod X je vzorem bodu Y v uvažované shodnosti. Nyní vezměme bod Y, který neleží na přímce $A'B'$. Pak existují dva body X v rovině, pro které jsou trojúhelníky ABX a $A'B'Y$ shodné. Ale jen právě jeden z bodů X je vzorem bodu Y.

Tím jsme dokázali, že každé shodné zobrazení je zobrazení celé roviny na tutéž rovinu.

Přidáme-li k předchozí úvaze poznatek, že každá shodnost je zobrazení prosté, můžeme říci, že každá shodnost je vzájemně jednoznačné zobrazení roviny na sebe.



Obr. 24



Obr. 25

Dále tedy platí, že ke každé shodnosti existuje zobrazení inverzní, které je též shodností. Co je inverzním zobrazením k danému posunutí, k danému otočení, k dané osové souměrnosti, k dané posunuté osové souměrnosti?

Další poznatek o shodnostech vyplývá z předchozích úvah. A sice: úsečka se shodným zobrazením zobrazí na úsečku, přímka na přímku, shodností se zachová rovnoběžnost přímek, zachová se velikost úhlů.

Důležitým pojmem jsou tzv. **samodružné body zobrazení**. Jedná se o body, které se v daném zobrazení zobrazí samy na sebe. **Samodružné útvary** jsou útvary, které se zobrazí samy na sebe; v tomto případě mohou však být jen některé body útvaru samodružné nebo dokonce žádný bod samodružný. Jako příklad uveďme: střed otočení je samodružný bod v tomto otočení, každý bod osy osové souměrnosti je samodružný v této souměrnosti, každá přímka kolmá na osu osové souměrnosti je samodružná (ale má jen jeden samodružný bod), každá přímka rovnoběžná s vektorem posunutí je samodružná (ale nemá ani jeden bod samodružný, pokud se nejedná o identitu).

Sami nyní určete všechny samodružné body všech typů shodných zobrazení a najděte též příklady dalších samodružných útvarů v těchto shodných zobrazeních, hlavně hledejte samodružné přímky.

V geometrii se také určují **samodružné směry**. Přitom o rovnoběžných přímkách říkáme, že mají stejný (neorientovaný) směr. Rovnoběžné přímky se shodností zobrazí na rovnoběžné přímky. Pokud se přímka zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou, říkáme, že její (neorientovaný) směr je samodružný. V identitě a posunutí jsou všechny směry samodružné, v otočení (které není středovou souměrností) není samodružný žádný směr, ve středové souměrnosti jsou samodružné všechny směry, v osové souměrnosti a v posunuté osové souměrnosti jsou samodružné dva směry (kolmý na osu a rovnoběžný s osou).

Shodná zobrazení lze klasifikovat podle počtu samodružných bodů v rovině a podle samodružných směrů. To ukazuje následující tabulka.

	0 samodružných směrů	2 navzájem kolmé samodružné směry	všechny směry samodružné
0 samodružných bodů		posunutá osová souměrnost	posunutí (ne identita)
1 samodružný bod	otočení (ne identita a střed. souměrnost)		středová souměrnost
přímka samodružných bodů		osová souměrnost	
rovina samodružných bodů			identita

V následujícím odstavci se budeme zabývat shodností trojúhelníků. Řekněme si obecně, že dva útvary P_1, P_2 jsou shodné, právě když existuje shodnost, která zobrazí útvar P_1 na útvar P_2.

---

o **Cvičení 1.** Nechť p je přímka. Určete všechny posunuté osové souměrnosti s nenulovým vektorem posunutí, v nichž je tato přímka samodružná.

o **Cvičení 2.** Nechť A, B jsou dva různé body. Určete (vzhledem k inkluzi) nejmenší množinu P, která je samodružná v každém otočení se středem v B a patří do ní bod A.

o **Cvičení 3.** Je dán čtverec $ABCD$. Udělejte přehled o všech shodnostech, které zobrazují čtverec $ABCD$ na sebe.

o **Cvičení 4.** Představme si celou rovinu pokrytou beze zbytku nepřekrývajícími se pravidelnými šestiúhelníky; nazvěme toto šestiúhelníkovou sítí v rovině. Určete příklady shodností, v nichž je tato síť samodružná.

o **Cvičení 5.** Nechť f je shodnost a nechť A, B, C jsou tři různé body neležící v přímce, pro něž je $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$. O jaké zobrazení se jedná?

o **Cvičení 6.** Dokažte:

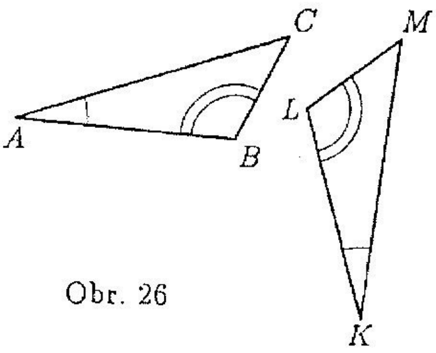
a) Každý útvar P v rovině je shodný sám se sebou.
b) Je-li útvar P_1 shodný s útvarem P_2, je P_2 shodný s P_1.
c) Je-li útvar P_1 shodný s útvarem P_2 a P_2 shodný s útvarem P_3, je P_1 shodný s P_3.

5. Shodnost trojúhelníků

Podle definice jsou trojúhelníky ABC a KLM právě tehdy shodné, když existuje shodné zobrazení zobrazující bod A na bod K, bod B na bod L a bod C na bod M. Píšeme pak $\Delta\, ABC \cong \Delta\, KLM$.

Všimněte si, že pokud mluvíme jen o trojúhelníku ABC, nezáleží na pořadí vrcholů trojúhelníku, trojúhelník ABC je stejný jako trojúhelník BAC. Řekneme-li však, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM, záleží na pořadí vrcholů! Chceme tím totiž říci, že existuje shodné zobrazení, v němž se body A, B, C v tomto pořadí zobrazí na body K, L, M:

$$\begin{array}{cccc} \Delta & A & B & C \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \Delta & K & L & M \end{array}$$



Obr. 26

Platí-li, že $\Delta ABC \cong \Delta KLM$, nemusí platit, že $\Delta BAC \cong \Delta KLM$. Existuje-li totiž shodné zobrazení, v němž se body A, B, C zobrazí po řadě na body K, L, M, je například nutně $|AC| = |KM|$, nemusí však platit $|BC| = |KM|$, a tudíž nemusí existovat shodné zobrazení zobrazující bod B na bod K a bod C na bod M.

Víme, že každé shodné zobrazení zachovává nejen délky úseček, ale že se zachovávají i velikosti úhlů. Jsou-li proto trojúhelníky ABC a KLM shodné, platí (obr. 26)

$$|AB| = |KL|, \qquad |BC| = |LM|, \qquad |CA| = |MK|, \tag{1}$$

ale zároveň i

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|, \qquad |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle LMK|, \qquad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|. \tag{2}$$

Chceme-li obráceně dokázat, že jsou trojúhelníky ABC a KLM shodné, nemusíme ověřit, že jsou splněny vztahy (1) a (2). Stačí například dokázat, že platí vztahy (1). Platí-li totiž $|AB| = |KL|$, víme, že pak existují právě dvě shodná zobrazení roviny ABC na rovinu KLM, při kterých se bod A zobrazí na bod K a bod B na bod L. Ze vztahů $|BC| = |LM|$, $|AC| = |KM|$ pak plyne, že právě jedno z nich zobrazuje bod C na bod M.

Tím jsme si vlastně připomněli platnost věty, kterou již známe jako:

Věta (*sss*): *Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve všech třech stranách.*

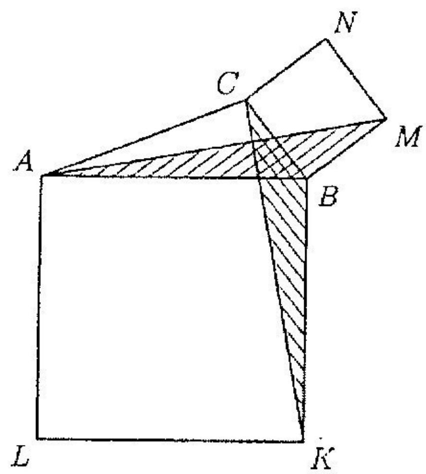
Připomeňme ještě další známé věty o shodnosti trojúhelníků:

Věta (*sus*): *Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.*

Věta (*usu*): *Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují v jedné straně a úhlech k ní přilehlých.*

Věta (*Ssu*): *Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich.*

o **Příklad 9.** Je dán trojúhelník ABC, úhel ABC není pravý. Nad stranou AB je sestrojen čtverec $ABKL$, který neleží v polorovině ABC. Podobně nad stranou BC je sestrojen čtverec $CBMN$, který neleží v polorovině CBA. Dokažte, že trojúhelníky ABM a KBC jsou shodné.



Obr. 27

Řešení. Je $|AB| = |KB|$, protože $ABKL$ je čtverec (obr. 27). Dále je $|BM| = |BC|$, protože $BCNM$ je čtverec. Konečně je $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle KBC|$.

Trojúhelníky ABM a KBC jsou shodné podle věty (*sus*). Tento postup platí však jen v tom případě, když je úhel ABC ostrý. Nakreslete sami obrázek analogický k obr. 27, ve kterém je úhel ABC tupý, a upravte popsaný důkaz pro tento případ. Je-li úhel ABC pravý, což jsme vyloučili, netvoří body A, B, M trojúhelník.

Věta (*sus*) o shodnosti trojúhelníků říká, že dva shodné trojúhelníky mají stejně dlouhé příslušné strany. Je možné říci, že jde vlastně o jeden tvar trojúhelníku. Tento tvar je jednoznačně určen třemi čísly udávajícími délky stran. Stejné je to v případě ostatních vět o shodnosti trojúhelníků. Proto se těmto větám také říká **věty o určenosti trojúhelníků**.

Jaká je ale podmínka pro to, aby vůbec trojúhelník existoval? Jednou takovou podmínkou je tzv. **trojúhelníková nerovnost**, která říká, že součet délek kterýchkoli dvou stran trojúhelníku musí být větší než délka třetí strany. V trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c tedy musí platit všechny tři nerovnosti

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b.$$

Tyto podmínky můžeme také psát ve tvaru

$$a - b < c, \qquad b - a < c, \qquad c < a + b,$$

nebo také ve tvaru

$$|a - b| < c < a + b.$$

---

o **Cvičení 1.** Na základě vět (*sus*), (*usu*) a (*Ssu*) vyslovte věty o shodnosti pravoúhlých trojúhelníků s využitím toho, že se tyto trojúhelníky shodují v pravém úhlu.

o **Cvičení 2.** Ukažte příklad dvou trojúhelníků, které se shodují ve dvou stranách a v jednom úhlu a nejsou shodné. Tím dokážete, že ve větě (*Ssu*) není možné zaměnit slova „proti větší z nich" slovy „proti jedné z nich".

o **Cvičení 3.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, D je střed jeho přepony AB a S je střed kružnice trojúhelníku vepsané. Je-li $|CS| = |DS|$, pak má jeden z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC velikost 30°. Dokažte.

o **Cvičení 4.** Nad stranami AC a BC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACD a BCE tak, že každý z nich leží vně trojúhelníku ABC. Dokažte, že je $\Delta\, AEC \cong \Delta\, DBC$.

o **Cvičení 5.** Nechť $ABCD$ je čtverec, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S. Uvnitř úsečky SD zvolte bod P, potom k přímce AP veďte kolmici bodem B a její průsečík s úhlopříčkou AC označte Q. Dokažte, že je $\Delta\, ABP \cong \Delta\, BCQ$.

o **Cvičení 6.** Dokažte, že trojúhelník se stranami délek a, b, c existuje, právě když platí $\left|c^2 - a^2 - b^2\right| < 2ab$ (což je ekvivalentně vyjádřená trojúhelníková nerovnost).

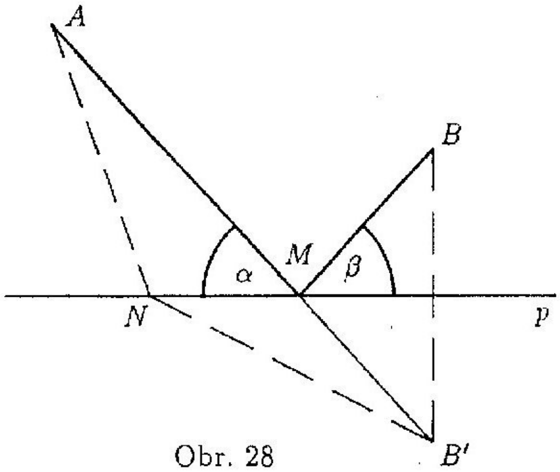
o **Cvičení 7.** Dokažte, že pro délky těžnic t_a, t_b, t_c a délky stran a, b, c trojúhelníku ABC platí nerovnost $\frac{3}{4}\left(t_a + t_b + t_c\right) < a + b + c$.

6. Využití shodností v konstrukčních úlohách

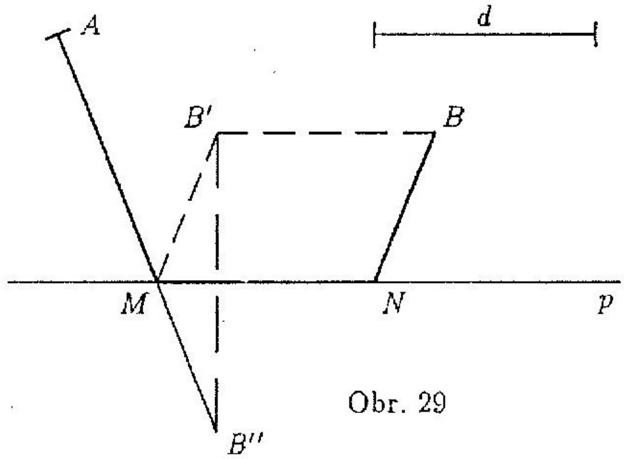
Shodná zobrazení se s výhodou použijí při řešení konstrukčních úloh. Ve všech následujících příkladech uvažujeme jen řešitelné situace.

o **Příklad 10.** Je dána přímka p a dva různé body A, B ležící uvnitř jedné poloroviny ohraničené přímkou p. Na přímce p určete bod M tak, aby délka lomené čáry AMB byla co nejmenší.

Řešení. Například bod B zobrazíme v osové souměrnosti s osou p; dostaneme bod B' Hledaný bod M je průsečík přímky p a přímky AB'. Platí $|AM| + |MB| = |AM| + |MB'| = |AB'|$, neboť bod M leží na úsečce AB'. Pro každý bod N přímky p různý od bodu M totiž platí $|AN| + |NB| = |AN| + |NB'| > |AB'|$, což je důsledek trojúhelníkové nerovnost (obr. 28). Všimněte si navíc, že úhly α, β jsou shodné.



Obr. 28



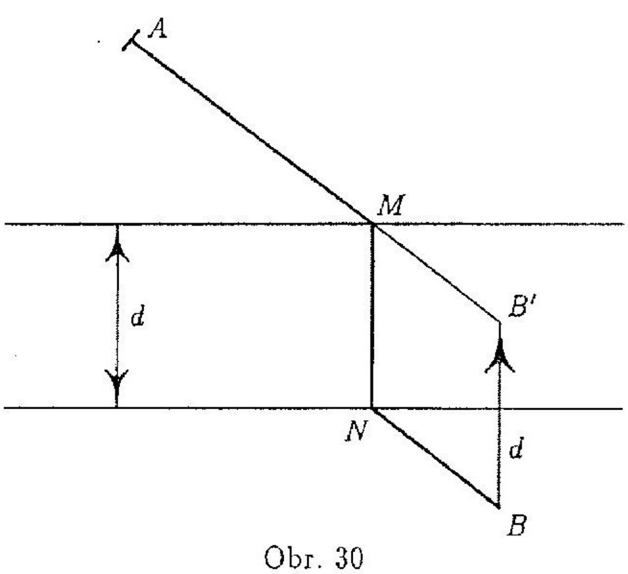
Obr. 29

o **Příklad 11.** Je dána přímka p, dále dva různé body A, B ležící uvnitř jedné poloroviny ohraničené přímkou p a číslo $d > 0$. Najděte na přímce p body M, N tak, aby délka lomené čáry $AMNB$ byla co nejmenší a aby $|MN| = d$.

Řešení. Posuneme bod B rovnoběžně s přímkou p o délku d blíž k bodu A do bodu B', bod B' pak zobrazíme osově souměrně podle přímky p na bod B'' (obr. 29). Bod M vznikne jako průsečík přímky p a přímky AB''. Bod N najdeme na přímce p tak, aby $|MN| = d$ a aby vektory $\overrightarrow{MN}$ a $\overrightarrow{B'B}$ byly souhlasně orientované; potom jsou též vektory $\overrightarrow{MB'}$ a $\overrightarrow{NB}$ souhlasně orientované a stejně dlouhé. Využili jsme posunuté osové souměrnosti.

o **Příklad 12.** Na různých rovnoběžných březích řeky jsou dvě města A, B. Určete, kde je třeba sestrojit kolmo na tok řeky most, aby silnice spojující města A, B měla nejkratší délku.

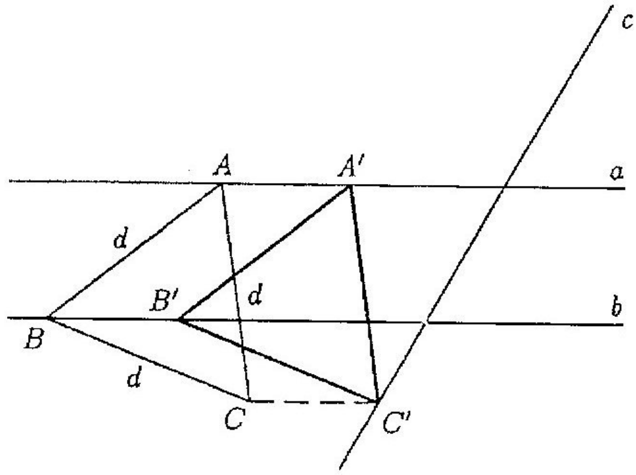
Řešení. Z obr. 30 je patrná konstrukce bodu B' (posunutí o šířku d řeky) a následně konstrukce mostu MN.



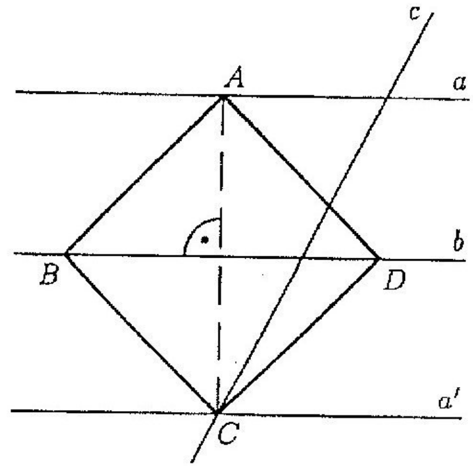
Obr. 30

o **Příklad 13.** Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b a přímka c s nimi různoběžná. Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož strana má délku d a každý jeho vrchol leží na jedné z daných přímek, každý vrchol na jiné.

Řešení. Sestrojíme libovolný rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky d tak, že bod A leží na přímce a, bod B na přímce b. Tento trojúhelník rovnoběžně posuneme s přímkou a tak, aby obraz C' bodu C byl bodem přímky c. Získáme hledaný trojúhelník $A'B'C'$. Jeden takový trojúhelník je na obr. 31. Kolik může mít úloha řešení?



Obr. 31



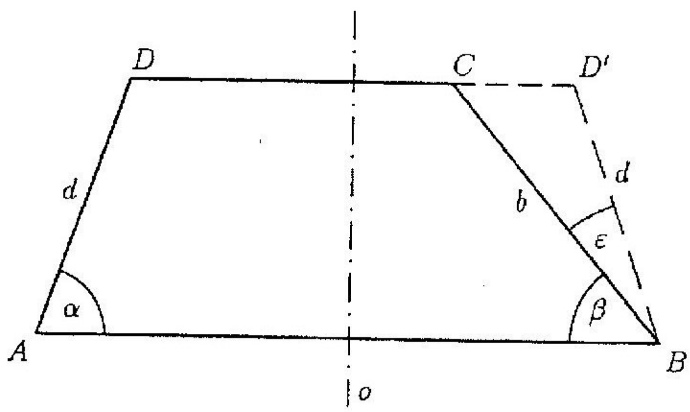
Obr. 32

o **Příklad 14.** Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b a přímka c s nimi různoběžná. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce a, bod C na přímce c a úhlopříčka BD na přímce b.

Řešení. Sestrojíme přímku a' osově souměrnou s přímkou a podle přímky b. Tím získáme bod C jako průsečík přímek a', c. Body A, B, D doplníme podle obr. 32.

o **Příklad 15.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ o základnách AB, CD, znáte-li délky b, c, d jeho stran a velikost úhlu $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$.

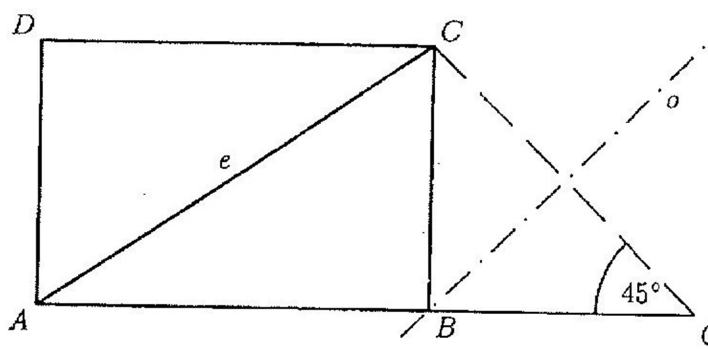
Řešení. Podle obr. 33 sestrojíme nejprve trojúhelník $BD'C$, ve kterém známe délky stran b, d a úhel ε. Potom doplníme na lichoběžník $ABCD$. Využili jsme osové souměrnosti s osou o strany AB.



Obr. 33

o **Příklad 16.** Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož obvod je o a jehož úhlopříčka má délku e.

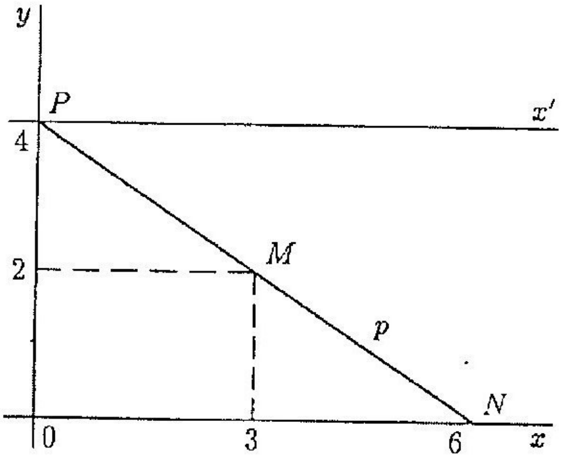
Řešení. Nejprve sestrojíme trojúhelník $AC'C$ (obr. 34) – známe velikost úhlu při vrcholu C' a délky stran AC a AC' (ta má délku $\frac{o}{2}$). Dále sestrojíme osu o strany CC', čímž získáme bod B. Pak už jen doplníme bod D.



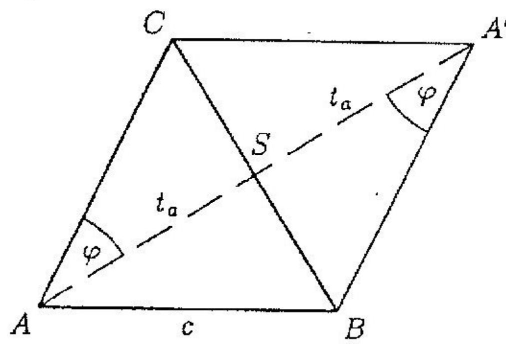
Obr. 34

o **Příklad 17.** V kartézské soustavě souřadnic je dán bod $M[3; 2]$. Bodem M veďte přímku p, která protne osu x v bodě N a osu y v bodě P tak, aby platilo $|MN| = |MP|$.

Řešení. Využijeme středové souměrnosti se středem M. V této souměrnosti se přímka x zobrazí na přímku x'. Bod P je průsečíkem osy y a přímky x'. Konstrukce přímky p a bodu N je již zřejmá z obr. 35.



Obr. 35



Obr. 36

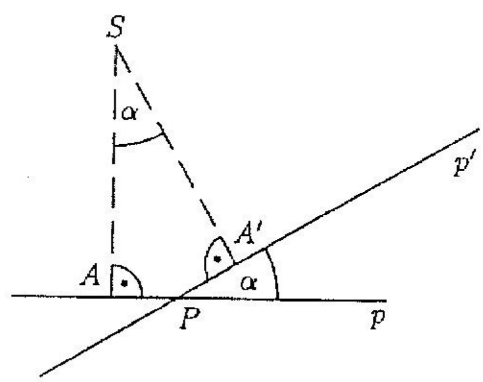
o **Příklad 18.** Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li délku strany c, těžnice t_a a úhel φ mezi těžnicí t_a a stranou AC.

Řešení. Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $ABA'C$. Z obr. 36 vidíme, že nejprve sestrojíme trojúhelník ABA'. Potom doplněním na rovnoběžník snadno získáme bod C. Je zde využito středové souměrnosti se středem S (střed strany BC).

o **Příklad 19.** Je dána přímka p a bod S, který neleží na přímce p. Otočením přímky p kolem bodu S o úhel $\alpha = 30°$ vznikne přímka p'. Jaký je úhel přímek p, p'?

Řešení. Označme P průsečík přímek p, p', dále písmeny A, A' paty kolmic z bodu S na přímky p, p' (obr. 37). Platí rovnost $|\sphericalangle APA'| = 180° - \alpha$. Proto úhel přímek p, p' je roven $\alpha = 30°$.

Poznámka. Otočíme-li přímku p o úhel α, $0° \le \alpha \le 180°$, kolem bodu S, získáme přímku p'; obě přímky svírají úhel α, je-li $\alpha \le 90°$, a úhel $180° - \alpha$, je-li $\alpha \ge 90°$.



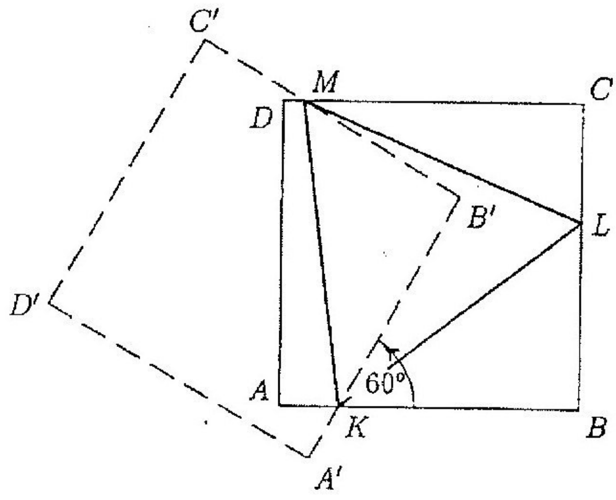
Obr. 37

o **Příklad 20.** Je dán trojúhelník ABC, úhel ABC není pravý. Nad stranami AB, BC jsou sestrojeny čtverce $ABKL$, $CBMN$ tak, že leží vně trojúhelníku ABC. Dokažte, že $|KC| = |AM|$ a přímka KC je kolmá na přímku AM.

Řešení. Jedna část tohoto příkladu byla vyřešena v příkladu 9 pomocí shodných trojúhelníků. Zde je příklad řešen jiným způsobem. Podívejme se na obr. 27. Uvažujme to otočení kolem bodu B o 90°, v němž se bod A zobrazí na bod K; bod M se pak zobrazí na bod C, tj. úsečka AM se zobrazí na úsečku KC a jelikož se jedná o shodné zobrazení, je $|KC| = |AM|$. Dále podle předchozího příkladu svírá původní a otočená úsečka úhel 90°.

o **Příklad 21.** Je dán čtverec $ABCD$ a vnitřní bod K strany AB. Vepište do čtverce rovnostranný trojúhelník KLM.

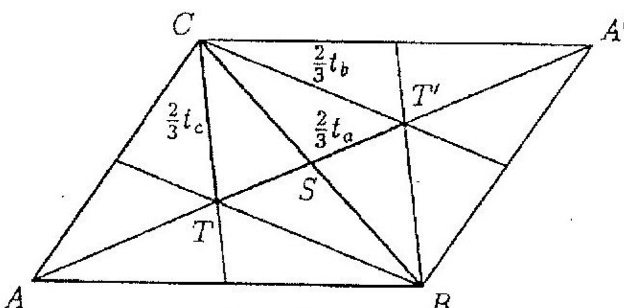
Řešení. Otočíme čtverec $ABCD$ kolem bodu K o 60°. Bod M vznikne jako průsečík hranice čtverce $ABCD$ a jeho obrazu $A'B'C'D'$ (obr. 38). Zpětným otočením bodu M získáme bod L.



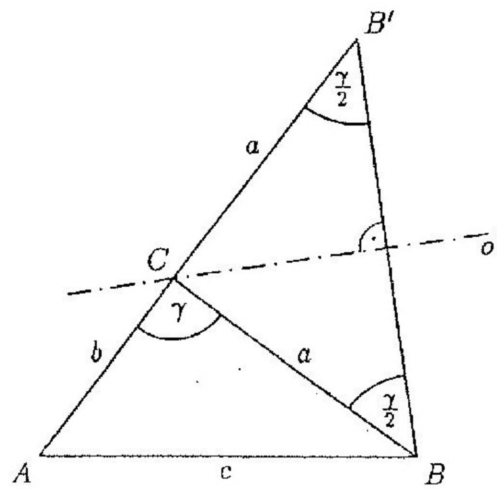
Obr. 38

o **Příklad 22.** Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li délky jeho těžnic.

Řešení. Trojúhelník ABC zobrazíme ve středové souměrnosti se středem S, který je např. ve středu strany BC (obr. 39). Vznikne trojúhelník CTT', kde T je těžiště trojúhelníku ABC, T' jeho obraz v uvažované středové souměrnosti. Tedy nejprve sestrojíme trojúhelník CTT' s délkami stran, které jsou rovny dvěma třetinám zadaných délek těžnic a pak již bez obtíží sestrojíme trojúhelník ABC.



Obr. 39



Obr. 40

o **Příklad 23.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka c, součet délek $a + b$ a úhel γ.

Řešení. Nejprve sestrojíme trojúhelník ABB' z prvků c, $a + b$, $\frac{\gamma}{2}$. Potom osa strany BB' protne stranu AB' v bodě C (obr. 40).

---

o **Cvičení 1.** Na kulečníkovém stole jsou dvě koule A, B. Určete směr koule A, aby po odraze

a) na jedné stěně,
b) na dvou sousedních stěnách,
c) na dvou protilehlých stěnách,
d) na třech stěnách

narazila do koule B.

o **Cvičení 2.** Jsou dány různoběžky a, b a úsečka MN. Sestrojte úsečku AB stejně dlouhou a rovnoběžnou s úsečkou MN tak, aby bod A ležel na přímce a a bod B na přímce b.

o **Cvičení 3.** Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dán součet $e + f$ délek úhlopříček a úhel α.

o **Cvičení 4.** Je dána kružnice k se středem S, její tečna t a bod M ležící v polorovině tS. Sestrojte přímku p procházející bodem M tak, aby protnula tečnu v bodě N a kružnici v bodě P a aby $|MN| = |MP|$.

o **Cvičení 5.** Jsou dány kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte přímku q rovnoběžnou s přímkou p, aby vytínala v obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.

o **Cvičení 6.** Je dán rovnostranný trojúhelník a uvnitř něho bod M. Součet vzdáleností bodu M od jeho stran je roven výšce trojúhelníku. Dokažte.

o **Cvičení 7.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno
a) délky základen a, c, délky úhlopříček e, f,
b) délky stran a, b, c, d.

o **Cvičení 8.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno
a) $a + b$, c, výška v_a,
b) $a + b + c$, úhly α, β.

o **Cvičení 9.** Je dán čtverec $ABCD$ a uvnitř strany AB bod M. Sestrojte obdélník $MNPQ$ ($|MN| \neq |NP|$), jehož každý vrchol leží na jiné straně čtverce.

o **Cvičení 10.** V kartézské soustavě souřadnic s počátkem v bodě P a s osami x, y je dán bod $A[3; 2]$. Sestrojte na ose x bod Q tak, aby délka lomené čáry PQA byla 8 jednotek.

o **Cvičení 11.** Jsou dány tři různé body A, B, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$ tak, aby měl střed S a aby bod A ležel na přímce MN a bod B na přímce PQ.

o **Cvičení 12.** Jsou dány soustředné kružnice k_1, k_2 s poloměry $r_1 > r_2$ a na kružnici k_1 bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod B ležel na kružnici k_1 a bod C na kružnici k_2.

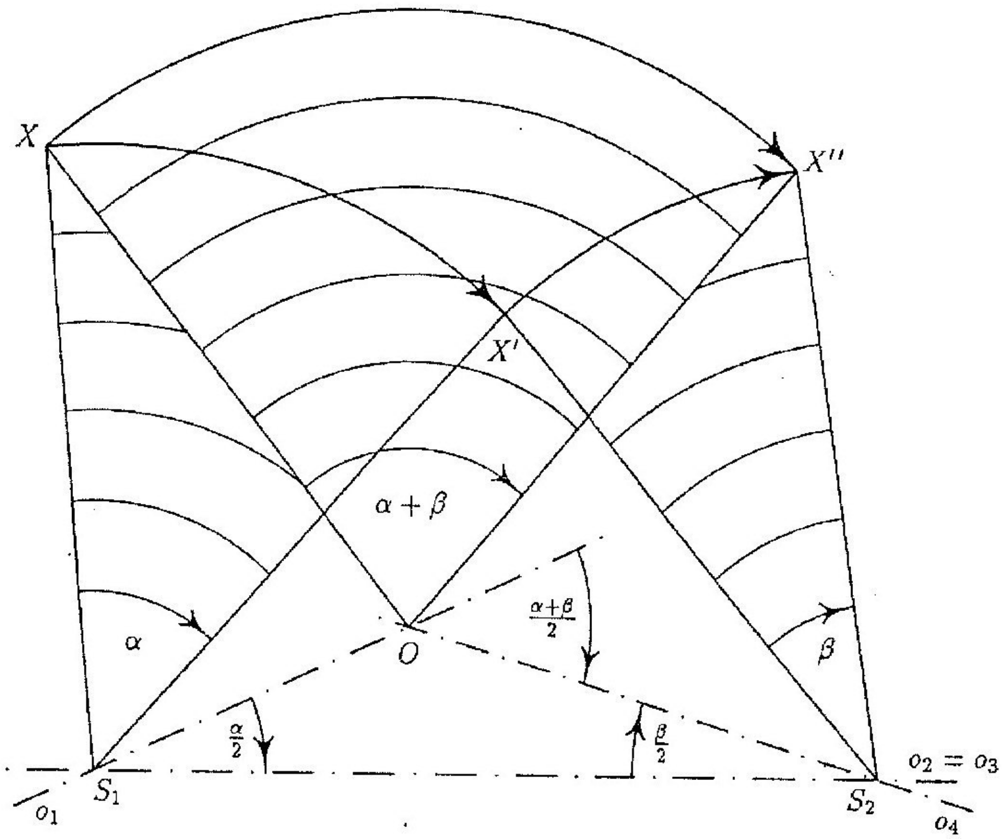
7. Skládání shodných zobrazení

Přímo z definice shodnosti plyne, že složením dvou shodností je opět shodnost. Zobrazí-li se totiž body X, Y v první shodnosti na body X', Y' a tyto body v druhé shodnosti na body X'', Y'', je $|X'Y'| = |XY|$ (neboť první zobrazení je shodnost) a také $|X''Y''| = |X'Y'|$ (neboť druhé zobrazení je shodnost). Pak je ale též $|X''Y''| = |XY|$, a protože to platí pro každé dva body X, Y, je složené zobrazení shodnost.

Zatím jsme poznali tato shodná zobrazení roviny:

posunutí – dá se složit ze dvou osových souměrností,
otočení – dá se rovněž složit ze dvou osových souměrností (zvláštním případem je **středová souměrnost**),
osová souměrnost,
posunutá osová souměrnost – dá se složit z osové souměrnosti a posunutí, a tedy též ze tří osových souměrností,
identita – dá se složit ze dvou totožných osových souměrností, považujeme ji za zvláštní případ posunutí (posunutí o nulový vektor) i za zvláštní případ otočení (kolem libovolného bodu o nulový úhel).

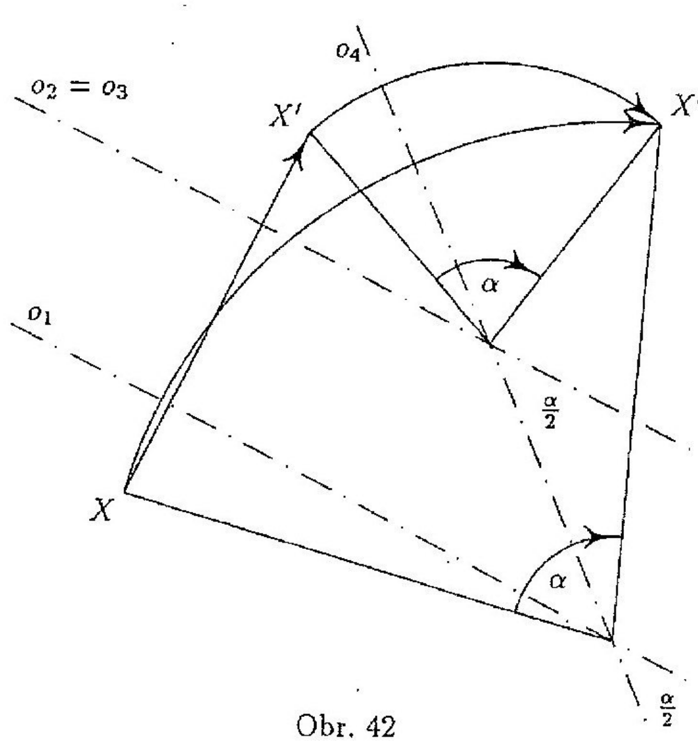
Jakou shodnost dostaneme složením dvou z uvedených druhů shodností?
Víme již, že složením dvou posunutí je opět posunutí.



Obr. 41

Složením dvou otočení s týmž středem je opět otočení s tímto středem, ve zvláštním případě identita. Jsou-li středy S_1, S_2 obou otočení různé, můžeme první otočení složit z osových souměrností podle os o_1, o_2, kde o_2 je přímka S_1S_2, druhé otočení složíme z osových souměrností podle os $o_3 = S_1S_2$ a o_4 (obr. 41). Složením osových souměrností podle splývajících os o_2, o_3 je samozřejmě identita. Proto využitím asociativnosti při skládání jakýchkoli zobrazení docházíme k závěru, že složením našich dvou otočení je zobrazení složené z osových souměrností podle přímek o_1 a o_4. A to je posunutí (je-li $o_1 \| o_4$, tj. když $\alpha + \beta = 0°$ nebo $\alpha + \beta = 360°$) nebo otočení (středem otočení je průsečík přímek o_1, o_4, uhel otočení je $\alpha + \beta$).

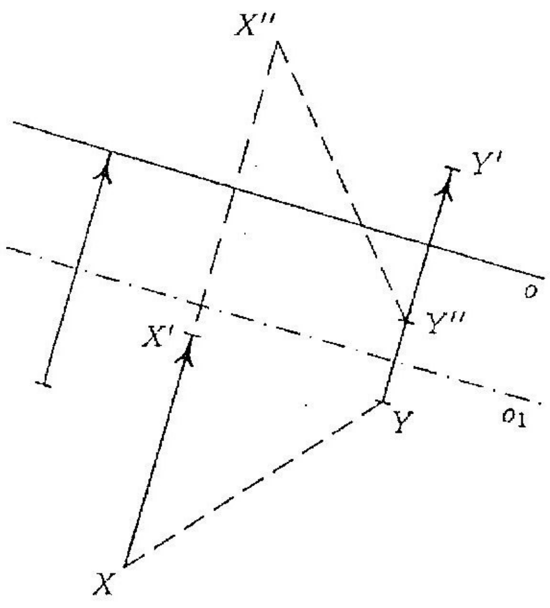
Co je složením posunutí a otočení, které není identitou? Posunutí složíme z osových souměrností podle os o_1, o_2 ($o_1 \| o_2$), přičemž osu o_2 zvolíme tak, aby procházela středem otočení (obr. 42). Otočení pak složíme z osových souměrností podle os $o_2 = o_3$ a o_4. Dále postupujeme jako v předcházejícím



Obr. 42

případě, výsledným zobrazením je otočení. Stejný výsledek bychom dostali při skládání otočení a posunutí.

Složením posunutí a osové souměrnosti je buď osová souměrnost nebo posunutá osová souměrnost. První případ nastane, jde-li o posunutí ve směru kolmém na osu o osové souměrnosti (obr. 43). Dané posunutí pak můžeme rozložit na osové souměrnosti podle os o_1 a o, výsledkem je souměrnost podle osy o_1. Není-li směr posunutí kolmý na osu dané souměrnosti, rozložíme dané posunutí na posunutí ve směru osy souměrnosti a na posunutí kolmé k ose souměrnosti. Složením pak dostaneme posunutou osovou souměrnost. Opět to platí i v případě, když posunutí a osovou souměrnost skládáme v obráceném pořadí. Dostaneme také osovou souměrnost nebo posunutou osovou souměrnost, ta ovšem nemusí být totožná s tou předcházející, protože skládání zobrazení je sice asociativní, nikoli však komutativní.



Obr. 43

Vhodným rozkladem na osové souměrnosti a jiným složením těchto osových souměrností při využití asociativního zákona si podobně odvodíte i další výsledky, například co je složením dvou posunutých osových souměrností.

Ještě ukážeme, že jiné druhy shodností roviny než uvedené neexistují. Je-li totiž f libovolná shodnost roviny, zvolíme v rovině libovolně dva různé body A, B a jejich obrazy ve shodnosti f označíme A', B'. Je pak $|AB| = |A'B'|$ a podle kapitole 4 víme, že f je buď posunutí nebo otočení, nebo je f toto posunutí nebo otočení složené ještě s osovou souměrností podle přímky $A'B'$, což je osová souměrnost nebo posunutá osová souměrnost.

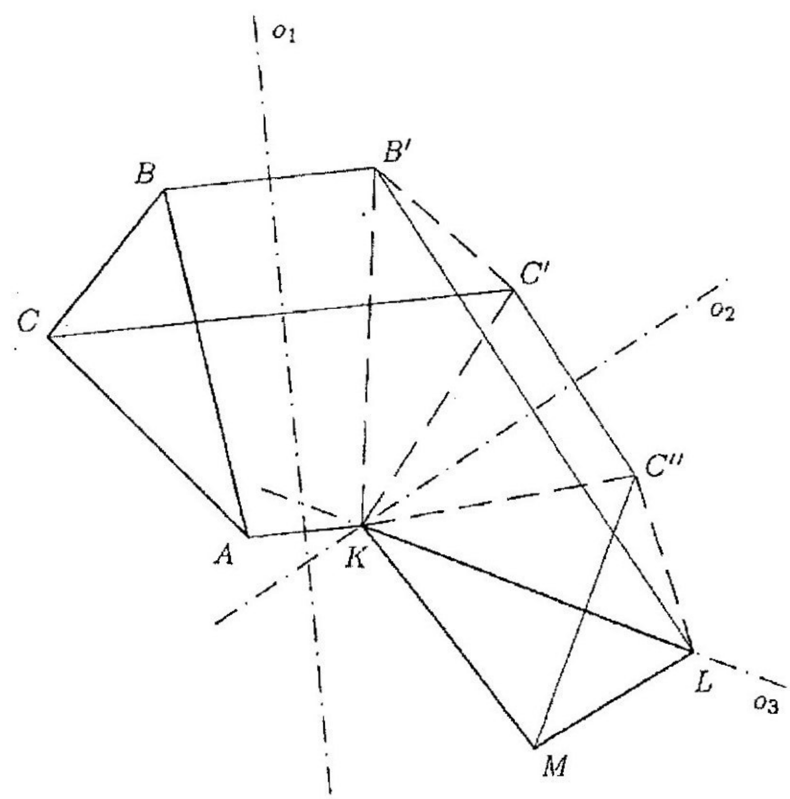
Všechny výsledky jsou shrnuty do tabulky, ze které vyčteme, jaký druh shodnosti dostaneme složením dvou shodností typů uvedených v příslušném řádku a sloupci. Je nutné si ale uvědomit, že např. při složení posunutí a otočení v tomto pořadí a při složení téhož otočení a posunutí v opačném pořadí než v předešlém případě vznikne v obou případech otočení o tentýž úhel, ale obě otočení mají jiné středy.

	posunutí (včetně identity)	otočení (včetně identity)	osová nebo posunutá osová souměrnost
posunutí (včetně identity)	posunutí (včetně identity)	otočení nebo posunutí (včetně identity)	osová nebo posunutá osová souměrnost
otočení (včetně identity)	otočení nebo posunutí (včetně identity)	otočení nebo posunutí (včetně identity)	osová nebo posunutá osová souměrnost
osová nebo posunutá osová souměrnost	osová nebo posunutá osová souměrnost	osová nebo posunutá osová souměrnost	otočení nebo posunutí (včetně identity)

o **Příklad 24.** V rovině jsou dány shodné trojúhelníky ABC a KLM. Ukažte, že lze zvolit dvě, nebo tři osové souměrnosti tak, že jejich složení zobrazuje body A, B, C po řadě na body K, L, M.

Řešení. Jsou-li trojúhelníky ABC, KLM shodné, existuje shodnost, která zobrazí trojúhelník ABC na trojúhelník KLM požadovaným způsobem. To plyne z definice shodnosti trojúhelníků. Tato shodnost se dá jako každá shodnost složit z jedné, dvou, nebo tří osových souměrností, jak plyne z výše uvedeného přehledu všech shodností. Tím je příklad vyřešen, neboť osovou souměrnost lze dostat složením tří totožných osových souměrností.

Předchozí příklad říká, že každou shodnost lze složit z jedné, dvou, nebo tří osových souměrností. Ukážeme, jak můžeme zcela konkrétně osy uvažovaných souměrností najít. Uvažujme, že trojúhelník KLM je obrazem trojúhelníku ABC v nějaké shodnosti.



Obr. 44

Je-li $A \neq K$, zvolíme osovou souměrnost podle osy o_1 úsečky AK (obr. 44), v opačném případě zvolíme identitu. V obou případech se zobrazí bod A na bod K, body B, C na nějaké body B', C', přičemž $|KB'| = |AB| = |KL|$ a zároveň $|KC'| = |AC| = |KM|$. Dále je-li $B' \neq L$, zvolíme osovou souměrnost podle osy o_2 úsečky $B'L$, jinak zvolíme identitu. V obou případech je bod K samodružný, bod B' se zobrazí na bod L a bod C' se zobrazí na nějaký bod C'', přičemž platí $|KC''| = |KC'| = |KM|$, $|LC''| = |B'C'| = |LM|$. Proto jsou buď body C'', M různé a body K, L leží na ose úsečky $C''M$, takže osová souměrnost podle osy o_3 úsečky $C''M$ zobrazí bod C'' na bod M, nebo je $C'' = M$. V tom případě nahradíme poslední osovou souměrnost identitou. Složením popsaných tří osových souměrností (nebo identit) se body A, B, C zobrazí po řadě na body K, L, M, takže výsledná shodnost je buď identita (ta se dá složit ze dvou totožných osových souměrností), osová souměrnost, nebo je složena ze dvou, nebo tří osových souměrností.

o **Příklad 25.** Ukažte, že zobrazení složené ze čtyř osových souměrností se dá složit ze dvou osových souměrností.

Řešení. Zobrazení složené z prvních dvou osových souměrností je posunutí nebo otočení; totéž platí pro zobrazení složené ze třetí a čtvrté osové souměrnosti. Složením dvou posunutí nebo dvou otočení nebo posunutí a otočení (v libovolném pořadí) je vždy posunutí nebo otočení. A každé posunutí nebo otočení se dá složit ze dvou osových souměrností.

Tím jsme vlastně několika způsoby ukázali platnost následujícího tvrzení.

Věta. *Každá shodnost roviny je buď identita, osová souměrnost, nebo se dá složit ze dvou nebo tří osových souměrností.*

Ještě se podívejme na množinu všech shodností v rovině z pohledu algebraických struktur. Víme, že do množiny všech shodností patří identita, posunutí, otočení, osová souměrnost a posunutá osová souměrnost a že jejich složením vždy zase vznikne nějaká z těchto shodností. Uvažujme tedy strukturu, kde **nosičem je množina všech shodností a operací mezi nimi je jejich skládání**, a ptejme se, zda tato struktura není **grupou**. Připomeňme, že grupou nazýváme strukturu, která má neprázdnou množinu uzavřenou vzhledem k dané operaci, operace je na dané množině asociativní, mezi prvky množiny existuje tzv. neutrální prvek a ke každému prvku množiny existuje tzv. prvek inverzní. Grupa může být komutativní, pokud je operace na dané množině komutativní.

Množina všech shodností je uzavřená na operaci skládání zobrazení (viz věta a úvahy výše). Skládání zobrazení, a tedy i shodností, je asociativní. Neutrální prvek je identita, neboť každé zobrazení s ní složené se nezmění. Inverzním prvkem k identitě je identita, k posunutí to je opačné posunutí, k otočení to je otočení se stejným středem a opačným úhlem, k osové souměrnosti to je tatáž osová souměrnost a k posunuté osové souměrnosti to je posunutá osová souměrnost se stejnou osou a opačným vektorem.

Věta. *Množina všech shodností v rovině s operací skládání zobrazení tvoří grupu.*

Tato grupa ale není komutativní, neboť např. složení dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami o_1, o_2 v tomto pořadí dá posunutí a složení těchto osových souměrností v pořadí o_2, o_1 dá posunutí opačné k tomu předchozímu.

Rozmyslete si sami, že množina všech přímých shodností s operací jejich skládání tvoří grupu, tzv. **podgrupu grupy shodností**. Podgrupou této podgrupy jsou všechna posunutí a středové souměrnosti. Dále podrupou posledně zmíněné podrupy jsou všechna posunutí, která mají ještě podgrupu obsahující jediné zobrazení, a to identitu.

Doplňme ještě jeden pojem, který souvisí se skládáním zobrazení. **Zobrazení** se nazývá **involutorní (involuce)**, právě když složením tohoto zobrazení se sebou samým vznikne identita. Ze shodných zobrazení jsou involucemi identita, středová souměrnost a osová souměrnost.

---

o **Cvičení 1.** Rovnostranný trojúhelník ABC s těžištěm T zobrazte nejprve v otočení se středem T, v němž se bod A zobrazí na bod B; vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Tento pak zobrazte v osové souměrnosti s osou AT; vznikne trojúhelník $A''B''C''$. Jakou shodnost dostanete složením těchto shodností? Bude se jednat o stejné složené zobrazení, zobrazíme-li trojúhelník nejprve osovou souměrností a jeho obraz pak otočením?

o **Cvičení 2.** Rovnostranný trojúhelník ABC otočte nejprve kolem bodu A tak, že bod B se zobrazí do bodu C. Toto zobrazení složte s otočením kolem bodu C, ve kterém se bod A zobrazí do bodu B. O jaké výsledné zobrazení se jedná?

o **Cvičení 3.** V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S uvažujme trojúhelník EFS. Ten zobrazíme nejprve v osové souměrnosti s osou v ose úsečky ED a jeho obraz v otočení se středem C, v němž se zobrazí bod S na bod B. Jaké zobrazení vznikne složením výše uvedených shodností?

o **Cvičení 4.** Je dán čtverec K. Skládejte shodnosti, v nichž je čtverec K samodružný.

o **Cvičení 5.** Jaké zobrazení vznikne složením tří otočení?

o **Cvičení 6.** Jaké zobrazení vznikne složením
a) pěti, resp. šesti osových souměrností,
b) lichého, resp. sudého počtu osových souměrností?

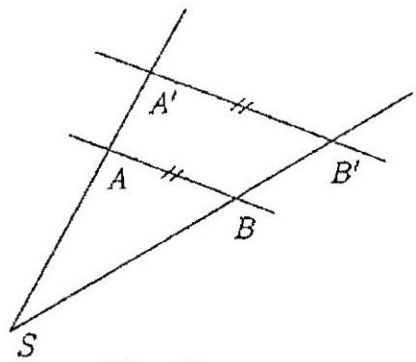
o **Cvičení 7.** Nazvěme „otočenou osovou souměrností“ shodnost složenou z osové souměrnosti a otočení o úhel $\alpha \neq 0$. Určete, jaké zobrazení vznikne složením dvou „otočených osových souměrností“.

8. Stejnolehlost

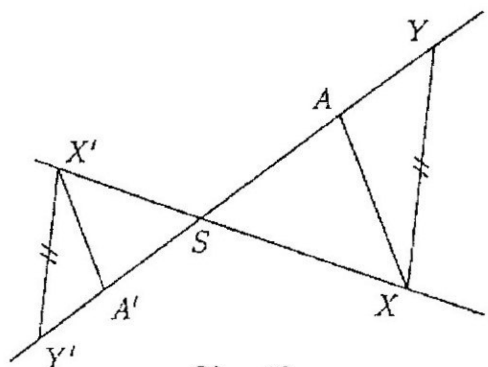
Doposud jsme se zabývali zobrazeními, která zobrazovala úsečku na úsečku stejné délky. Nyní uvedeme další typ zobrazení. Jedná se o stejnolehlost. Vyslovme její definici:

Stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda \neq 0$ je zobrazení roviny na sebe, které přiřadí každému bodu X roviny bod X' podle těchto pravidel:
1. $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$,
2. je-li $\lambda > 0$ a $X \neq S$, leží bod X' na polopřímce SX,
3. je-li $\lambda < 0$ a $X \neq S$, leží bod X' na polopřímce opačné k polopřímce SX.
(Mohli bychom též říci, že vektor $\overrightarrow{SX'}$ je λ-násobkem vektoru $\overrightarrow{SX}$, tj. $\overrightarrow{SX'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SX}$.)

Z 1. vyplývá, že bodu S přiřadí stejnolehlost opět bod S, střed stejnolehlosti je jejím samodružným bodem. Pro $\lambda = 1$ dostaneme identitu. Tu tedy považujeme za stejnolehlost s libovolným středem. Je-li $\lambda = -1$, dostaneme středovou souměrnost se středem S.



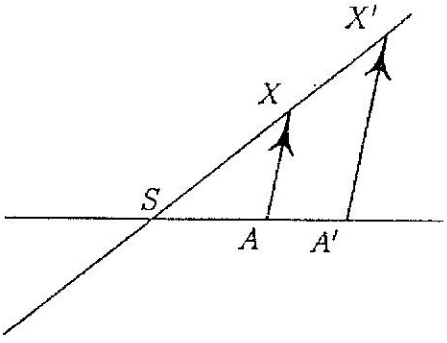
Obr. 45



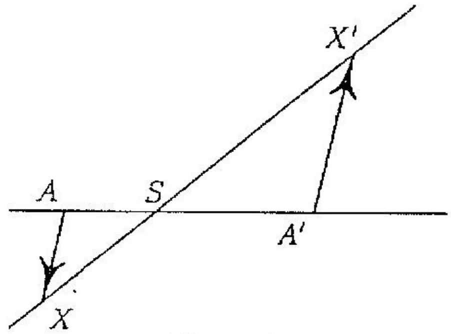
Obr. 46

Ve stejnolehlosti platí: Je-li obrazem bodu A bod A' a obrazem bodu B bod B' ($A \neq B$), jsou přímky AB, $A'B'$ rovnoběžné a $|A'B'| = |\lambda| \cdot |AB|$ (obr. 45). Odtud plyne, že stejnolehlost je určena také svým středem S a jednou dvojicí A, A' vzoru a obrazu, pro kterou je $A \neq S \neq A'$. Body S, A, A' musí ovšem ležet na přímce. Ke každému bodu pak snadno sestrojíme jeho obraz. Neleží-li bod X na přímce SA, je jeho obraz průsečíkem přímky SX a rovnoběžky s přímkou AX vedené bodem A' (obr. 46). Leží-li bod Y na přímce SA ($Y \neq S$), sestrojíme nejdříve některou dvojici X, X', ve které bod X neleží na přímce SA, a s její pomocí pak sestrojíme bod Y' (obr. 46). Je-li $\lambda > 0$, mají vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{A'X'}$ stejnou orientaci, pro $\lambda < 0$ mají orientaci opačnou (obr. 47a,b).

Krátce lze tedy říci, že v každé stejnolehlosti jsou všechny (neorientované) směry samodružné. Také se e stejnolehlostech zachovává velikost úhlů.



Obr. 47a



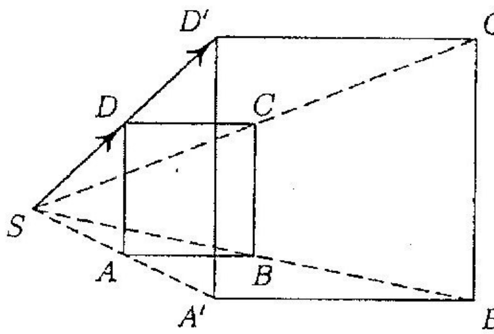
Obr. 47b

o **Příklad 26.** Zakreslete čtverec $ABCD$ a vně tohoto čtverce zvolte bod S. Zobrazte čtverec $ABCD$ ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem a) $\lambda = 2$, b) $\lambda = -2$.

Řešení.

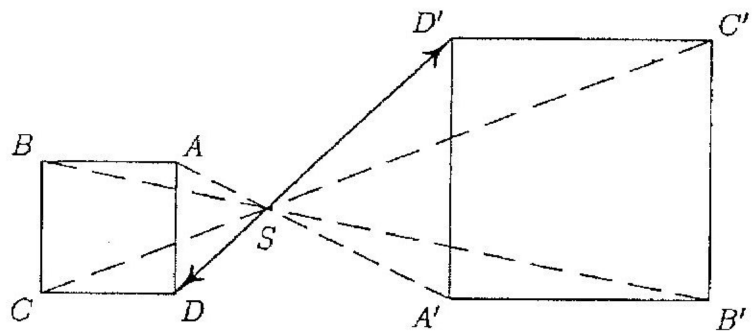
a) Vektor $\overrightarrow{SD}$ se zobrazí na vektor $\overrightarrow{SD'}$ a platí $\overrightarrow{SD'} = 2 \cdot \overrightarrow{SD}$ (obr. 48a).

b) Zde analogicky platí $\overrightarrow{SD'} = -2 \cdot \overrightarrow{SD}$ (obr. 48b).



Obr. 48a

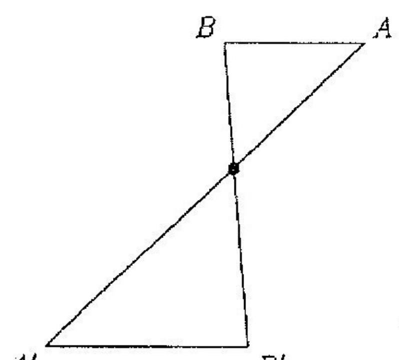
o **Příklad 27.** Zvolte body A, B, A', B' $(A \neq B,\ A' \neq B')$ a najděte stejnolehlost, která zobrazí bod A na bod A' a bod B na bod B'.



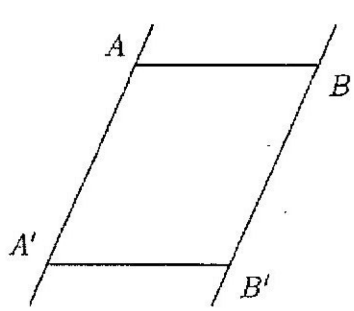
Obr. 48b

Řešení. Nutnou podmínkou pro to, aby taková stejnolehlost existovala, je rovnoběžnost úseček AB, $A'B'$, což budeme předpokládat. Dále musíme rozlišit dva případy:

a) Úsečky AB, $A'B'$ neleží na téže přímce. Pak jsou přímky AA', BB' různé a jejich průsečík (pokud existuje) je středem hledané stejnolehlosti (obr. 49). Jsou-li přímky AA', BB' rovnoběžné, mají orientované úsečky AB, $A'B'$ stejnou délku a stejný (orientovaný) směr a nejsou totožné. Pak ovšem neexistuje stejnolehlost požadované vlastnosti (existuje však posunutí této vlastnosti) (obr. 50).

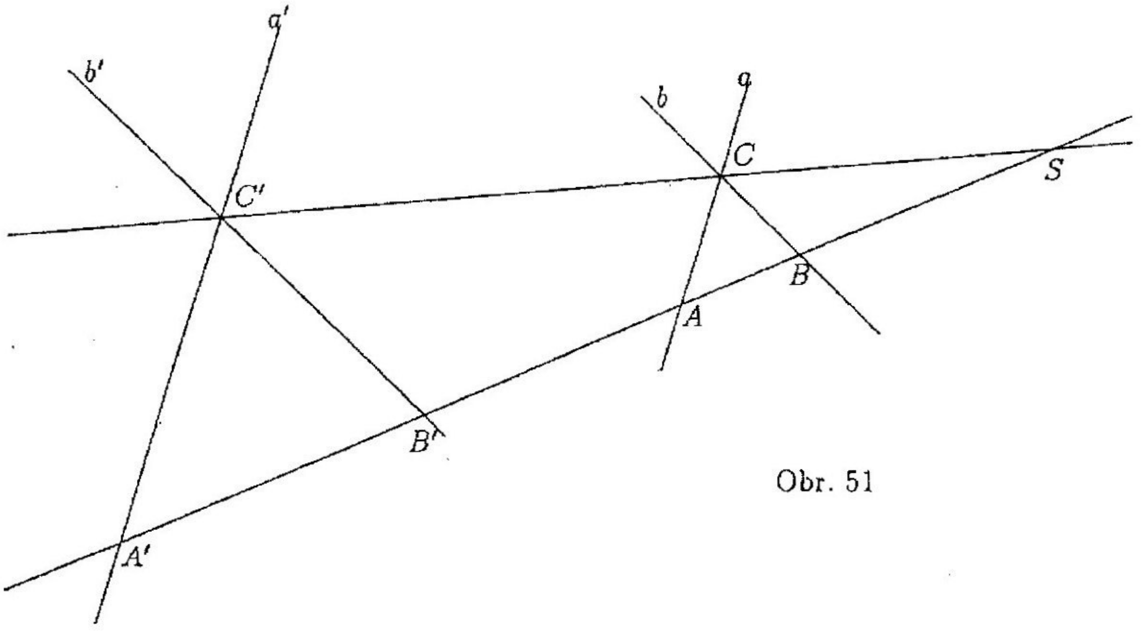


Obr. 49



Obr. 50

b) Úsečky AB, $A'B'$ leží na téže přímce. Je-li $A = A'$, $B = B'$, splňuje podmínky identita. Je-li $A \neq A'$ nebo $B \neq B'$, vedeme různými body A, A' rovnoběžné přímky a, a' různé od přímky AB a body B, B' vedeme podobné rovnoběžky b, b'. Existuje-li stejnolehlost požadované vlastnosti, musí se při ní bod $C = a \cap b$ zobrazit na bod $C' = a' \cap b'$ (obr. 51). Střed stejnolehlosti najdeme jako průsečík přímek AA' (BB'), CC', pokud tyto přímky nejsou spolu rovnoběžné. Rovnoběžné jsou právě tehdy, když orientované úsečky AB, $A'B'$ určují tentýž vektor. Mají-li orientované úsečky AB, $A'B'$ opačnou orientaci, rovná se koeficient stejnolehlosti, která zobrazuje bod A na bod A' a bod B na bod B', hodnotě $\lambda = \frac{-|A'B'|}{|AB|}$; při stejné orientaci je $\lambda = \frac{|A'B'|}{|AB|}$, pokud ovšem není $|A'B'| = |AB|$.



Obr. 51

Stejnolehlost, stejně jako shodnost, je prosté zobrazení v rovině, je také zobrazením roviny na sebe, a tudíž je zobrazením vzájemně jednoznačným roviny na tutéž rovinu. Při důkazu všech těchto tvrzení použijeme skutečnost, že pro každé dva různé vzory A, B a jejich obrazy A', B' platí $|A'B'| = |\lambda|\cdot|AB|$, kde λ je koeficient stejnolehlosti. Další fázi důkazů lze vést analogicky jako pro shodná zobrazení.

Stejnolehlost je prosté zobrazení roviny na rovinu, proto k ní existuje zobrazení inverzní, které je též stejnolehlostí. Má-li stejnolehlost střed S a koeficient $\lambda \neq 0$, má inverzní stejnolehlost též střed S a koeficient $\frac{1}{\lambda}$. Co je inverzním zobrazením ke stejnolehlosti s koeficientem $\lambda = -1$?

Připomeňme, že stejnolehlost, která není identitou ($\lambda \neq 1$), má právě jeden samodružný bod, a to střed stejnolehlosti.

O dvou útvarech řekneme, že jsou stejnolehlé, jestliže existuje stejnolehlost, která zobrazí jeden útvar na druhý.

Na závěr této kapitoly si řekneme ještě něco o skládání stejnolehlostí.

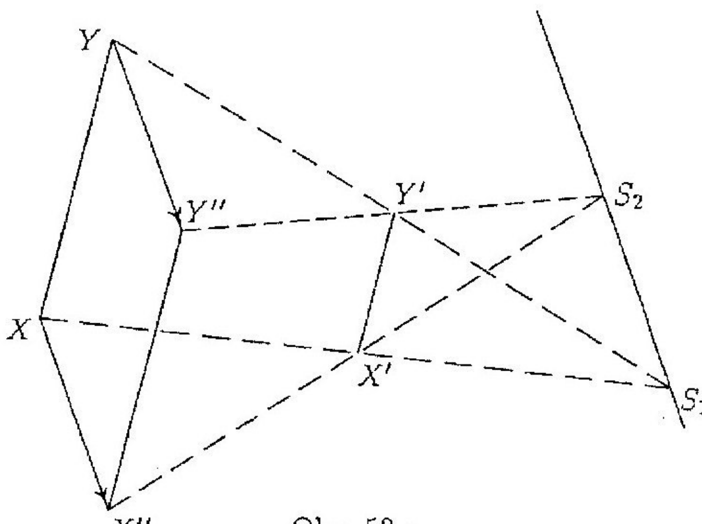
Jsou-li dány dvě stejnolehlosti s týmž středem S a koeficienty λ_1, λ_2, je složené zobrazení z těchto stejnolehlostí též stejnolehlostí se středem S a koeficientem $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. V tomto případě nezáleží, v jakém pořadí se stejnolehlosti skládají. Je jasné, že bod S je samodružný při složeném zobrazení. Uvažujme nyní bod $X \neq S$. První stejnolehlostí se zobrazí na bod X' a platí $\overrightarrow{SX'} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SX}$. Bod X' se pak druhou stejnolehlostí zobrazí na bod X'' a platí $\overrightarrow{SX''} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SX'} = \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SX}$. Jedná se tedy o stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Vidíme, že výsledek nezávisí na pořadí, v jakém se stejnolehlosti skládají.

Uvažujme nyní jednu stejnolehlost se středem S_1 a koeficientem λ_1 a druhou stejnolehlost se středem $S_2 \neq S_1$ a koeficientem λ_2. Složené zobrazení z těchto stejnolehlostí je stejnolehlost v případě, že $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$; má koeficient $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ a střed S ležící na přímce S_1S_2. Je-li $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, je složené zobrazení posunutí ve směru $\overrightarrow{S_1S_2}$.

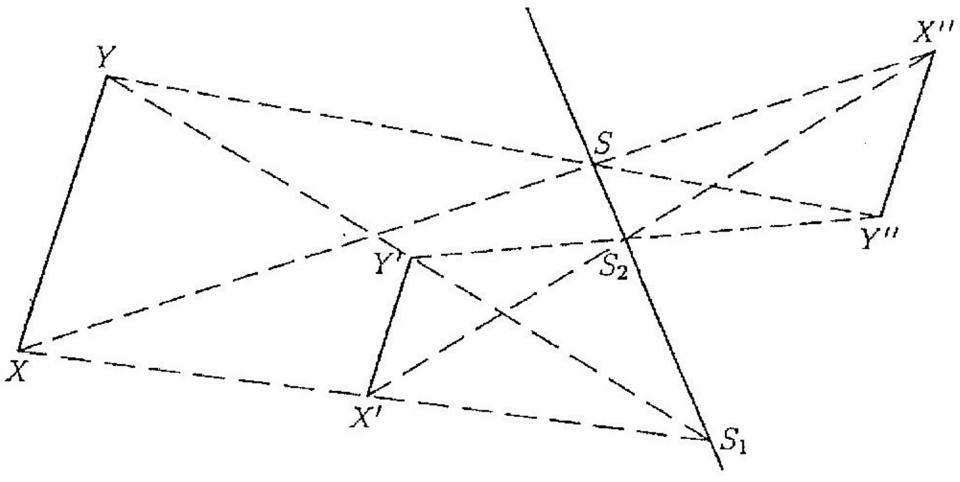
Při důkazu tvrzení zvolme libovolnou úsečku XY, která se nejprve zobrazí na úsečku $X'Y'$, pak na úsečku $X''Y''$. Pro vektory platí $\overrightarrow{X''Y''} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{X'Y'} = \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \overrightarrow{XY}$.

Je-li $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, je $\overrightarrow{X''Y''} = \overrightarrow{XY}$, tedy složené zobrazení je posunutí a podle obr. 52a je vidět, že vektor posunutí je ve směru přímky S_1S_2 (vyzkoušejte např. pro bod S_1). Délka vektoru posunutí je předmětem cvičení 7.

Je-li $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$, zbývá dokázat existenci jednoho samodružného bodu. Ten ale podle příkladu 27 existuje. Obrazy bodů S_1 i S_2 leží ve složeném zobrazení na přímce S_1S_2, proto má výsledná stejnolehlost střed ležící na přímce S_1S_2 (obr. 52b). Poloha středu výsledné stejnolehlosti je předmětem cvičení 8.



Obr. 52 a



Obr. 52 b

Věta (Mongeova). *Složením dvou stejnolehlostí vznikne buď identita, nebo posunutí, nebo stejnolehlost.*

Po předchozích úvahách si můžeme rozmyslet, že množina všech stejnolehlostí, posunutí a identita tvoří vzhledem ke skládání zobrazení grupu, tzv. **Mongeovu grupu** (Gaspard Monge (1746–1818), francouzský geometr).

---

o **Cvičení 1.** Dokažte, že každá přímka, která prochází středem stejnolehlosti, je samodružná.

o **Cvičení 2.** Najděte všechny přímky, které jsou samodružné v dané stejnolehlosti.

o **Cvičení 3.** V rovině jsou dány navzájem různé body A, B, S, K. Najděte všechny stejnolehlosti se středem S, pro které obraz přímky AB prochází bodem K.

o **Cvičení 4.** V rovině jsou zakresleny dva čtverce s obsahy v poměru 1 : 2, jejichž strany jsou rovnoběžné. Najděte všechny stejnolehlosti, které zobrazí větší čtverec na menší.

o **Cvičení 5.** Co je složením dvou středových souměrností s různými středy?

o **Cvičení 6.** Je skládání stejnolehlostí komutativní?

o **Cvičení 7.** Určete vektor posunutí, které vznikne složením dvou stejnolehlostí s různými středy S_1, S_2 a koeficienty λ_1, $\frac{1}{\lambda_1}$, pomocí násobku vektoru $\overrightarrow{S_1S_2}$.
(Návod: Zobrazte bod S_1 na S_1' první stejnolehlostí a pak S_1' na S_1'' druhou stejnolehlostí.)

o **Cvičení 8.** Určete vektor $\overrightarrow{S_1S}$ vyjadřující polohu středu S stejnolehlosti složené ze dvou stejnolehlostí s různými středy S_1, S_2 a koeficienty λ_1, $\lambda_2 \neq \frac{1}{\lambda_1}$ pomocí vektoru $\overrightarrow{S_1S_2}$.
(Návod: Zobrazte S_1 na S_1'' první a druhou stejnolehlostí a také složenou stejnolehlostí.)

9. Podobná zobrazení

Říkáme, že zobrazení roviny na sebe je **podobné zobrazení (podobnost)**, jestliže existuje kladné číslo k (tzv. **koeficient podobnosti**) tak, že pro každé dva body A, B roviny a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = k \cdot |AB|.$$

Každá shodnost je podobnost, neboť stačí položit $k = 1$. Každá stejnolehlost s koeficientem λ je podobnost s koeficientem $|\lambda|$. Ukážeme, že tím jsou do jisté míry vyčerpány všechny podobnosti. Předpokládejme, že zobrazení f roviny na sebe je podobnost s koeficientem k. Zvolme libovolnou stejnolehlost h s koeficientem k (střed stejnolehlosti je libovolný). Zobrazení g složené z podobnosti f a stejnolehlosti inverzní ke stejnolehlosti h je shodnost, proto je podobnost f složená ze shodnosti g a stejnolehlosti h.

Není pravda, že každá podobnost je buď shodnost, nebo stejnolehlost. Avšak podobnost, která není ani shodnost, ani stejnolehlost, je vždy zobrazením, které dostaneme složením shodnosti a stejnolehlosti (nebo stejnolehlosti a shodnosti).

Odtud plyne, že každá podobnost je prosté zobrazení roviny na sebe, a tudíž ke každé podobnosti existuje inverzní zobrazení, které je též podobností. S jakým koeficientem?

Stejně jako u shodností rozlišujeme **podobnosti přímé** a **podobnosti nepřímé**. Při přímé podobnosti se každý trojúhelník zobrazí na trojúhelník a v obou je smysl obíhání po stranách stejný, při nepřímé podobnosti se každý trojúhelník zobrazí na trojúhelník a smysl obíhání po stranách je v jednom trojúhelníku opačný než ve druhém.

Ptejme se, jaké zobrazení vznikne složením jednotlivých shodností a stejnolehlosti. Složíme-li posunutí se stejnolehlostí, dostaneme stejnolehlost s koeficientem, jaký měla skládaná stejnolehlost, a středem na přímce procházející středem skládané stejnolehlosti ve směru posunutí. Složíme-li otočení a stejnolehlost, můžeme pouze říci, že dostaneme přímou podobnost. Složíme-li posunutou osovou souměrnost a stejnolehlost, vznikne zobrazení složené z osové souměrnosti a stejnolehlosti, vznikne tedy nepřímá podobnost.

Všechny výsledky jsou shrnuty do tabulky, ze které vyčteme, jaký druh podobnosti dostaneme složením dvou stejnolehlostí, resp. stejnolehlosti a shodnosti.

	stejnolehlost	posunutí (včetně identity)	otočení (včetně identity)	osová nebo posunutá osová souměrnost
stejnolehlost	stejnolehlost nebo posunutí	stejnolehlost	přímá podobnost	nepřímá podobnost

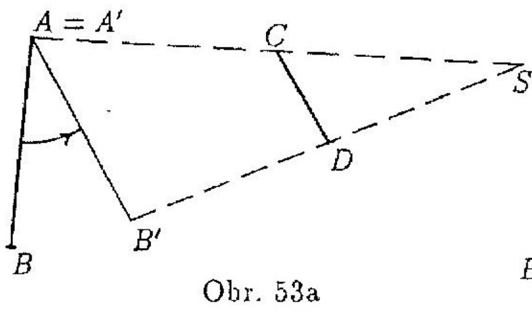
Na základě těchto úvah můžeme vyslovit následující věty:

Věta. *Každou podobnost můžeme rozložit na shodnost a stejnolehlost, a to dokonce na otočení a stejnolehlost (případně na stejnolehlost a otočení), nebo na osovou souměrnost a stejnolehlost (případně na stejnolehlost a osovou souměrnost).*

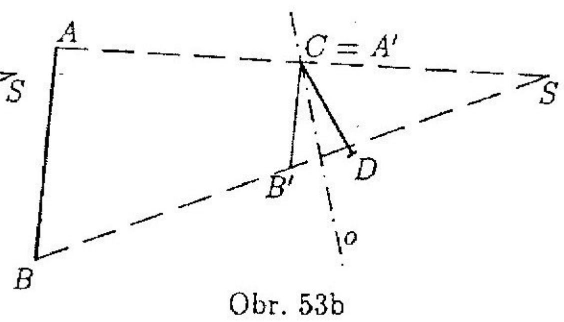
Věta. *Množina všech podobností v rovině s operací skládání zobrazení tvoří grupu.*

o **Příklad 28.** Jsou dány dvě nerovnoběžné úsečky AB, CD tak, že $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Najděte takovou stejnolehlost a shodnost (resp. shodnost a stejnolehlost), jejichž složením se úsečka AB zobrazí na úsečku CD. Dále najdete jinou dvojici stejnolehlosti a shodnosti (resp. shodnosti a stejnolehlosti), jejichž složením se také úsečka AB zobrazí na úsečku CD.

Řešení. Na obr. 53a se úsečka AB nejprve otočí kolem bodu A do směru úsečky CD; vznikne úsečka $A'B'$, která se stejnolehlostí s koeficientem $\frac{1}{2}$ zobrazí na úsečku CD. Na obr. 53b se nejprve úsečka AB zobrazí ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ tak, aby bod A' splynul s bodem C; potom se úsečka $A'B'$ osovou souměrností (osa prochází bodem C) zobrazí na úsečku CD. Je evidentní, že dvě zde uvedené možnosti nejsou jediné.



Obr. 53a



Obr. 53b

Jelikož shodnosti jsou zvláštním případem podobností a jelikož shodnosti mají různý počet samodružných bodů, dokažme tvrzení o počtu samodružných bodů podobností:

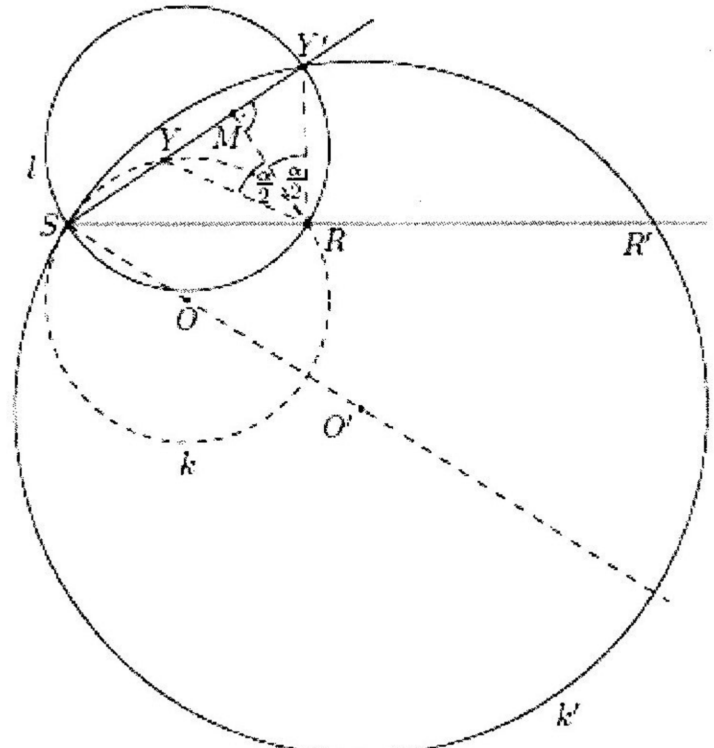
Věta. *Každá podobnost, jež není shodností, má právě jeden samodružný bod.*

Podobnost, která není shodností, nemůže mít aspoň dva samodružné body, jinak by vzdálenost dvou vzorů byla stejná jako vzdálenost jejich obrazů. Tedy podaří-li se najít v dané podobnosti aspoň dva samodružné body, jedná se o shodnost. A podaří-li se najít aspoň tři samodružné body, které neleží v přímce, jde jedině o identitu.

Složitějším úkolem je, jak se dá tento samodružný bod najít. Stačí, když uvedeme, jak se najde samodružný bod jednak podobnosti složené z otočení a stejnolehlosti, jednak podobnosti složené z osové souměrnosti a stejnolehlosti. V obou případech je dán trojúhelník ABC a jeho obraz $A'B'C'$.

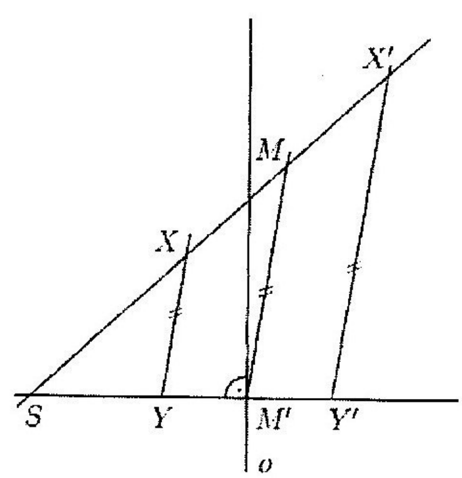
Pokud jsou oba trojúhelníky přímo podobné, stačí např. trojúhelník ABC otočit kolem průsečíku přímek AB a $A'B'$ o úhel, který tyto přímky svírají. Otočený trojúhelník a trojúhelník $A'B'C'$ jsou pak již stejnolehlé, takže tím je určena stejnolehlost. Pokud jsou oba trojúhelníky nepřímo podobné, stačí např. trojúhelník ABC zobrazit v osové souměrnosti s osou v ose úhlu přímek AB a $A'B'$. Osově souměrně zobrazený trojúhelník a trojúhelník $A'B'C'$ jsou pak již stejnolehlé, takže tím je určena stejnolehlost.

Nejprve hledejme samodružný bod zobrazení složeného ze stejnolehlosti a otočení. Můžeme vynechat případy, kdy je stejnolehlost, nebo otočení identitou, nebo středovou souměrností. Dále vynecháme případ, kdy je střed S stejnolehlosti totožný se středem R otočení. V tom případě je totiž jediným samodružným bodem bod $S = R$. Nechť je tedy $R \neq S$. Stejnolehlost je dána svým středem S a například bodem R a jeho obrazem R' ($R' \neq R$, $R' \neq S$, body S, R, R' jsou kolineární) (obr. 53c). Otočení je dáno středem R a úhlem α, $\alpha \in (0°; 180°)$. Je-li Y, $Y \neq S$, samodružný bod složeného zobrazení a Y' jeho obraz v dané stejnolehlosti, je obrazem bodu Y' v daném otočení bod Y a trojúhelník $Y'RY$ je rovnoramenný s úhlem α při vrcholu R.



Obr. 53c

Proto je $|\sphericalangle SYR| = |\sphericalangle SY'R'| = 90° + \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle SY'R| = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Bod Y' je tedy bod, z něhož vidíme úsečku SR' pod úhlem $90° + \frac{\alpha}{2}$ a úsečku SR pod úhlem $90° - \frac{\alpha}{2}$. Obě podmínky splňují pouze dva body Y' (souměrně sdružené podle přímky SR), avšak jen jeden z nich dává řešení naší úlohy.



Obr. 53d

Nyní hledejme samodružný bod zobrazení složeného ze stejnolehlosti a osové souměrnosti. Osová souměrnost je dána osou o, stejnolehlost je dána středem S a nějakou dvojicí vzor $X \neq S$ a obraz X' neležící na kolmici k přímce o. Pokud leží bod S na ose o, je to hledaný samodružný bod. Pokud bod S na ose o neleží (obr. 53d), leží hledaný samodružný bod na přímce p kolmé k přímce o

a procházející bodem S. Pak stačí nalézt střed M úsečky XX' a spojit ho s průsečíkem M' přímek p a o. Rovnoběžka s přímkou MM' procházející bodem X protne přímku p v hledaném samodružném bodu Y. Kdybychom skládali zobrazení v opačném pořadí, tj. osovou souměrnost se stejnolehlostí, byl by hledaným samodružným bodem bod Y', který je průsečíkem přímky p a rovnoběžky s přímkou MM' procházející bodem X'.

U shodností jsme se zabývali shodností trojúhelníků. Podobně budeme sledovat i podobnost trojúhelníků. Řekneme si proto nejprve obecně, že dva útvary P_1, P_2 jsou podobné, jestliže existuje podobnost, která zobrazí útvar P_1 na útvar P_2.

---

o **Cvičení 1.** Sestrojte obraz čtverce $ABCD$ v podobnosti, která zobrazuje bod A na sebe a bod B na bod C.

o **Cvičení 2.** Je dán trojúhelník ABC. Existuje podobnost zobrazující body A, B, C po řadě na body B, C, A?

o **Cvičení 3.** Každé dva čtverce jsou podobné. Dokažte.

o **Cvičení 4.** Trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC v podobnosti s koeficientem k. V jakém poměru jsou obsahy trojúhelníků?

o **Cvičení 5.** Je dán čtverec $ABCD$ o středu S. Podobnost zobrazuje po řadě body A, B, S na body B, D, C. Ukažte, že bod E, pro který je bod A středem úsečky DE, je samodružný.

o **Cvičení 6.** Trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC v určité podobnosti. Najděte aspoň dva rozklady této podobnosti na shodnost a stejnolehlost.

o **Cvičení 7.** V rovině je umístěn čtverec $ABCD$. Uvažujme posunutí roviny o vektor $\overrightarrow{DB}$ složené se stejnolehlostí se středem C a koeficientem $\frac{1}{2}$ v tomto pořadí. Určete výsledné zobrazení roviny a najděte jeho samodružný bod.

o **Cvičení 8.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a D je pata výšky z vrcholu C. Podobnost zobrazuje trojúhelník ACD na trojúhelník ABC. Najděte samodružný bod podobnosti a určete shodnost a stejnolehlost, z nichž je podobnost složená.

10. Podobnost trojúhelníků

V předcházející kapitole jsme definovali podobné útvary. Nyní se zaměříme podrobněji na podobné trojúhelníky. Podle definice jsou trojúhelníky ABC a KLM právě tehdy podobné, existuje-li podobnost zobrazující bod A na bod K, bod B na bod L a bod C na bod M. Píšeme pak $\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$.

Porovnejme tuto definici s definicí shodnosti trojúhelníků v kapitole 5 a všimněme si, že i při zápisu podobnosti dvou trojúhelníků je třeba dbát na pořadí vrcholů – zápis $\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$ říká, že existuje podobnost, v níž se body A, B, C zobrazí v tomto pořadí na body K, L, M.

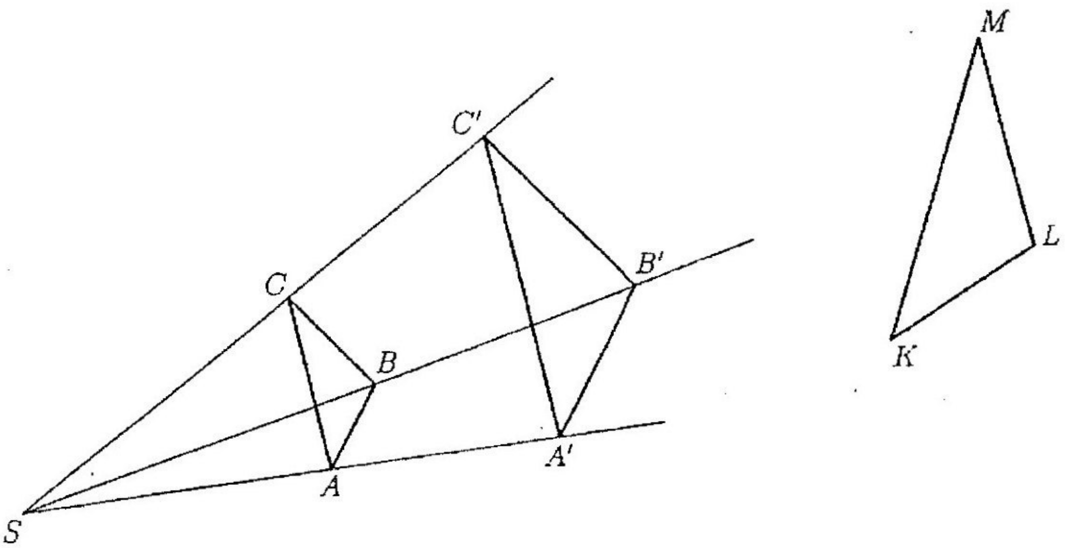
Přímo z definice podobnosti trojúhelníků plyne: Jsou-li trojúhelníky ABC a KLM podobné, pak existuje kladné číslo k tak, že platí

$$|KL| = k \cdot |AB|, \qquad |LM| = k \cdot |BC|, \qquad |MK| = k \cdot |CA|. \qquad (3)$$

Víme, že se každá podobnost dá složit ze shodnosti a stejnolehlosti. Každá shodnost, ale i každá stejnolehlost zachovává velikost úhlů. Ve stejnolehlosti se dokonce přímky p, q zobrazí na přímky p', q' tak, že $p' \parallel p$, $q' \parallel q$, a proto se odchylka přímek p, q rovná odchylce přímek p', q' (a jsou-li přímky p, q rovnoběžné, jsou rovnoběžné i přímky p', q'). Odtud plyne, že pro podobné trojúhelníky ABC, KLM platí také vztahy

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|, \qquad |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle LMK|, \qquad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|. \tag{4}$$

Předpokládejme obráceně, že pro trojúhelníky ABC a KLM platí vztahy (3). Zvolme libovolnou stejnolehlost s koeficientem $k = |KL| : |AB|$. V ní se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$ o stranách délek $|A'B'| = k \cdot |AB| = |KL|$, $|B'C'| = k \cdot |BC| = |LM|$, $|C'A'| = k \cdot |CA| = |MK|$, tedy na trojúhelník, který je podle věty (*sss*) shodný s trojúhelníkem KLM. Existuje tedy shodnost zobrazující trojúhelník $A'B'C'$ na trojúhelník KLM. Podobnost složená ze zvolené stejnolehlosti a této shodnosti zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník KLM, takže $\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$ (obr. 54).



Obr. 54

Můžeme tedy vyslovit toto tvrzení:

Věta (*sss*). *Trojúhelníky ABC, KLM* jsou *podobné právě tehdy, platí-li*

$$|AB| : |BC| : |CA| = |KL| : |LM| : |MK|. \tag{5}$$

Říkáme, že se trojúhelníky shodují v poměru délek odpovídajících si stran.

Platí-li pro trojúhelníky ABC a KLM vztahy (4), zvolíme libovolnou stejnolehlost s koeficientem $\dfrac{|KL|}{|AB|}$. V ní se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$, pro který platí

$$|A'B'| = \frac{|KL|}{|AB|} \cdot |AB| = |KL|, \quad |\sphericalangle C'A'B'| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|, \quad |\sphericalangle C'B'A'| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle MLK|.$$

Podle věty (*usu*) jsou trojúhelníky $A'B'C'$ a KLM shodné. Zobrazení složené ze zvolené stejnolehlosti a této shodnosti je podobnost zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník KLM, což můžeme shrnout takto:

Věta (*uu*). *Trojúhelníky ABC a KLM jsou právě tehdy podobné, platí-li*

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|, \quad |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle MLK|. \tag{6}$$

Říkáme, že se *trojúhelníky shodují ve dvou odpovídajících si úhlech. Samozřejmě* se *pak shodují i ve třetím úhlu.*

Podobně bychom pomocí dalších vět o shodnosti trojúhelníků odvodili tyto další nutné a postačující podmínky pro podobnost dvou trojúhelníků:

Věta (*sus*). *Trojúhelníky ABC* a *KLM jsou právě tehdy podobné, platí-li*

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|KL|}{|KM|},\quad |\sphericalangle CAB|=|\sphericalangle MKL|. \tag{7}$$

Říkáme, že se trojúhelníky shodují v jednom úhlu a v poměru délek přilehlých stran.

Věta (*Ssu*). *Trojúhelníky ABC* a *KLM jsou právě tehdy podobné, platí-li*

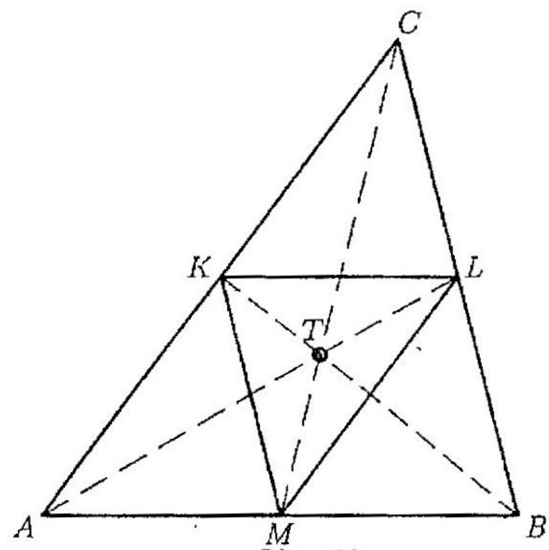
$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|KL|}{|KM|}>1,\quad |\sphericalangle ACB|=|\sphericalangle KML|. \tag{8}$$

Říkáme, že se trojúhelníky shodují v poměru délek dvou stran a v úhlu proti větší z nich.

V následujících příkladech ukážeme zajímavé skupiny podobných trojúhelníků. Použijeme toho, že se těžnice protínají v jednom bodě, stejně tak výšky. Tato tvrzení dokážeme později.

o **Příklad 29.** V trojúhelníku ABC označme K, L, M středy stran AC, BC, AB. Úsečky KL, LM, MK jsou střední příčky trojúhelníku ABC, T jeho těžiště. Najděte zde skupiny podobných trojúhelníků.

Řešení. Trojúhelníky AMK a ABC jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Analogicky jsou stejnolehlé trojúhelníky MBL a ABC a trojúhelníky KLC a ABC. Dále je trojúhelník LKM stejnolehlý s trojúhelníkem ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Takže platí $\triangle AMK \cong \triangle MBL \cong \triangle KLC \cong \triangle LKM$ (obr. 55).



Obr. 55

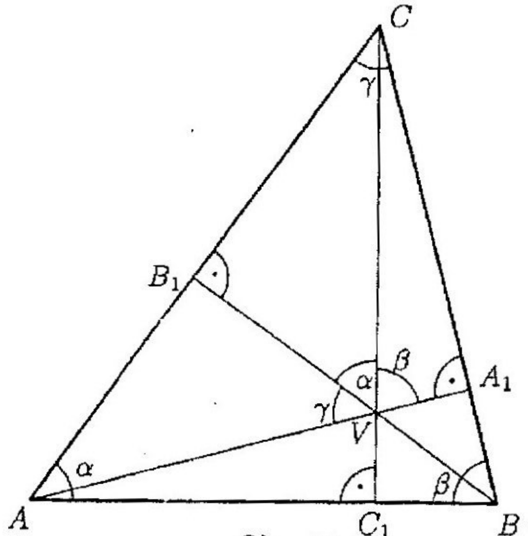
o **Příklad 30.** V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA_1, BB_1, CC_1 jeho výšky; ty se protnou v bodě V. Dokažte, že trojúhelníky ACA_1, AVB_1, BVA_1, BCB_1 jsou podobné (obr. 56). Najděte další dvě analogické čtveřice podobných trojúhelníků.

Řešení. Trojúhelníky ACA_1 a AVB_1 jsou podobné podle věty (*uu*), neboť $|\sphericalangle A_1AC|=|\sphericalangle B_1AV|$ a $|\sphericalangle CA_1A|=|\sphericalangle VB_1A|$. Stejně tak podle věty (*uu*) platí, že jsou podobné dvojice trojúhelníků AVB_1, BVA_1 a BVA_1, BCB_1.

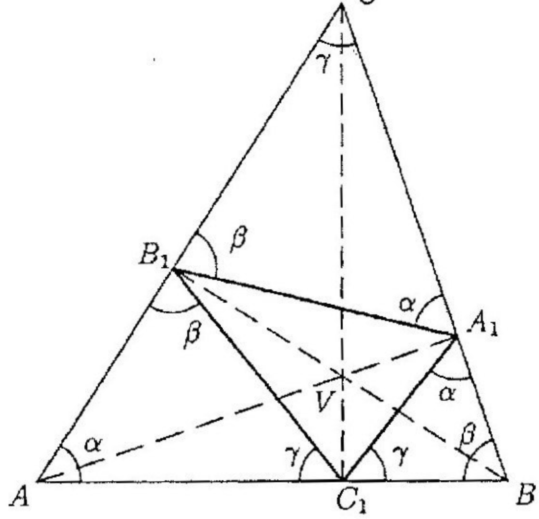
o **Příklad 31.** V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA_1, BB_1, CC_1 jeho výšky. Dokažte, že trojúhelníky ABC, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C jsou podobné a že výška AA_1 půlí úhel $B_1A_1C_1$, výška BB_1 půlí úhel $A_1B_1C_1$ a výška CC_1 půlí úhel $B_1C_1A_1$. V tom případě je průsečík výšek V trojúhelníku ABC středem kružnice vepsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (obr. 57).

Řešení. Dokážeme pouze podobnost trojúhelníků ABC a AB_1C_1; podobnost ostatních trojúhelníků se dokazuje obdobně. Podle příkladu 30 víme, že trojúhelníky AB_1B a AC_1C

jsou podobné. Proto pro ně platí $|AB_1| : |AC_1| = |AB| : |AC|$, což spolu s rovností $|\sphericalangle B_1AC_1| = |\sphericalangle BAC|$ dává podobnost trojúhelníků AB_1C_1 a ABC podle věty (*sus*). V ostroúhlém trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle AC_1B_1| = |\sphericalangle A_1C_1B|$ a jelikož je úsečka CC_1 kolmá na stranu AB, půlí tudíž úhel $B_1C_1A_1$. Další tvrzení příkladu je zřejmé.



Obr. 56



Obr. 57

o **Příklad 32.** Připustíme-li v příkladech 30 a 31 trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem např. při vrcholu C, splynou body A_1, B_1, C. Stejně tak platí, že jsou podobné trojúhelníky ABC, ACC_1, CBC_1. S těmito trojúhelníky se setkáme dále při odvození tzv. Euklidových vět.

---

o **Cvičení 1.** Věty o podobnosti trojúhelníků vyslovte pro rovnoramenné trojúhelníky.

o **Cvičení 2.** Je dán trojúhelník ABC. V polorovině BCA zvolíme bod M a v polorovině opačné k polorovině ABC bod N tak, aby byly trojúhelníky BCM a ABN rovnostranné. Označme K, L jejich středy. Dokažte, že jsou trojúhelníky ABC a LBK podobné.

o **Cvičení 3.** Je dán trojúhelník ABC. Kdy můžeme na úsečce AB zvolit bod K tak, aby úsečka CK rozdělila trojúhelník ABC na dva podobné trojúhelníky?

o **Cvičení 4.** V lichoběžníku $ABCD$ známe délky a, c, $a > c$, základen AB a CD. Střední příčka MN protíná úhlopříčku AC v bodě U a úhlopříčku BD v bodě V. Vypočtěte délku úsečky UV.

o **Cvičení 5.** Bodem M, který leží uvnitř trojúhelníku ABC, jsou vedeny tři přímky rovnoběžné s jeho stranami. Tyto přímky rozdělují trojúhelník ABC na šest částí, z nichž tři jsou trojúhelníky, jejichž obsahy jsou P_1, P_2, P_3. Dokažte, že pro obsah P trojúhelníku ABC platí $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2$.

o **Cvičení 6.** Nechť čtyřúhelník $ABCD$ není rovnoběžník. Dokažte, že přímky spojující středy jeho protějších stran a přímka spojující středy úhlopříček procházejí týmž bodem.

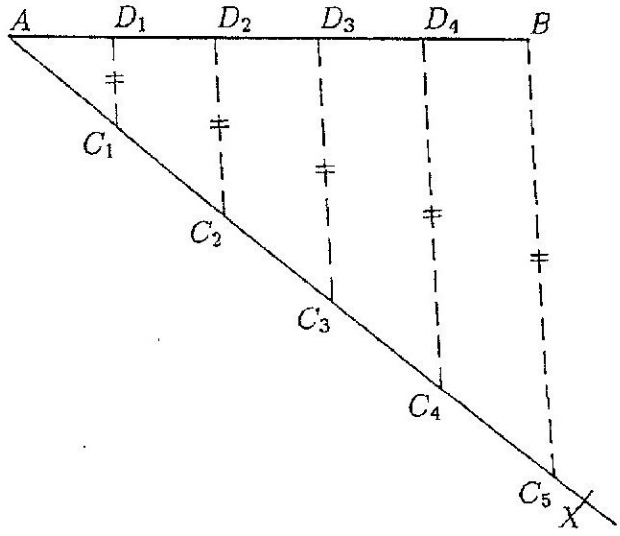
o **Cvičení 7.** Průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku dělí každou výšku na dva úseky, jejichž součin je pro všechny tři výšky tentýž. Dokažte.

11. Využití podobností v konstrukčních úlohách

Také podobnosti, hlavně však stejnolehlost, se používají při řešení konstrukčních úloh. Uveďme několik příkladů.

o **Příklad 33.** Rozdělte danou úsečku AB na pět stejných dílů.

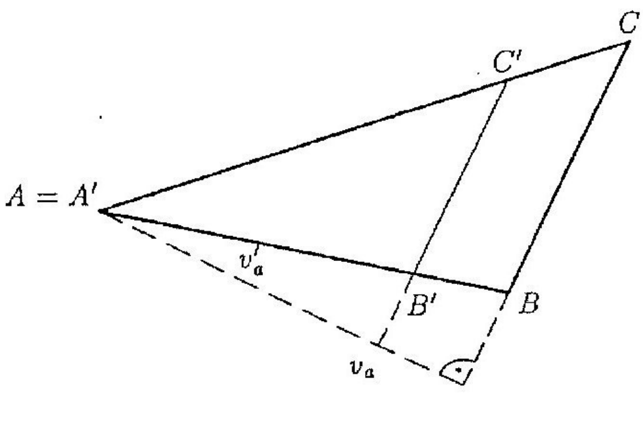
Řešení. Např. bodem A vedeme polopřímku AX tak, aby byly přímky AB, AX různé. Velikost úhlu BAX je libovolná, ale z intervalu $(0°; 180°)$. Tomuto úhlu se říká **redukční úhel**. Na polopřímce AX zkonstruujeme body C_1 až C_5 tak, aby $|AC_1| = |C_1C_2| = |C_2C_3| = |C_3C_4| = |C_4C_5|$. Nyní stejnolehlostí se středem A sestrojíme dělicí body D_1 až D_5 úsečky AB (obr. 58).



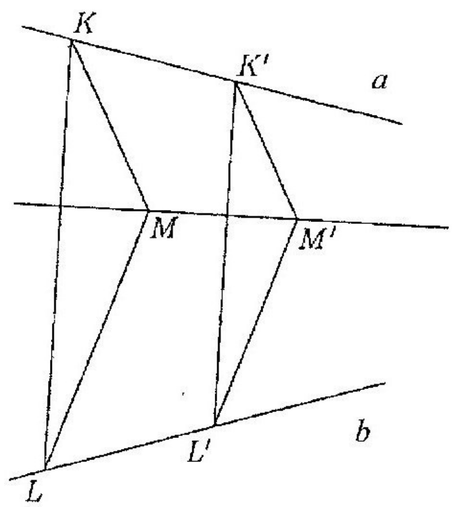
Obr. 58

o **Příklad 34.** Sestrojte trojúhelník ABC, v němž platí $v_a = 5$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$.

Řešení. Sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$, který má strany délek $a' = 2$, $b' = 3$, $c' = 4$; v něm je výška v_a' (obr. 59). Stejnolehlostí se středem A' a koeficientem $v_a : v_a'$ se bod B' zobrazí na bod B a bod C' na bod C.



Obr. 59



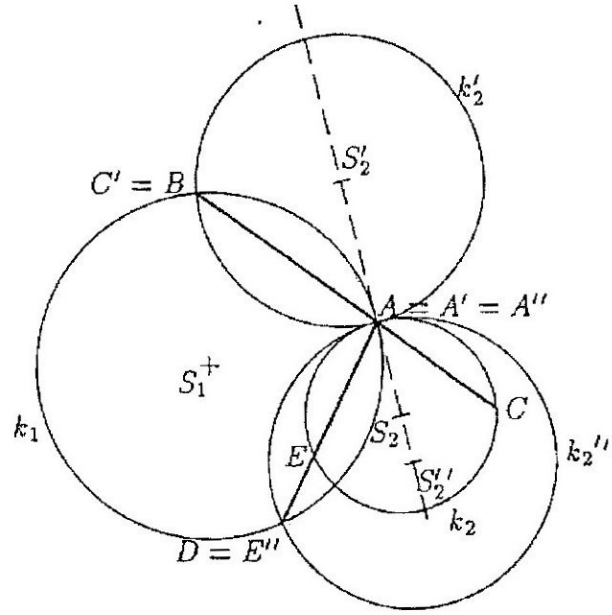
Obr. 60

o **Příklad 35.** Daný bod M spojte s průsečíkem různoběžek a, b, jestliže tento není dostupný.

Řešení. Použijeme stejnolehlost se středem v nedostupném bodě. Zakreslíme nejprve libovolný trojúhelník KLM podle obr. 60. Uvažovanou stejnolehlostí vznikne jeho obraz $K'L'M'$. Hledaná přímka je MM'.

o **Příklad 36.** Jedním společným bodem A protínajících se kružnic k_1, k_2 veďte přímku, která vytíná na kružnicích tětivy, jejichž poměr délek je 3 : 2.

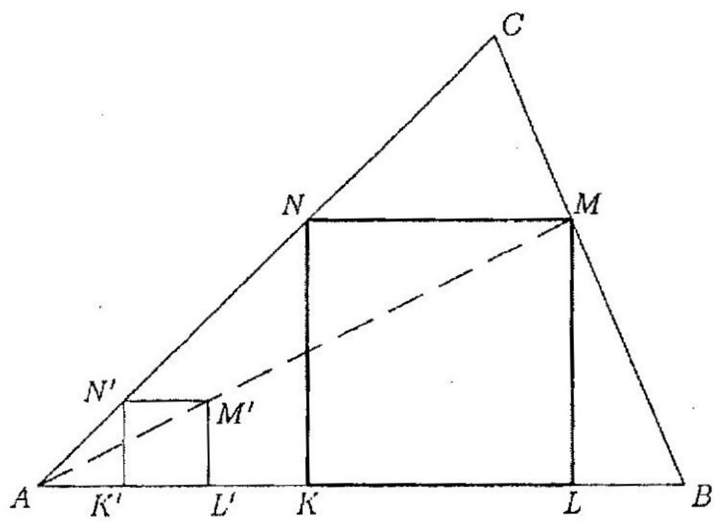
Řešení. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem $-\frac{3}{2}$ je obrazem kružnice k_2 kružnice k_2', která protne kružnici k_1 v hledaném bodě B, což je zároveň obraz druhého hledaného bodu C (obr. 61). Analogicky se sestrojí body D, E.



Obr. 61

o **Příklad 37.** Do trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby úsečka KL ležela na přímce AB, bod M patřil úsečce BC a bod N patřil úsečce AC.

Řešení. Podle obr. 62 sestrojíme nejprve pomocný čtverec $K'L'M'N'$. Stejnolehlostí se středem v hodě A získáme hledaný čtverec $KLMN$.



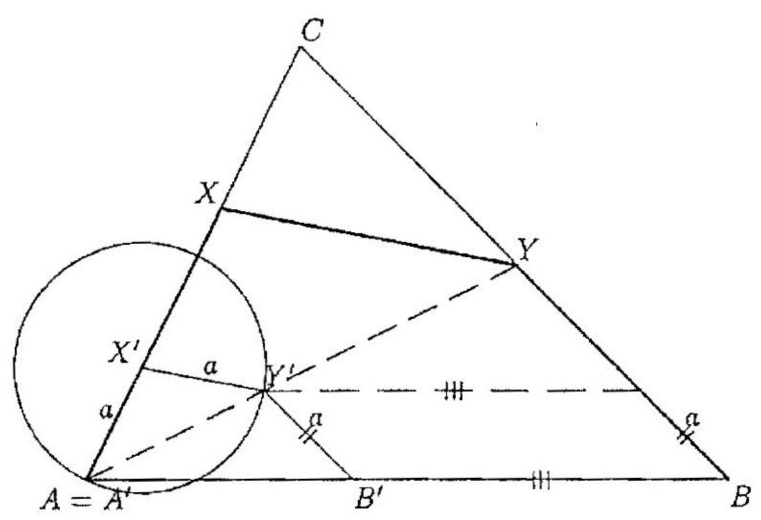
Obr. 62

o **Příklad 38.** Na stranách AC, BC trojúhelníku ABC najděte po řadě body X, Y tak, aby $|AX| = |XY| = |YB|$.

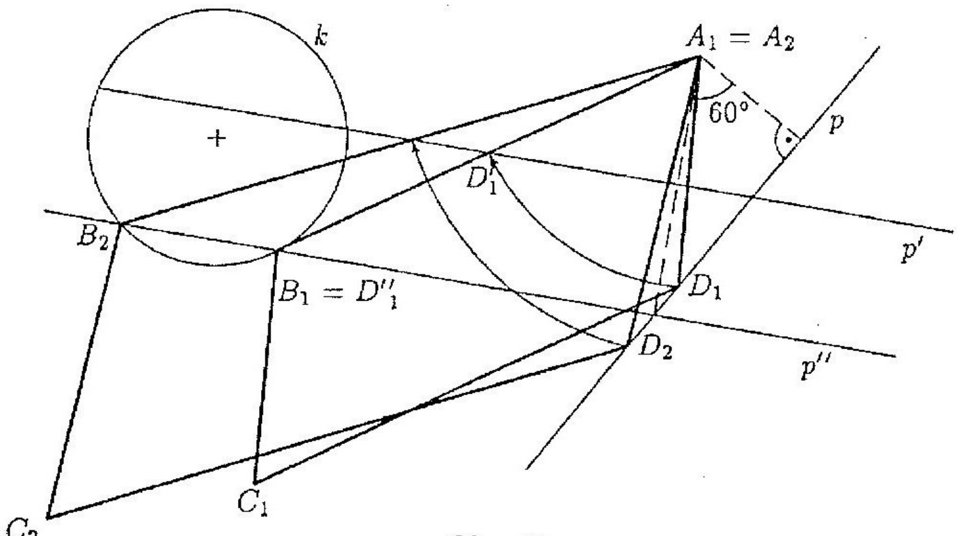
Řešení. Nejprve sestrojíme pomocný čtyřúhelník $A'X'Y'B'$, jehož tři strany mají zvolenou délku a (obr. 63). Pak stejnolehlostí se středem v bodě A vzniknou hledané body X, Y.

o **Příklad 39.** Je dána kružnice k, přímka p a bod A. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, který má úhel $\alpha = 60°$ a o jehož stranách platí $|AB| = 2 \cdot |BC|$, tak, že bod B leží na kružnici k a bod D na přímce p.

Řešení. Nejprve otočíme přímku p o úhel 60° (a také o $-60°$) kolem bodu A; dostaneme přímku p'. Tu zobrazíme ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem 2 na přímku p''. V tomto složeném zobrazení postupně přejde bod D v bod D$'$ a ten pak v bod D'', což je vlastně bod B. Další konstrukce je zřejmá z obr. 64.



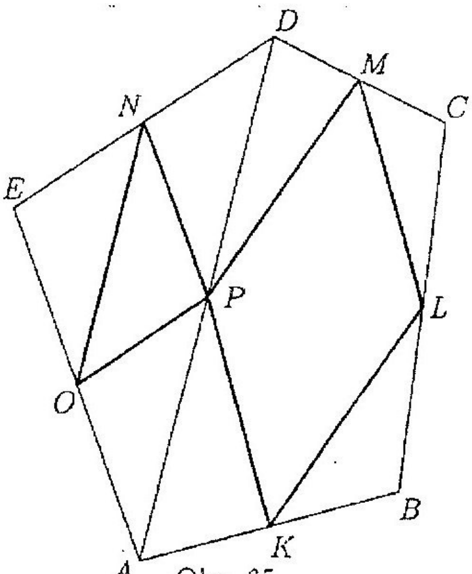
Obr. 63



Obr. 64

o **Příklad 40.** Sestrojte pětiúhelník, jsou-li dány středy všech jeho stran.

Řešení. Označme K, L, M, N, O po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA pětiúhelníku $ABCDE$. Všimněme si nejprve čtyřúhelníku $ABCD$ a označme ještě P střed úsečky DA. Body K, L, M, P tvoří vrcholy rovnoběžníku, neboť úsečky KL a MP jsou střední příčky trojúhelníků ABC a ACD, takže jsou rovnoběžné s úsečkou AC a mají poloviční délku než úsečka AC. Stejně tak úsečky LM a KP (obr. 65). Dále vidíme, že úsečka NO je střední příčkou trojúhelníku ADE. Tedy sestrojíme nejprve bod P, potom úsečku AD, která má dvojnásobnou délku než úsečka NO a je s ní rovnoběžná. Potom už lehce doplníme body B, C, E.



Obr. 65

---

o **Cvičení 1.** Sestrojte ABC, znáte-li velikosti úhlů α, β a těžnice t_c.

o **Cvičení 2.** Jsou dány různoběžné přímky p, q a bod A, který neleží na žádné z nich. Najděte na přímce p bod P a na přímce q bod Q tak, aby body P, Q, A ležely na jedné přímce a platilo $|QA| = 3 \cdot |PA|$.

o **Cvičení 3.** Do daného trojúhelníku vepište trojúhelník, jehož strany jsou rovnoběžné s předem danými přímkami p_1, p_2, p_3.

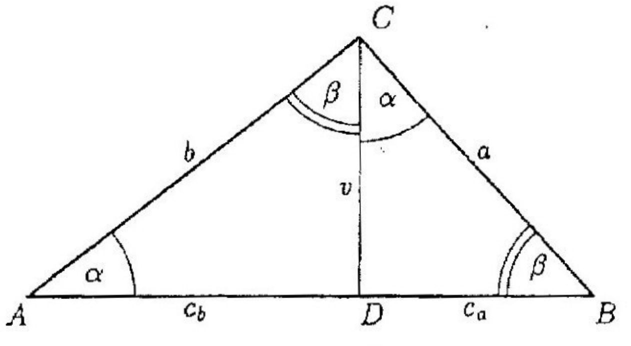
o **Cvičení 4.** Je dán čtyřúhelník $AMBN$. Sestrojte body X, Y po řadě na přímkách AM, BN tak, aby byly rovnoběžné přímky YX a BM a aby přímka AB půlila úsečku XY.

o **Cvičení 5.** Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodě A. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby bod B patřil kružnici k_1, bod D kružnici k_2 a aby pro délky stran platilo $|BA| = 2 \cdot |AD|$.

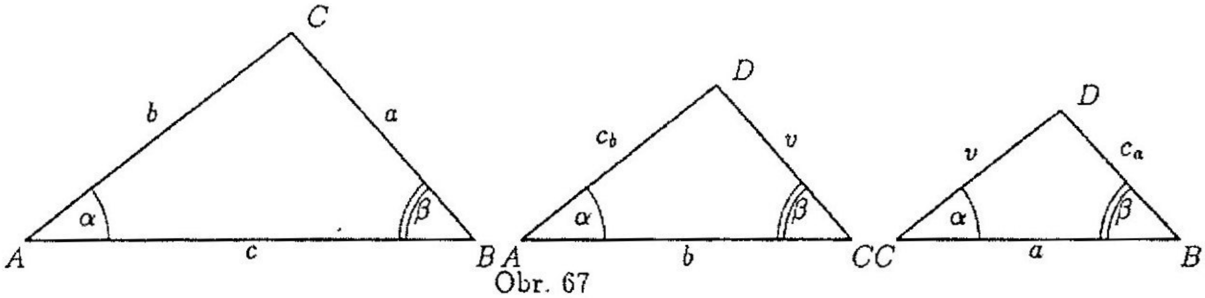
o **Cvičení 6.** Sestrojte sedmiúhelník, jsou-li dány středy všech jeho stran.

12. Euklidovy věty. Pythagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C vedeme bodem C výšku na přeponu AB. Patu této výšky označíme D a označíme $|DA| = c_b$, $|DB| = c_a$, $|CD| = v$ (obr. 66). Označíme-li ještě α, β velikosti úhlů v trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, je $\alpha + \beta = 90°$. Součet velikostí ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku ADC se také rovná 90°, proto je $|\sphericalangle ACD| = \beta$; podobně ukážeme, že $|\sphericalangle DCB| = \alpha$. Vidíme, že každé dva z pravoúhlých trojúhelníků ABC, ACD, CBD jsou podobné (obr. 67).



Obr. 66



Obr. 67

Proto platí $\dfrac{b}{c} = \dfrac{c_b}{b}$, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c_a}{a}$, $\dfrac{c_b}{v} = \dfrac{v}{c_a}$. Odtud plynou následující věty.

Euklidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku: $b^2 = cc_b$, $a^2 = cc_a$

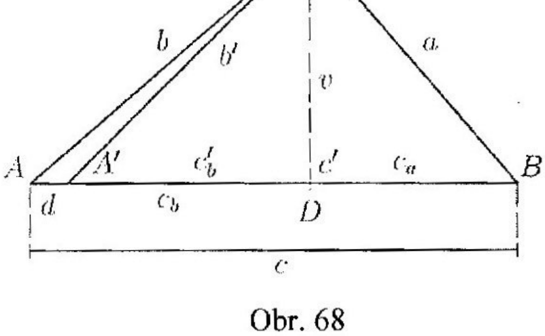
Euklidova věta o výšce pravoúhlého trojúhelníku: $v^2 = c_a c_b$

Sečtením vztahů v Euklidových větách o odvěsnách dostaneme $a^2 + b^2 = c\left(c_a + c_b\right) = c^2$.

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$

Pythagorova věta říká, že v každém pravoúhlém trojúhelníku se součet druhých mocnin délek odvěsen rovná druhé mocnině délky přepony.

Zvolme libovolný trojúhelník ABC, ve kterém výška procházející bodem C protíná přímku AB ve vnitřním bodě D úsečky AB, a označme délky jednotlivých úseček podle obr. 68. Dokázali jsme toto tvrzení: Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, pak platí $a^2 = cc_a$, $v^2 = c_a c_b$, $a^2 + b^2 = c^2$. Platí však i tvrzení obrácená – je-li splněna některá z posledních tří rovností, pak je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým



Obr. 68

úhlem při vrcholu C. To znamená, že platí též obrácená Euklidova věta o odvěsně, obrácená Euklidova věta o výšce a obrácená věta Pythagorova. Nyní tyto obrácené věty dokážeme. Využijeme přitom toho, že jsme se již přesvědčili o platnosti Euklidových vět a Pythagorovy věty.

Nechť v libovolném trojúhelníku ABC platí $v^2 = c_a c_b$. Veďme bodem C kolmici k přímce BC, její průsečík s přímkou AB označme A' (ten existuje a leží na polopřímce DA, protože úhel $A'BC$ je ostrý), vzdálenost $|DA'|$ označme c_b' (obr. 68). Trojúhelník $A'BC$ je pravoúhlý, proto platí $v^2 = c_a c_b'$. Protože je také $v^2 = c_a c_b$, je $c_b' = c_b$, tedy $A' = A$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

Nechť v trojúhelníku ABC platí $a^2 = cc_a$. Stejně jako v předcházejícím případě sestrojíme bod A'. Označme c' délku úsečky BA'. Trojúhelník $A'BC$ je pravoúhlý, tedy $a^2 = c_a c'$, $c' = c$, a proto $A' = A$. Opět vidíme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Dokážeme ještě obrácenou větu Pythagorovu. Nechť tedy v trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$. Opět sestrojíme bod A' a označíme ještě $|CA'| = b'$, $|AA'| = d$. Pokud je bod A' bodem úsečky AD, je $c_b' = c_b - d$, $c' = c - d$. Z pravoúhlých trojúhelníků ADC, $A'DC$, $A'CB$ plyne podle Pythagorovy věty

$$b^2 = v^2 + c_b^2, \qquad b'^2 = v^2 + c_b'^2, \qquad c'^2 = a^2 + b'^2.$$

Použijeme-li ještě vztah $c^2 = a^2 + b^2$, dostaneme dvojici rovností

$$(c-d)^2 = a^2 + v^2 + (c_b - d)^2,$$
$$c^2 = a^2 + v^2 + c_b^2;$$

po odečtení dostaneme $cd = c_b d$. Protože je $c \neq c_b$, musí být $d = 0$, tedy $A' = A$. Stejný výsledek bychom dostali, kdybychom předpokládali, že bod A' leží na polopřímce opačné k polopřímce AD. Pak by bylo $c_b' = c_b + d$, $c' = c + d$ a opět bychom dostali $d = 0$, tj. $A' = A$. Je tedy trojúhelník ABC pravoúhlý. Tím jsme dokázali i obrácenou větu Pythagorovu. Platí tudíž: Trojúhelník o stranách a, b, c je právě tehdy pravoúhlý s pravým úhlem proti straně c, jestliže $a^2 + b^2 = c^2$.[1]

Pythagorovu větu jsme dokázali pomocí Euklidovy věty o odvěsně. Můžeme postupovat též obráceně. Ukážeme, jak vyplývá platnost Euklidových vět z věty Pythagorovy. Napíšeme tvrzení Pythagorovy věty pro všechny tři pravoúhlé trojúhelníky z obr. 66:

$$a^2 + b^2 = (c_a + c_b)^2 \qquad v^2 + c_a^2 = a^2 \qquad v^2 + c_b^2 = b^2$$

Sečteme-li všechny tři rovnosti, dostaneme Euklidovu větu o výšce. Odečteme-li od součtu prvních dvou rovností rovnost třetí, dostaneme Euklidovu větu o odvěsně.

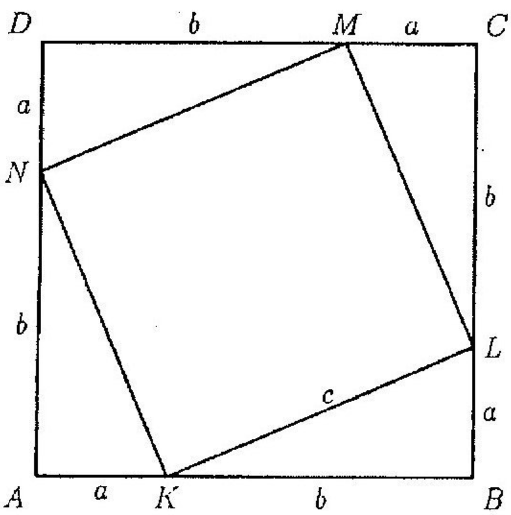
Na závěr ukážeme ještě dva elementární důkazy Pythagorovy a Euklidovy věty o odvěsně, ke kterým je třeba znát jen vzorce pro obsah trojúhelníku a pravoúhelníku.

Zvolme čtverec $ABCD$ o straně délky $a + b$, na jeho stranách zvolme podle obr. 69 body K, L, M, N tak, aby $|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = a$. Pak $|KB| = |LC| = |MD| = |NA| = b$. Trojúhelníky KBL, LCM, MDN a NAK jsou podle věty (*sus*) shodné; označme $c = |KL| = |LM| = |MN| = |NK|$. Obsah $(a+b)^2$ čtverce $ABCD$ se rovná součtu obsahu c^2 čtverce $KLMN$ a obsahů čtyř pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách délek a, b, tedy po-

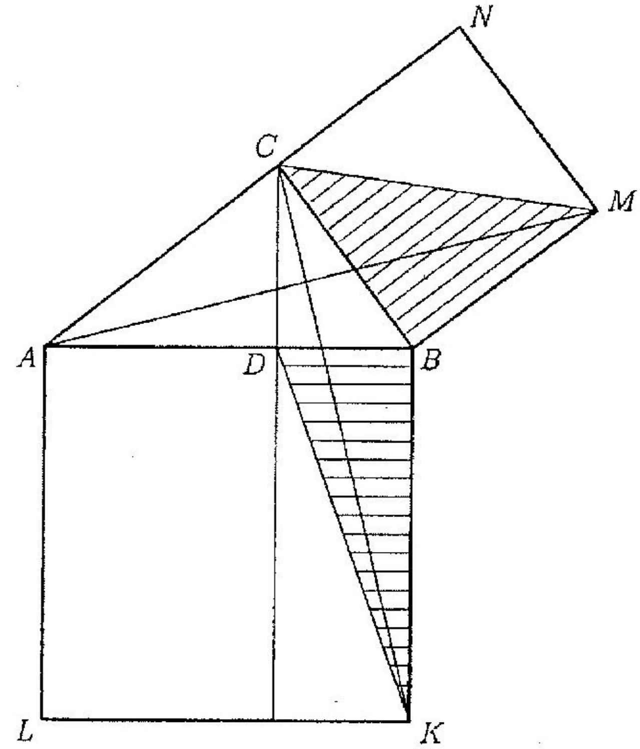
[1] To je věta, která potrápila již mnoho studentů všech dob, prý byla známa již v Babylónu kolem roku 1950 před n.l. a je i dnes oblíbeným objektem, na kterém se ilustruje v různých humoristických povídkách a filmech obtížnost a nezáživnost matematiky. Měla však i své praktické uplatnění při vyměřování pravých úhlů, protože trojúhelník o stranách 3, 4, 5 je podle obrácené Pythagorovy věty pravoúhlý.

stupně

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2},$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Obr. 69



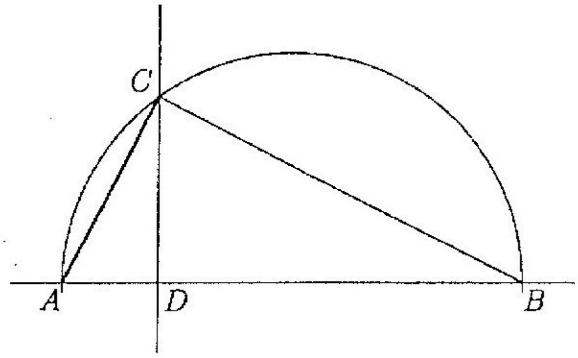
Obr. 70

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 70). Sestrojme v polorovině opačné k polorovině ABC čtverec $ABKL$ a v polorovině opačné k polorovině BCA čtverec $CBMN$. Z vět o shodnosti trojúhelníků plyne, že trojúhelníky ABM a KBC jsou shodné, a mají tudíž shodné obsahy. Veďme bodem C kolmici k přímce AB, její patu označme D. Protože $CD \parallel BK$, rovnají se obsahy trojúhelníků KBC a KBD. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, proto leží body A, C, N v přímce; ta je rovnoběžná s přímkou BM. Proto se sobě rovnají obsahy trojúhelníků ABM a CBM, tedy $\frac{1}{2}cc_a = \frac{1}{2}a^2$, tj. $a^2 = cc_a$, což je tvrzení věty Euklidovy o odvěsně.

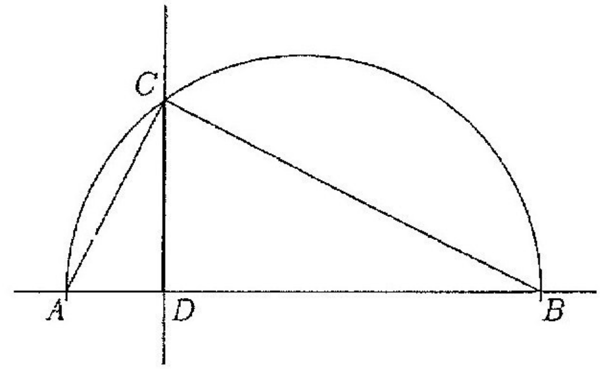
o **Příklad 41.** Sestrojte úsečku délky $\sqrt{5}$, je-li dána úsečka délky 1.

Řešení. Sestrojíme dvě kolmé přímky s průsečíkem P, na jedné naneseme od bodu P úsečku délky 1, dostaneme bod A, na druhé zvolíme bod B tak, aby $|PB| = 2$. Podle Pythagorovy věty je $|AB| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Můžeme také použít Euklidovu větu o odvěsně. Na přímce zvolíme body A, B tak, aby $|AB| = 5$, na úsečce AB zvolíme bod D tak, aby $|AD| = 1$ (obr. 71). Bodem D vedeme kolmici k přímce AB, na ní zvolíme bod C tak, aby byl úhel ACB pravý. Pak je $|AC|^2 = |AB|\cdot|AD| = 5$, $|AC| = \sqrt{5}$. Bod C sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem AB. To však zdůvodníme až v části o kružnici. Lze použít také Euklidovu větu o výšce. Na přímce zvolíme za sebou body A, D, B tak, aby $|AD| = 1$ a $|DB| = 5$. Stejně jako v předchozím případě sestrojíme bod C tak, aby úhel ACB byl pravý. Pak platí $|DC|^2 = |AD|\cdot|DB| = 5$, tedy $|DC| = \sqrt{5}$ (obr. 72).

Poznámka. Sestrojili jsme úsečku délky $\sqrt{5}$, když jsme znali úsečku délky 1. Přitom jsme použili jen pravítka a kružítka. Konstrukce, při kterých použijeme jen pravítka a kružítka, se nazývají **euklidovské konstrukce**. Konstrukcí se v geometrii rozumí zpravidla euklidovské konstrukce.



Obr. 71



Obr. 72

o **Příklad 42.** Je dán obdélník $ABCD$ o stranách délek a, b ($a > b$). Vypočtěte vzdálenost bodu B od úhlopříčky AC a vzdálenost pat kolmic vedených z bodů B a D na tuto úhlopříčku.

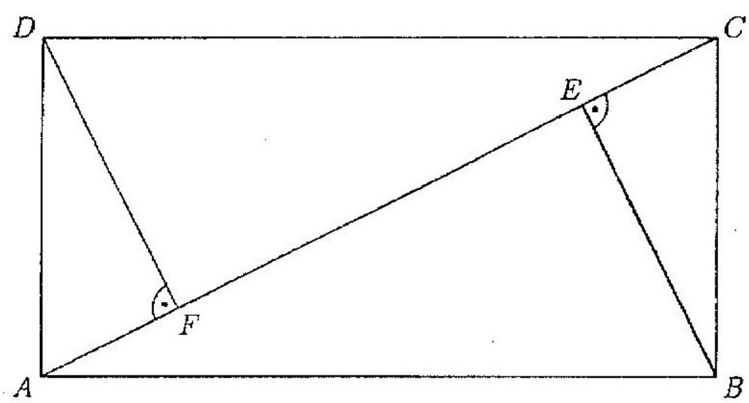
Řešení. Paty kolmic z bodů B a D na úhlopříčku AC označme E, F (obr. 73). Postupně platí:

$$|AF| \cdot |AC| = |AD|^2 \text{ (Euklidova věta o odvěsně)}$$

$$|AF| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = |EC|$$

$$|BE| = \sqrt{|BC|^2 - |EC|^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|EF| = \sqrt{a^2+b^2} - 2 \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Obr. 73

o **Cvičení 1.** Je dána úsečka jednotkové délky. Užitím Euklidových vět a Pythagorovy věty sestrojte úsečky délek $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$.

o **Cvičení 2.** Jsou dána kladná reálná čísla u, v ($u > v$). Dokažte, že trojúhelník o stranách délek $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ je pravoúhlý.

o **Cvičení 3.** Je dán pravoúhlý trojúhelník o stranách délek a, b, c, kde c je délka přepony. Dokažte, že existují kladná reálná čísla u, v taková, že platí $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$.

o **Cvičení 4.** Do čtverce, jehož strana má délku a, je vepsán rovnostranný trojúhelník tak, že jeden jeho vrchol je ve vrcholu čtverce. Vypočítejte délku strany rovnostranného trojúhelníku.

o **Cvičení 5.** V rovnoramenném trojúhelníku ABC jsou známy velikosti výšek v_a, v_c. Vypočtěte délku základny AB.

o **Cvičení 6.** Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod M, který má od bodu S vzdálenost $d > r$. Z bodu M vedené tečny t_1, t_2 se dotýkají kružnice k v bodech T_1, T_2. Určete délku tětivy T_1T_2 a její vzdálenost od středu kružnice k.

o **Cvičení 7.** Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li $t_a = 10$, $t_b = 4\cdot\sqrt{10}$.

o **Cvičení 8.** Dokažte, že platí vztah $\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, kde a, b jsou délky odvěsen a v_c výška pravoúhlého trojúhelníku ABC.

o **Cvičení 9.** Dokažte, že mezi délkami stran trojúhelníku ABC platí vztah $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, platí-li pro jeho úhel $|\sphericalangle BAC| = 60°$.

13. Konstrukční úlohy řešené pomocí výpočtu

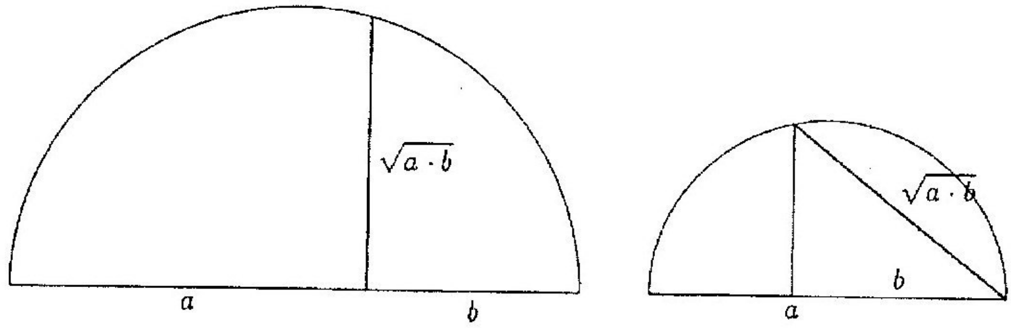
V některých konstrukčních úlohách při konstrukci úseček je výhodné předem spočítat délku oné úsečky a tu pak zkonstruovat z algebraického výrazu. Zde budeme k sestrojování úseček užívat výše zmíněných euklidovských konstrukcí; vyjdeme z vět Euklidových, věty Pythagorovy a ze stejnolehlosti.

Abychom uměli zkonstruovat složitější algebraické výrazy, naučíme se nejprve sestrojit jednodušší výrazy.

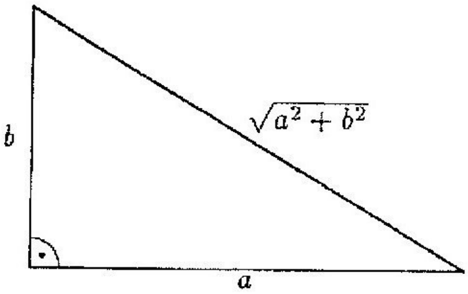
o **Příklad 43.** Jsou dány úsečky délek a, b, c, $a > b$, a úsečka délky 1. Sestrojte úsečky délek

a) $x = \sqrt{a\cdot b}$, b) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, c) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, d) $x = a\cdot b$, e) $x = \frac{a\cdot b}{c}$, f) $x = \frac{1}{a}$.

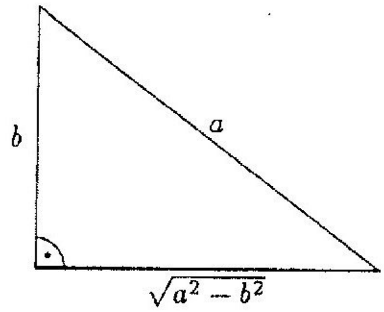
Řešení. Nebudeme podrobně popisovat konstrukce, vše je patrné z obr. 74a–f. V případě d) přepíšeme rovnost na tvar $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$, v případě e) na tvar $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, v případě f) na tvar $\frac{x}{1} = \frac{1}{a}$.



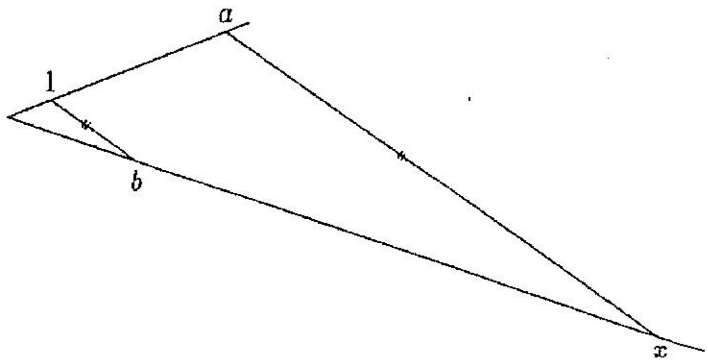
Obr. 74a - 2 varianty



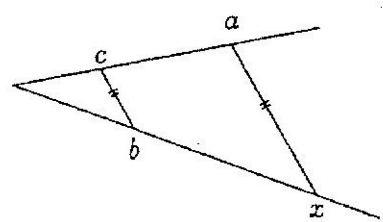
Obr. 74b



Obr. 74c

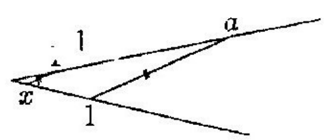


Obr. 74d



Obr. 74e

Dále konstruujme složitější algebraické výrazy.

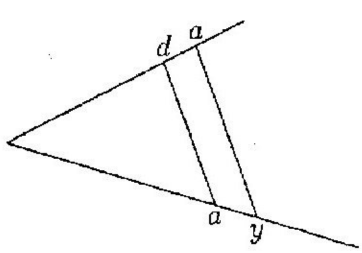


Obr. 74f

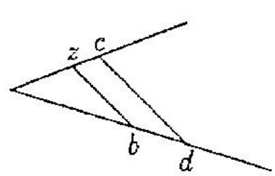
o **Příklad 44.** Jsou dány úsečky délek a, b, c, d, $a > b$, $a > c$, a úsečka délky 1. Sestrojte úsečky délek

a) $x=\dfrac{a^2-bc}{d}$, b) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$, c) $x=\sqrt{2a^2+bc}$, d) $x=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

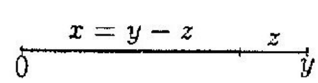
Řešení. V případě a) označíme $y=\dfrac{a^2}{d}$, $z=\dfrac{bc}{d}$, $x=y-z$ (obr. 75a,b,c). V případě b) označíme $y=\dfrac{ab}{d}$, $x=\sqrt{yc}$; dále je vše patrné z předchozího příkladu 43. V případě c) označíme $y^2=bc$ (tj. $y=\sqrt{bc}$), $z^2=a^2+a^2$ (tj. $z=\sqrt{a^2+a^2}$), $x=\sqrt{z^2+y^2}$; i zde se odvoláváme na příklad 43. V případě d) označíme $y=\sqrt{3}$, $z=\sqrt{2+y}=\sqrt{(2+y)\cdot 1}$, $x=az$ (tj. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{1}$); řešení vidíme na obr. 76a,b.



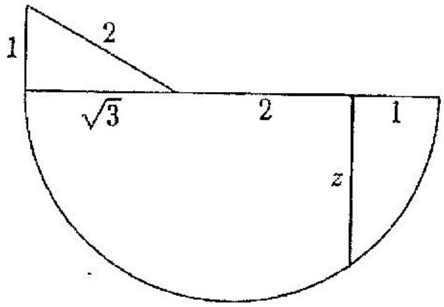
Obr. 75a



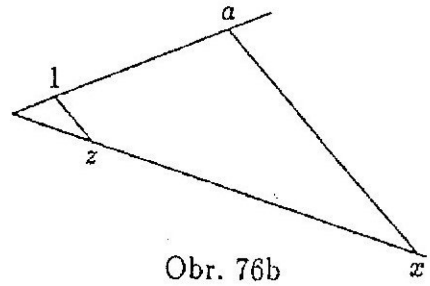
Obr. 75b



Obr. 75c

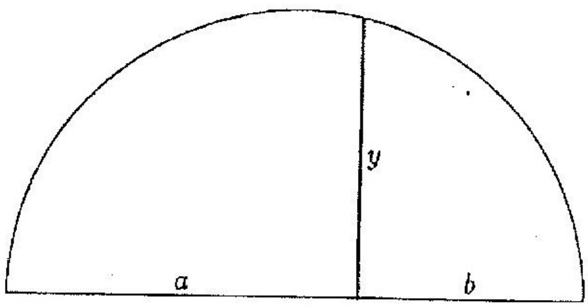


Obr. 76a

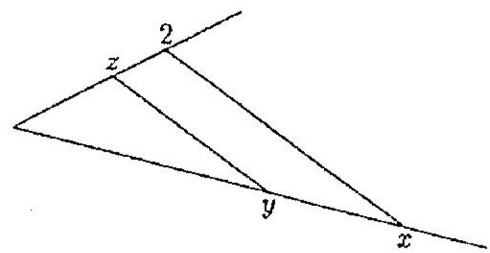


Obr. 76b

Po těchto pomocných příkladech uvedeme využití konstrukcí úseček v dalších úlohách.



Obr. 77a



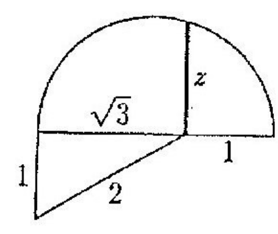
Obr. 77c

o **Příklad 45.** Proměňte daný obdélník na rovnostranný trojúhelník stejného obsahu.

Řešení. Nechť obdélník má strany délek a, b a nechť hledaný rovnostranný trojúhelník má stranu délky x. Z rovnosti obsahů $ab=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x$ plyne $x=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\cdot\sqrt{ab}$. Postupně konstruujeme výrazy

$y=\sqrt{ab}$, $\quad z=\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot 1}$,

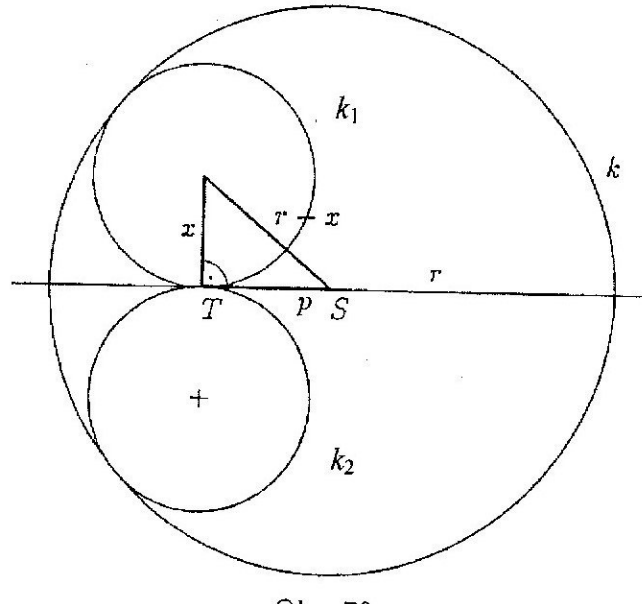
$x=\frac{2}{z}\cdot y$ (tj. $\frac{x}{2}=\frac{y}{z}$) (obr. 77a,b,c).



Obr. 77b

o **Příklad 46.** Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r, na jejímž průměru je zvolen bod T, pro který platí $|ST|=p$, $0<p<r$. Sestrojte dvě shodné kružnice k_1, k_2, aby se dotýkaly v bodě T a každá z nich ještě kružnice k.

Řešení. Označme x poloměr hledaných kružnic k_1, k_2. Z obr. 78 vidíme rovnost $(x-r)^2=x^2+p^2$, tedy $x=\frac{r^2-p^2}{2r}$, neboli $\frac{x}{r+p}=\frac{r-p}{2r}$. Odtud už lehce sestrojíme úsečku délky x.

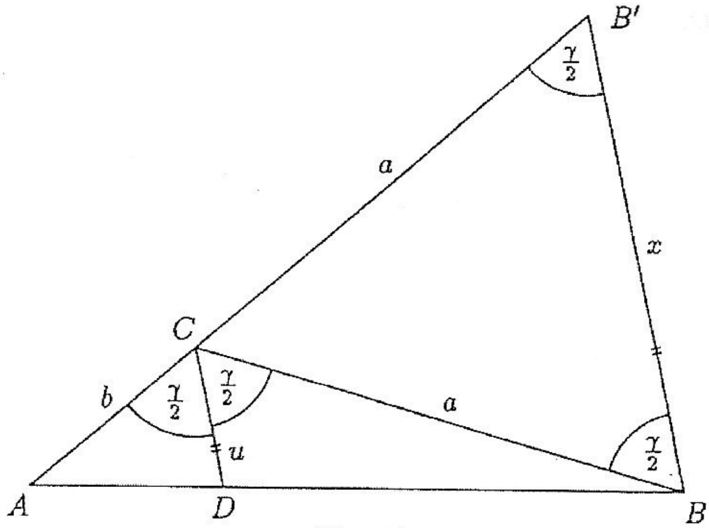


Obr. 78

Je možné též postupovat takto: označíme $z^2 = r^2 - p^2$ (tj. $z = \sqrt{r^2 - p^2}$), $x = \frac{z^2}{2r}$ (tj. $\frac{x}{z} = \frac{z}{2r}$).

o **Příklad 47.** Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky a, b jeho stran a délka u osy úhlu sevřeného stranami BC a AC.

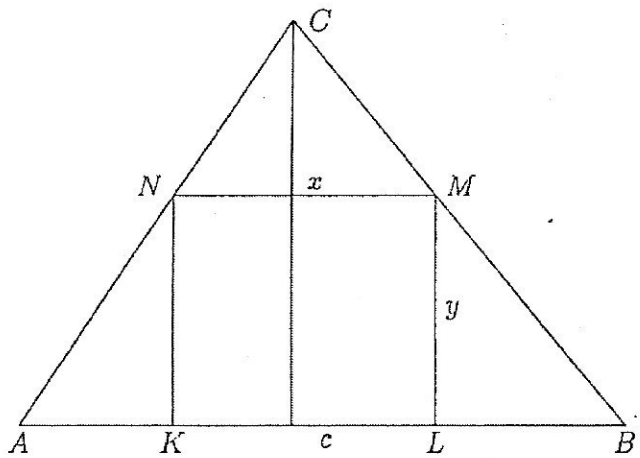
Řešení. Z obr. 79 je vidět, že trojúhelníky ADC a ABB' jsou podobné, odkud $\frac{x}{u} = \frac{a+b}{b}$. Takže nejprve sestrojíme úsečku délky x a pak sestrojíme trojúhelníky $BB'C$ a ABC.



Obr. 79

o **Příklad 48.** Do trojúhelníku ABC s ostrými úhly při vrcholech A, B, u něhož je dána délka $|AB| = c$ a výška v_c, vepište obdélník $KLMN$ tak, že strana KL leží na straně AB a jeho obvod je $2p$, kde $v_c > p > c$, nebo $c > p > v_c$.

Řešení. Z podobnosti trojúhelníků ABC a NMC (obr. 80) plyne $c : x = v_c : (v_c - y)$ a podle zadání platí $x + y = p$. Odtud $y = v_c \cdot \frac{p-c}{v_c - c}$. Konstrukce úsečky délky y je zřejmá a též konstrukce obdélníku $KLMN$.



Obr. 80

o **Příklad 49.** Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li velikosti jeho výšek v_a, v_b, v_c.

Řešení. Jedna možnost využije vztahu $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$. Sestrojíme tedy úsečky délek $\frac{1}{v_a}$, $\frac{1}{v_b}$, $\frac{1}{v_c}$ a dále postupujeme podle příkladu 34. V druhém případě označíme výšky w_a, w_b, w_c v trojúhelníku se stranami délek v_a, v_b, v_c. Zde platí $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c} = w_a : w_b : w_c$, takže opět užijeme příklad 34.

---

o **Cvičení 1.** Jsou dány úsečky délek a, b, c, d, e a úsečka délky 1. Sestrojte úsečky délek

a) $x = \frac{ac}{d} \cdot \sqrt{\frac{ab}{de}}$, b) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$, $a > d$, c) $x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a - b}}$, $a > b$,

d) $x = a \cdot \sqrt{6} + \sqrt{bc\sqrt{2}}$.

o **Cvičení 2.** Jsou dány úsečky délek a, c, m. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ o základnách AB, CD tak, aby $|AB| = a$, $|CD| = c$ a aby se jeho obsah rovnal obsahu čtverce o straně délky m.

o **Cvičení 3.** Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li dán obvod o trojúhelníku a výška v_c.

o **Cvičení 4.** Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jsou-li dány délky $m = c - a$, $n = c - b$.

o **Cvičení 5.** Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Rozdělte tento trojúhelník kolmicí na stranu AB na dvě části, které mají stejný obsah.

14. Věta Menelaova a věta Cèvova

Věta Menelaova (Menelaos žil kolem roku 100 n.l.). *V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Leží-li body K, L, M na společné přímce, pak platí*

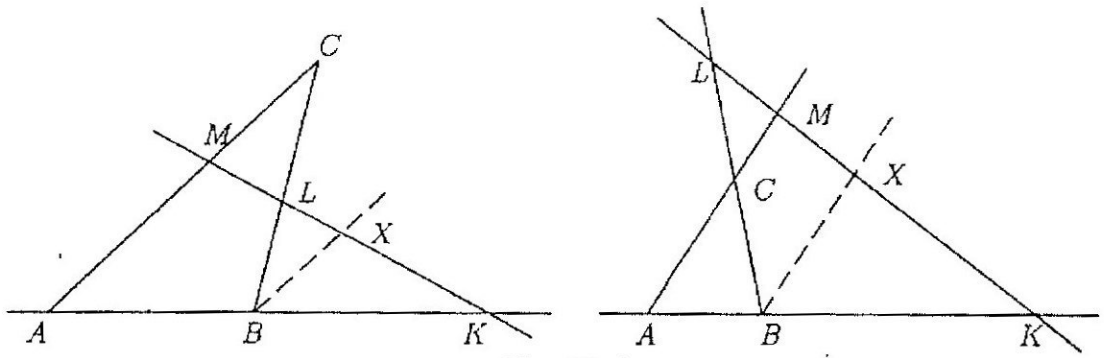
1. z bodů K, L, M patří trojúhelníku buď právě dva nebo žádný,

2. $\dfrac{|AK|}{|BK|}\cdot\dfrac{|BL|}{|CL|}\cdot\dfrac{|CM|}{|AM|}=1$.

Obráceně, platí-li tvrzení 1 a 2, leží body K, L, M na jedné přímce.

Důkaz. Předpokládejme, že body K, L, M leží na přímce. Pak zřejmě platí tvrzení 1. Nechť například body M, L patří trojúhelníku (obr. 81a) nebo žádný z bodů nepatří trojúhelníku (obr. 81b). Veďme bodem B rovnoběžku s přímkou AC a označme X její průsečík s přímkou KL. Pak existuje stejnolehlost se středem K zobrazující bod B na bod A a bod X na bod M, a proto $\dfrac{|AK|}{|BK|}=\dfrac{|AM|}{|BX|}$. Obdobně díky stejnolehlosti se středem L platí $\dfrac{|BL|}{|CL|}=\dfrac{|BX|}{|CM|}$.
Vynásobením těchto dvou rovnic dostaneme dokazovaný vztah 2.

Dokážeme nyní větu obrácenou. Předpokládejme tedy, že platí tvrzení 1 a 2. Můžeme ještě předpokládat, že buď patří trojúhelníku body M, L a bod K ne, nebo nepatří trojúhelníku žádný z bodů K, L, M. Kdyby byla přímka ML rovnoběžná s přímkou AB, platilo by $\dfrac{|CM|}{|AM|}=\dfrac{|CL|}{|BL|}$ a podle tvrzení 2 by bylo $|AK| = |BK|$, což nemůže platit, protože by bod K musel být středem úsečky AB, avšak bod K není vůbec bodem úsečky AB. Přímky ML a AB jsou tudíž různoběžné, jejich průsečík označíme K'. Body M, L, K' leží na přímce, proto



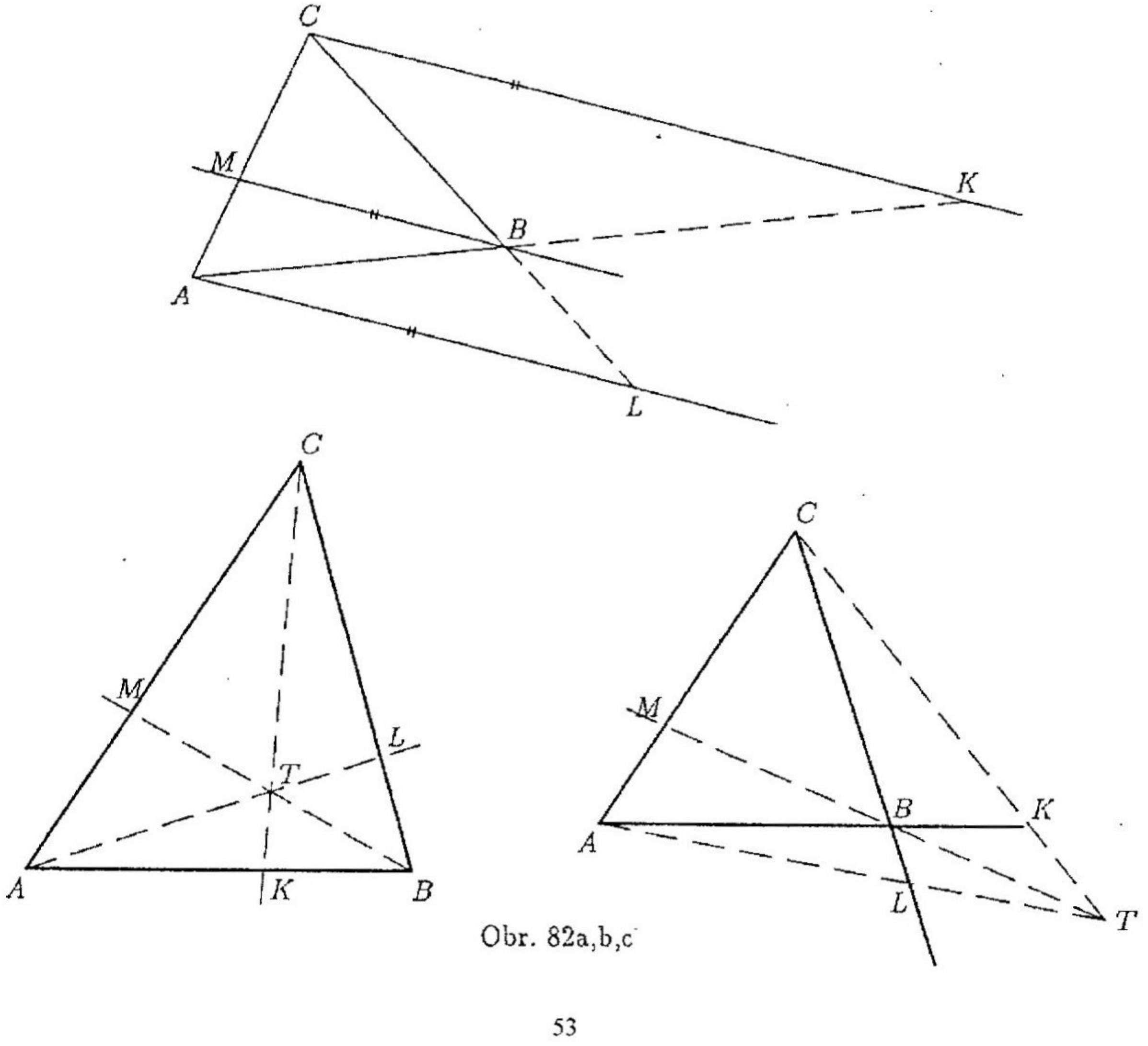
Obr. 81a,b

podle první části věty, kterou jsme už dokázali, platí $\frac{|AK'|}{|BK'|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$. Jelikož platí také tvrzení 2, musí být $\frac{|AK'|}{|BK'|} = \frac{|AK|}{|BK|}$. Je-li tato hodnota větší než 1, leží body mimo K, K' oba na polopřímce AB mimo úsečku AB. Nechť je například $|AK'| \geq |AK|$, a tedy $|AK'| = |AK| + |KK'|$, $|BK'| = |BK| + |KK'|$. Dosazením do výše uvedené rovnosti dvou zlomků dostaneme $|KK'| = 0$, tedy $K = K'$. Tentýž výsledek bychom dostali i v případě $|AK'| \leq |AK|$, nebo pro $\frac{|AK|}{|BK|} < 1$. A protože body M, L, K' leží v přímce a $K = K'$, dokázali jsme, že body K, L, M leží v přímce.

Věta Cèvova (čti čevova, italský matematik Giovanni Cèva ji uveřejnil roku 1678). *V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku ABC. Procházejí-li přímky CK, AL, BM jedním bodem, nebo jsou-li rovnoběžné, pak platí*

1. *právě jeden z bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC, nebo každý z nich je bodem trojúhelníku ABC,*
2. $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$.

Obráceně, platí-li tvrzení 1 a *2, procházejí přímky CK, AL, BM jedním bodem, nebo jsou spolu rovnoběžné.*



Obr. 82a,b,c

Důkaz. Předpokládejme, že přímky CK, AL, BM jsou spolu rovnoběžné, nebo procházejí jedním bodem. Pak zřejmě platí tvrzení 1; k přesnému důkazu bychom potřebovali užít některá tvrzení o uspořádání. Jsou-li přímky CK, AL, BM spolu rovnoběžné, jenom jeden z bodů K, L, M patří trojúhelníku ABC; nechť je to například bod M. Pak existuje stejnolehlost zobrazující trojúhelník CMB na trojúhelník CAL, a druhá stejnolehlost zobrazující trojúhelník AMB na trojúhelník ACK. Proto platí (obr. 82a) $\frac{|AK|}{|BK|}=\frac{|CA|}{|CM|}$, $\frac{|BL|}{|CL|}=\frac{|AM|}{|CA|}$. Vynásobením těchto rovností dostaneme už rovnost 2. Nechť procházejí přímky CK, AL, BM společným bodem T (obr. 82b,c). Vezmeme trojúhelník AKC a přímku BM. Aplikujeme-li Menelaovu větu, dostaneme $\frac{|AB|}{|BK|}\cdot\frac{|KT|}{|CT|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=1$. Podobně pro trojúhelník BCK a přímku AL máme $\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CT|}{|KT|}\cdot\frac{|AK|}{|AB|}=1$. Vynásobením těchto dvou rovností dostaneme opět vztah 2, jehož platnost je tím dokázána.

Důkaz obrácené věty je obdobný jako důkaz obrácené části Menelaovy věty.

---

o **Cvičení 1.** Bod K je středem strany AB trojúhelníku ABC, bod L dělí stranu BC v poměru 3 : 1, tj. $|BL| : |CL| = 3 : 1$. Označme M průsečík přímek KL a AC. Určete poměr $|AM| : |AC|$.

o **Cvičení 2.** V předcházejícím cvičení označme T průsečík přímek CK a AL, N průsečík přímek BT a AC. Určete poměr $|AN| : |AC|$.

o **Cvičení 3.** Na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC jsou zvoleny body C_1, A_1, B_1 různé od bodů A, B, C. Předpokládejme, že přímky AB a A_1B_1 nejsou rovnoběžné a označme C_2 jejich průsečík. Obdobně předpokládejme, že A_2 je průsečíkem přímek BC a B_1C_1 a B_2 je průsečíkem přímek AC a A_1C_1. Jestliže procházejí přímky AA_1, BB_1, CC_1 jedním bodem, pak leží body A_2, B_2, C_2 na jedné přímce. Dokažte.

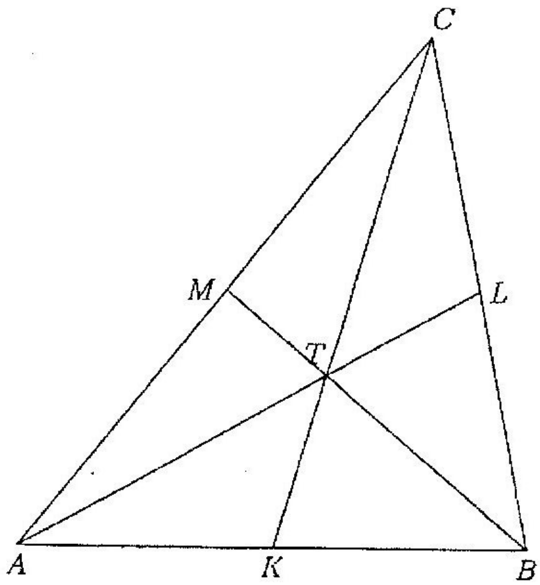
o **Cvičení 4.** Je dán trojúhelník ABC. Přímka p protíná přímky AB, BC, CA postupně v bodech D, E, F a neprochází žádným vrcholem trojúhelníku ABC. Dokažte, že středy P, Q, R úseček DC, AE, BF leží na jedné přímce.

15. Těžnice, osy stran, osy úhlů a výšky v trojúhelníku

Z Cèvovy věty okamžitě plyne, že těžnice trojúhelníku (tj. spojnice vrcholu trojúhelníku se středem protější strany) procházejí jedním bodem (těžištěm trojúhelníku) (obr. 83). Označíme-li K, L, M středy stran AB, BC, CA, je zřejmě $\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=1$, takže podle Cèvovy věty procházejí přímky AL, BM, CK jedním bodem T. Použijeme-li Menelaovu větu na trojúhelník CKB a na přímku AL, na níž leží také bod T, dostaneme $\frac{|KA|}{|BA|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CT|}{|KT|}=1$, takže $|CT| = 2\cdot|TK|$. Podobně bychom dokázali $|AT| = 2\cdot|TL|$, $|BT| = 2\cdot|TM|$. Vidíme, že těžiště T dělí úsečku spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany v poměru 2 : 1.

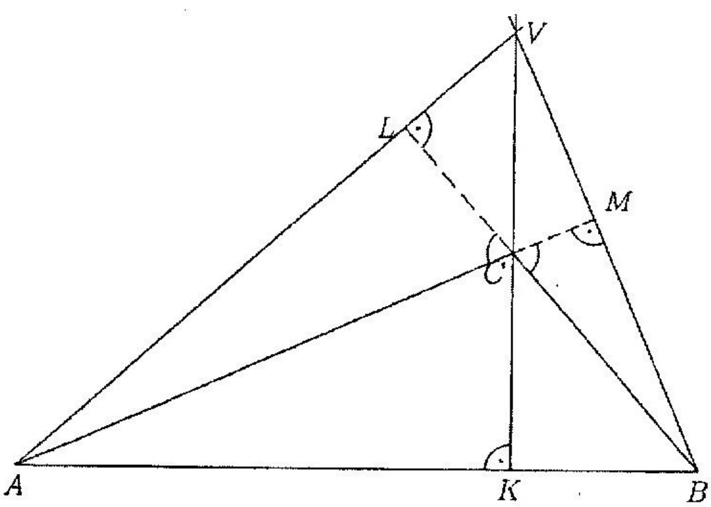
Důkaz předcházejících tvrzení o těžnicích a těžišti bychom mohli též snadno dokázat pomocí stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník LMK, viz příklad 29.

Pomocí Cèvovy věty můžeme také dokázat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě. V pravoúhlém trojúhelníku není co dokazovat. Vezměme proto např. tupoúhlý trojúhelník ABC (obr. 84), paty výšek označíme K, L, M. Trojúhelníky CLA a CMB jsou podobné podle věty (uu), viz příklad 30. Proto $\frac{|CL|}{|CM|}=\frac{|CA|}{|CB|}$. Podobně dostaneme z podobnosti trojúhelníků CKA a BMA rovnost $\frac{|AM|}{|AK|}=\frac{|AB|}{|AC|}$ a z podobnosti trojúhelníků BKC a BLA vztah $\frac{|BK|}{|BL|}=\frac{|BC|}{|BA|}$. Vynásobením těchto tří rovností dostáváme $\frac{|AM|}{|CM|}\cdot\frac{|BK|}{|AK|}\cdot\frac{|CL|}{|BL|}=1$. Podle Cèvovy

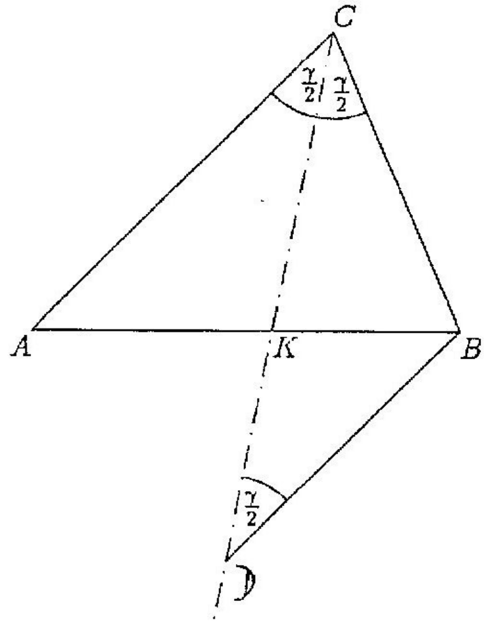


Obr. 83

věty procházejí přímky AL, BM, CK jedním bodem, neboť ještě víme, že z bodů K, L, M jen bod K je bodem trojúhelníku ABC. Podobně bychom postupovali pro trojúhelník ostroúhlý.



Obr. 84

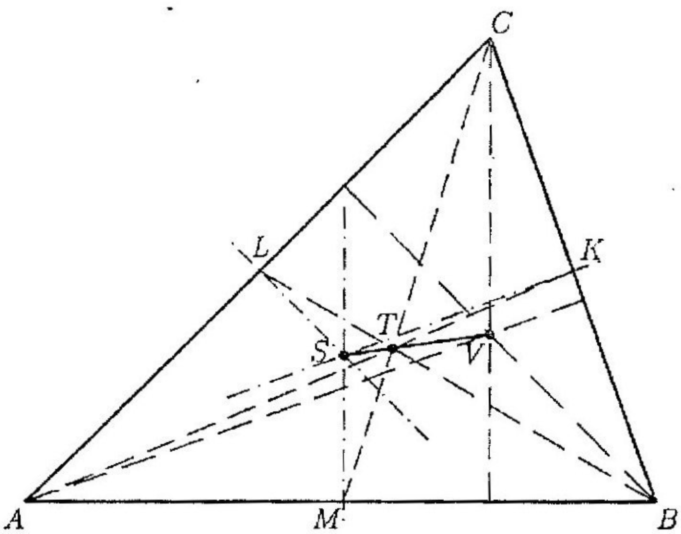


Obr. 85

Také osy vnitřních úhlů trojúhelníku procházejí jedním bodem. Dokážeme toto tvrzení pomocí Cèvovy věty. Označme K průsečík strany AB a osy úhlu ACB (obr. 85). Bodem B vedeme rovnoběžku se stranou AC a průsečík s osou označíme D. Trojúhelníky AKC a BKD jsou stejnolehlé, proto $|AK| : |BK| = |AC| : |BD|$. Trojúhelník CDB je rovnoramenný, protože $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle DCB|$; je tedy $|BD| = |BC|$, a tudíž $|AK| : |BK| = |AC| : |BC|$. Stručně říkáme, že osa úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran. Označíme-li L, M průsečíky os úhlů se stranami BC, AC, je $\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|BC|}{|AB|}=1$, takže přímky AL, BM, CK procházejí jedním bodem (nemohou být rovnoběžné).

Tvrzení, že se osy vnitřních úhlů trojúhelníku protínají v jednom bodě, se dá též dokázat následující úvahou: Na osu úhlu se můžeme dívat jako na množinu bodů, jež mají od obou ramen úhlu stejné vzdálenosti. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v bodě, který má od všech tří stran trojúhelníku stejně velké vzdálenosti.

Obdobně jako pro osy vnitřních úhlů trojúhelníku (tj. bez užití Cèvovy věty) se dá dokázat, že osy stran trojúhelníku procházejí jedním bodem. Osa strany AB trojúhelníku ABC je totiž množinou všech těch bodů v rovině trojúhelníku, které mají od bodů A i B stejné vzdálenosti. Osa úsečky AB prochází středem úsečky AB a je na ni kolmá. Osa úsečky BC nemůže být s osou úsečky AB rovnoběžná, to by musely body A, B, C ležet v přímce. Označme S průsečík os úsečky AB a úsečky BC. Pak má bod S stejnou vzdálenost od bodů A, B a rovněž od bodů B, C, tedy také stejnou vzdálenost od bodů A, C, a proto leží i na ose úsečky AC. Osy všech tří stran trojúhelníku procházejí jedním bodem.



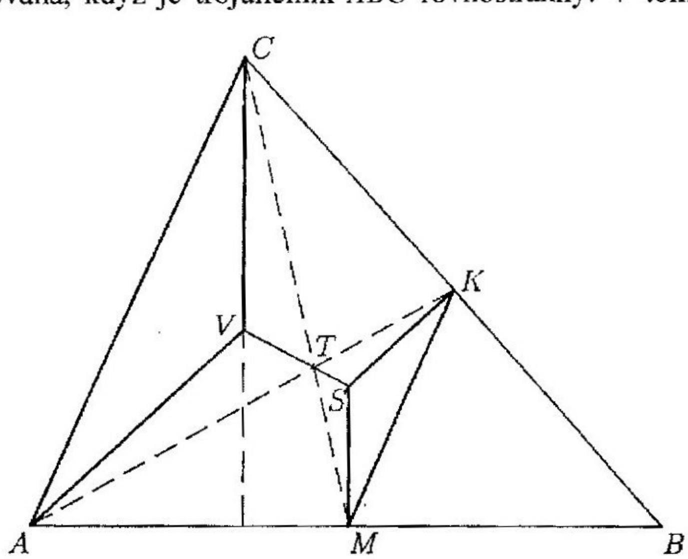
Obr. 86

Stejnolehlost se středem v těžišti T trojúhelníku ABC a koeficientem $k = -\frac{1}{2}$ zobrazuje vrcholy trojúhelníku ABC do středů K, L, M protějších stran (obr. 86). Protože stejnolehlost zobrazuje každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou, zobrazí se výška trojúhelníku procházející bodem C na osu úsečky AB a stejně tak další dvě výšky na zbývající osy stran. A protože osy stran procházejí jedním bodem, procházejí jedním bodem i jejich vzory, tj. výšky. Jejich průsečík označíme V. (Zde je mimochodem podán další důkaz toho, že se výšky, resp. osy stran trojúhelníku protínají v jednom bodě.) Navíc těžiště T leží na úsečce SV a je $|TV| = 2 \cdot |ST|$. Přímka SV, na které leží i těžiště T trojúhelníku, se nazývá **Eulerova přímka**. (Leonhard Euler (čti ojler) byl švýcarský matematik, který však větší část svého života působil v Rusku; žil v letech 1707–1783.)

Eulerova přímka však není definována, když je trojúhelník ABC rovnostranný. V tom případě totiž splývají body S, T, V.

o **Příklad 50.** Na obr. 87 jsou v ostroúhlém trojúhelníku ABC znázorněny středy K, M stran BC, AB a dále průsečík výšek V, těžiště T a průsečík os stran S trojúhelníku ABC. Dokažte podobnost trojúhelníků ACV a KMS. Platí stejná vlastnost v tupoúhlém, resp. pravoúhlém trojúhelníku?

Řešení. Z vlastnosti těžiště trojúhelníku plyne, že trojúhelníky ACV a KMS jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem T.



Obr. 87

o **Cvičení 1.** Prochází-li Eulerova přímka trojúhelníku některým jeho vrcholem, je trojúhelník pravoúhlý nebo rovnoramenný. Dokažte.

o **Cvičení 2.** Dokažte, že bod M trojúhelníku ABC leží na jeho těžnici procházející bodem A právě tehdy, když se sobě rovnají obsahy trojúhelníků ABM a ACM.

o **Cvičení 3.** Na základě výsledku předcházejícího cvičení ukažte, že se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

o **Cvičení 4.** Rozhodněte, zda v každém trojúhelníku leží také průsečík os vnitřních úhlů na Eulerově přímce.

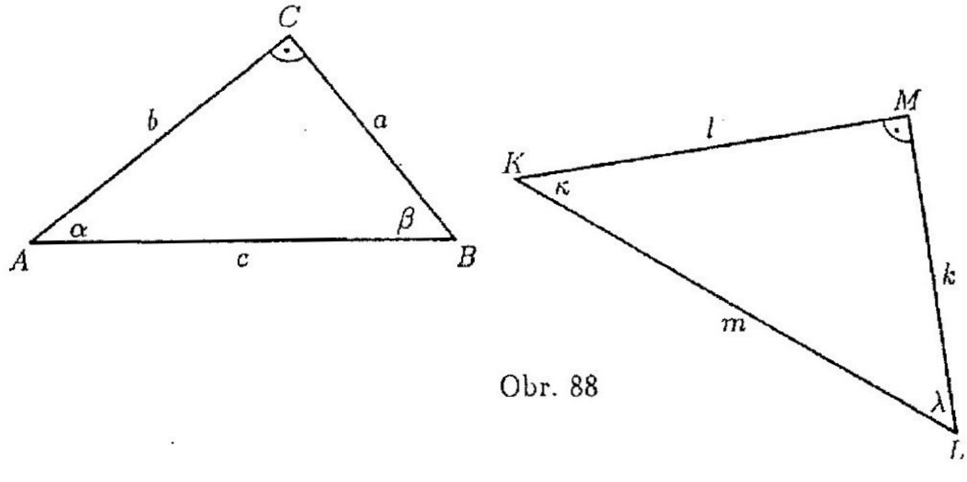
o **Cvičení 5.** Dokažte, že vzdálenost středu S kružnice vepsané trojúhelníku ABC od strany AB je poloviční než vzdálenost průsečíku výšek V od vrcholu C.

16. Goniometrické funkce

Věty o podobnosti trojúhelníků, které jsme uvedli v kapitole 10, samozřejmě také můžeme použít v případě pravoúhlých trojúhelníků ABC a KLM s pravými úhly při vrcholech C a M. Vztah $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle LMK|$ je pak vždy splněn a platí:

Věta: *Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C je podobný trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M, jestliže mají oba trojúhelníky buď shodný poměr délek odvěsen, nebo se shodují v jednom dalším (ostrém) úhlu, nebo mají shodný poměr délek přepony a jedné odvěsny.*

Samozřejmě se dva pravoúhlé trojúhelníky shodují i ve druhém ostrém úhlu, shodují-li se v jednom ostrém úhlu. Shrneme-li tyto výsledky, dostaneme toto tvrzení:



Obr. 88

Věta: *Nechť je ABC pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Označme obvyklým způsobem a, b, c, α, β délky jeho odvěsen, přepony a velikosti ostrých úhlů. Podobně označme k, l, m délky stran pravoúhlého trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M a κ, λ velikosti jeho ostrých úhlů při vrcholech K, L (obr. 88). Pak jsou trojúhelníky ABC a KLM právě tehdy podobné, když platí kterákoliv z těchto podmínek:*

$$\alpha = \kappa, \qquad \frac{a}{b} = \frac{k}{l}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{k}{m}, \qquad \beta = \lambda.$$

Zvláště tedy platí: je-li $\alpha = \kappa$, je

$\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$; *tato hodnota se nazývá* ***tangens*** *úhlu α, značí se tg α,*

$\frac{b}{a} = \frac{l}{k}$; *tato hodnota se nazývá* ***kotangens*** *úhlu α, značí se cotg α,*

$\frac{a}{c} = \frac{k}{m}$; *tato hodnota se nazývá* ***sinus*** *úhlu α, značí se sin α,*

$\frac{b}{c} = \frac{l}{m}$; *tato hodnota se nazývá* ***kosinus*** *úhlu α, značí se cos α.*

Připomeňme některé vztahy mezi goniometrickými funkcemi: Pro každé $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{(plyne z Pythagorovy věty).}$$

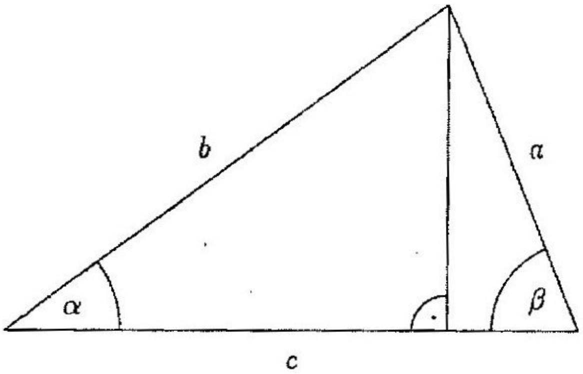
Pro $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ se definuje

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\pi - \alpha), \qquad \cos \alpha = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi - \alpha),$$

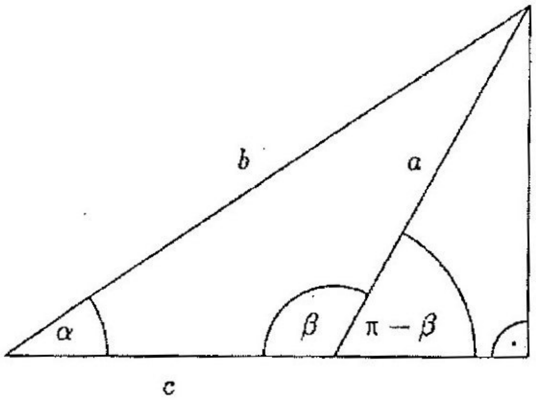
dále definujeme $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Při těchto definicích bude například i v tupoúhlém trojúhelníku platit tzv. **věta o průmětech** (obr. 89a,b)

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha,$$

neboť $\cos \beta = -\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi - \beta)$.



Obr. 89a



Obr. 89b

Hodnoty goniometrických funkcí pro různé hodnoty úhlu α můžeme vyčíst z matematických tabulek nebo je také můžeme zjistit pomocí kalkulaček. Tím pak určíme délku každé strany pravoúhlého trojúhelníku, známe-li délku jedné jeho strany a velikost jednoho jeho ostrého úhlu.

o **Příklad 51.** V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* je $|\sphericalangle ABC| = 70°$ a $|BC| = 6$. Určete délku druhé odvěsny *AC* a délku přepony *AB*.

Řešení. Při obvyklém značení (obr. 88) je tedy dáno $a = 6$, $\beta = 70°$, a proto $b = a \operatorname{tg} \beta = 6 \operatorname{tg} 70° \doteq 16{,}484864$, $c = \dfrac{6}{\cos 70°} \doteq 17{,}542826$.

---

o **Cvičení 1.** V pravoúhlém trojúhelníku je dána přepona délky $c = 12$ a ostrý úhel velikosti $\alpha = 15°$. Vypočtěte délky odvěsen.

o **Cvičení 2.** V pravoúhlém trojúhelníku je dána délka jedné odvěsny $a = 9$ a velikost přilehlého úhlu $\beta = 34°$. Vypočtěte délku druhé odvěsny a délku přepony.

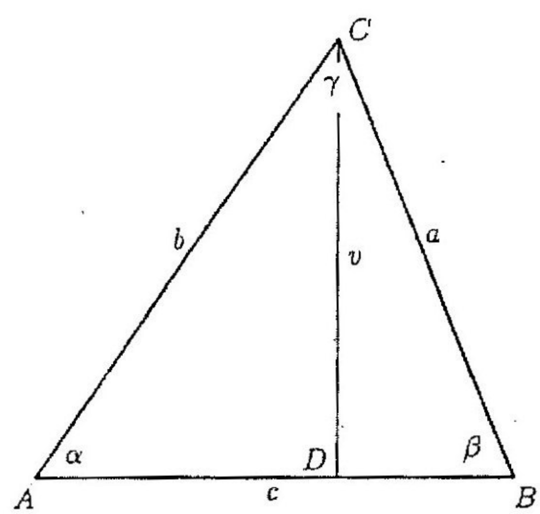
o **Cvičení 3.** Dokažte, že v každém trojúhelníku *ABC* při obvyklém značení platí $c(a\cos\beta - b\cos\alpha) = a^2 - b^2$.

17. Věta sinová a věta kosinová

V trojúhelníku *ABC* označme délky stran a velikosti úhlů obvyklým způsobem (obr. 90), velikost výšky vedené bodem *C* označíme *v*, patu této výšky označíme *D*. Z pravoúhlého trojúhelníku *ACD* plyne $v = b\sin\alpha$, z pravoúhlého trojúhelníku *BCD* plyne $v = a\sin\beta$. Proto je $a\sin\beta = b\sin\alpha$, neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

To je tvrzení tzv. **sinové věty**. Říká, že poměr délek dvou stran trojúhelníku se rovná poměru hodnot funkce sinus protilehlých úhlů. Dokázali jsme ji sice jen pro případ, kdy jsou úhly α, β ostré, avšak platí i v případech ostatních. Je-li například úhel β pravý, je $v = a = b\sin\alpha$ a stačí si uvědomit, že sinus pravého úhlu je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Je-li β větší než úhel pravý, leží bod *D* mimo úsečku *AB* a je $v = a\sin(\pi - \beta)$, avšak $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$, takže sinová věta platí i zde.



Obr. 90

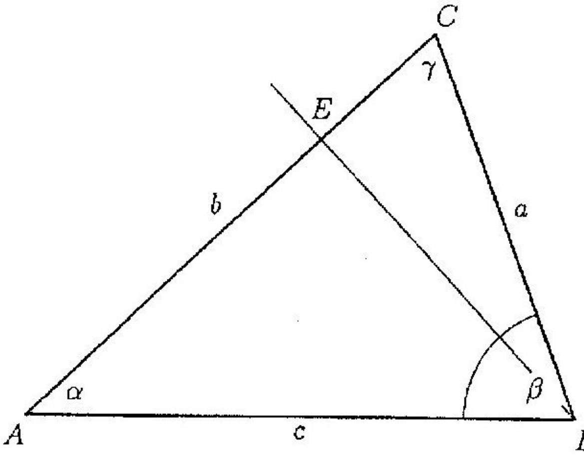
Z úhlů α, β je vždy aspoň jeden ostrý; předpokládejme, že je to úhel α. V opačném případě bychom zaměnili označení α, β a *a*, *b*. Veďme nyní v trojúhelníku *ABC* výšku bodem *B* na stranu *AC*; její patu označme *E*. Rozlišíme opět dva případy: bod *E* je bodem úsečky *AC* (obr. 91) a bod *E* leží mimo úsečku *AC* (obr. 92). V prvním případě je $|AE| = b - a\cos\gamma$, v druhém případě je $|AE| = b + a\cos(\pi - \gamma)$, ale $\cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$, takže vždy platí

$|AE| = b - a\cos\gamma$ a také podle podobných úvah je $|BE| = a\sin\gamma$. Proto podle Pythagorovy věty $|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$ a se zřetelem na to, že $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, máme

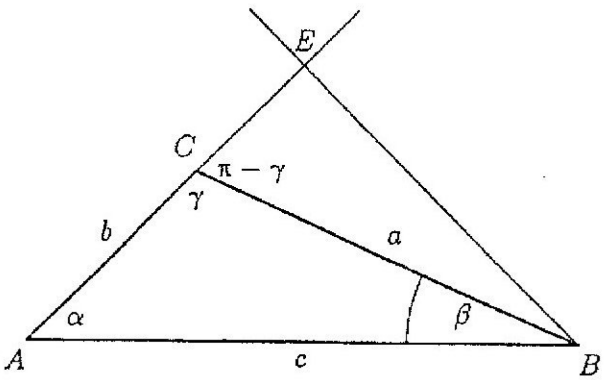
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

To je tvrzení tzv. **kosinové věty**. Je-li úhel γ pravý, dostaneme větu Pythagorovu.

Pomocí sinové a kosinové věty můžeme vypočítat další strany a úhly v trojúhelníku, známe-li v trojúhelníku
a) všechny strany,
b) dvě strany a jeden úhel,
c) jednu stranu a dva úhly.



Obr. 91

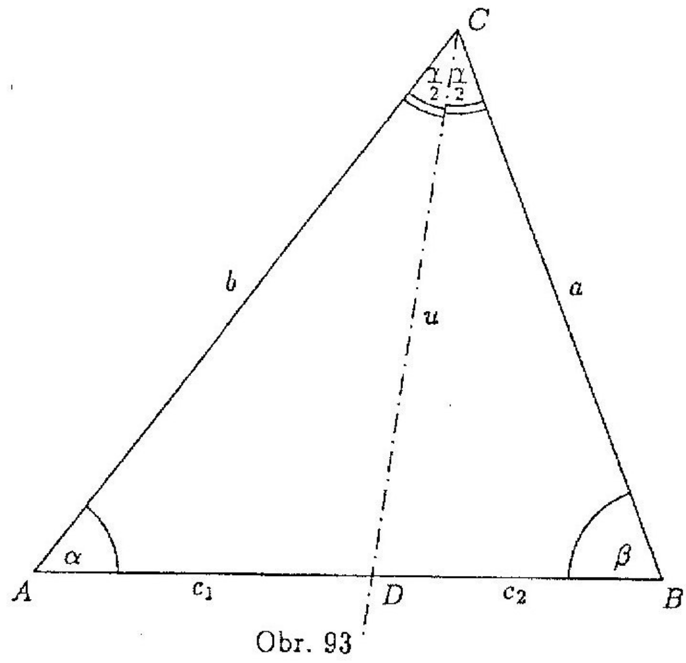


Obr. 92

o **Příklad 52.** Vypočtěte délky všech stran a úhlů trojúhelníku, jestliže je při obvyklém značení $a = 5$, $b = 6$, $\alpha = 45°$.

Řešení. Podle věty sinové je $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{5}\sqrt{2} \doteq 0{,}85$, tedy $\beta \doteq 58°10'$, nebo $\beta \doteq 121°50'$. V prvním případě je $\gamma \doteq 76°50'$ a podle kosinové věty je $c \doteq 6{,}88$, ve druhém případě je $\gamma \doteq 13°10'$, $c \doteq 1{,}61$. Vidíme, že tato úloha má dvě řešení. Je to tím, že byly dány dvě strany trojúhelníku a úhel proti kratší z nich. Kdyby bylo dáno a, b a úhel β, vyšel by úhel γ jednoznačně.

o **Příklad 53.** Dokažte: Osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníku v poměru délek sousedních stran uvažovaného úhlu.



Obr. 93

Řešení. Toto tvrzení bylo již dokázáno v kapitole 15. Zde ho dokážeme znovu s použitím věty sinové. V trojúhelníku ABC označme strany a úhly obvyklým způsobem, navíc označme D průsečík osy úhlu ACB se stranou AB a $u = |CD|$ (obr. 93). V trojúhelníku

ADC platí sinová věta $\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{c_1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, v trojúhelníku DBC obdobně $\frac{u}{\sin\beta} = \frac{c_2}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Z těchto dvou rovností plyne rovnost $c_1 \sin\alpha = c_2 \sin\beta$. Použijeme-li ještě sinovou větu pro trojúhelník ABC, dostaneme $c_1 a = c_2 b$, neboli $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$, což je požadovaná rovnost.

Nyní odvodíme dva vzorce pro obsah P trojúhelníku ABC. Jednak platí

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

neboť $b \sin\gamma$ je velikost výšky na stranu a.

K odvození druhého vzorce užijeme tento vzorec ve tvaru $2ab\sin\gamma = 4P$ a větu kosinovou $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$. Umocníme-li obě rovnice a pak sečteme, dostaneme

$$4a^2b^2 = 16P^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2,$$

$$16P^2 = \left[2ab + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right]\left[2ab - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right] = \left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right] =$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b).$$

Poloviční obvod trojúhelníku se zpravidla značí s, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$, takže pak můžeme psát

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Tento vzorec se nazývá **Heronův** (Heron z Alexandrie žil asi v 1. století n.l.).

Ještě vyjádříme délku těžnice t_c a výšky v_c pomocí délek stran a, b, c trojúhelníku ABC.

Podle obr. 83 označíme $\omega = |\sphericalangle AKC|$ a napíšeme kosinovou větu pro trojúhelníky AKC, BKC:

$$b^2 = t_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\omega$$

$$a^2 = t_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos(180° - \omega) = t_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 \cdot t_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\omega$$

Sečtením obou rovností dostaneme $a^2 + b^2 = 2 \cdot t_c^2 + \frac{c^2}{2}$, odkud

$$t_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Pro obsah trojúhelníku ABC platí jednak $P = \frac{cv_c}{2}$, jednak Heronův vzorec, odkud

$$v_c = \frac{2 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

---

o **Cvičení 1.** Pomocí Heronova vzorce odvoďte vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníku.

o **Cvičení 2.** Použitím Heronova vzorce pro pravoúhlý trojúhelník odvoďte platnost Pythagorovy věty.

o **Cvičení 3.** Pomocí kosinové věty dokažte větu Stewartovu: Je-li D bod strany AB v trojúhelníku ABC, pak platí $|BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |BD| = |AB| \cdot \left(|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|\right)$.

o **Cvičení 4.** Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC při obvyklém značení platí

a) $(b+c)\cos\alpha + (c+a)\cos\beta + (a+b)\cos\gamma = a+b+c$,

b) $\operatorname{cotg}\gamma = \dfrac{b}{c\sin\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha$.

o **Cvičení 5.** V trojúhelníku ABC určete délky stran a úhlů, jestliže znáte jeho obsah $P = 84$ a dále víte, že $b + c = 28$, $\alpha = 60°$.

o **Cvičení 6.** Dokažte pomocí Cèvovy věty, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (důkaz rozdělte zvlášť pro trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý). Využijte toho, že úseky na stranách vyjádříte goniometrickými funkcemi.

o **Cvičení 7.** Dokažte pomocí Cèvovy věty a sinové věty, že se osy vnitřních úhlů trojúhelníku protínají v jednom bodě.

o **Cvičení 8.** Jestliže v trojúhelníku dělí těžnice a výška k téže straně úhel, z něhož vycházejí, na tři shodné části, je trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

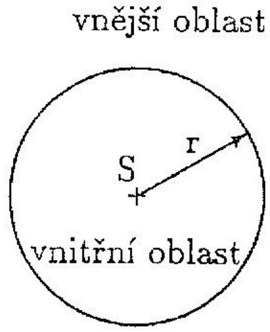
o **Cvičení 9.** V příkladu 53 vyjádřete úseky c_1, c_2 pomocí délek a, b, c stran trojúhelníku ABC.

o **Cvičení 10.** Pomocí Stewartovy věty (cvičení 3) určete délku těžnice t_c a délku u osy úhlu ACB.

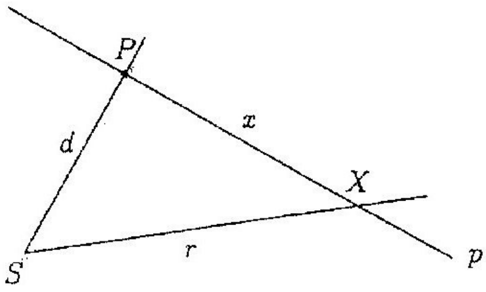
18. Kružnice

Vedle trojúhelníku je velmi jednoduchým geometrickým útvarem **kružnice**. Definuje se jako množina všech bodů roviny, které mají od pevného bodu S při zvolené jednotce délky danou vzdálenost r. Bod S je středem kružnice, číslo r poloměrem kružnice. Ty body roviny, jejichž vzdálenost od středu S je menší než r, tvoří tzv. vnitřní oblast (vnitřek) uvažované kružnice. Vnější oblast (vnějšek) kružnice o středu S a poloměru r je tvořena všemi těmi body roviny, které mají od středu S vzdálenost větší než r (obr. 94).

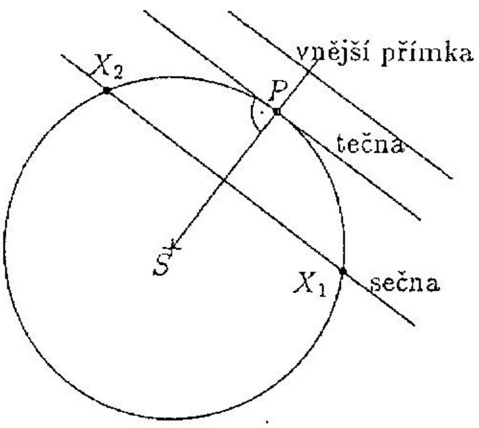
Nechť je dáno kladné číslo r a v rovině bod S a přímka p, vzdálenost bodu S od přímky p označíme d. Nechť je P pata kolmice vedené bodem S na přímku p, tedy $d = |SP|$ (obr. 95). Předpokládejme, že bod X přímky p leží na kružnici k o středu S a poloměru r. Označme ještě $x = |PX|$. Pak tvoří body P, S, X pravoúhlý trojúhelník, nebo je $P = X$. V každém případě platí $d^2 + x^2 = r^2$. Vidíme tedy, že v případě $d > r$ nemůže na přímce p ležet bod kružnice k, přímka p se pak nazývá **vnější přímkou** kružnice k (obr. 96). Je-li $d = r$, je bod X bodem kružnice k právě tehdy, když je $x = 0$, tedy $X = P$. V tomto případě má přímka p s kružnicí k společný právě jeden bod P; taková přímka se nazývá **tečna** kružnice, společný bod P je bodem dotyku tečny a kružnice. Spojnice bodu dotyku tečny a středu kružnice je na tečnu kolmá. Konečně vidíme, že v případě $d < r$ má přímka p s kružnicí k společné dva body $X_1 \neq X_2$, jejichž vzdálenost od bodu P se rovná $x = \sqrt{r^2 - d^2}$. Přímka p se pak nazývá **sečna** kružnice k, úsečka X_1X_2 je **tětivou** kružnice k. Není-li $d = 0$, neprochází-li tudíž přímka p středem kružnice k, tvoří body S, X_1, X_2 rovnoramenný trojúhelník. Je-li $d = 0$, je S středem úsečky X_1X_2. V každém z těchto dvou případů leží bod S na ose úsečky X_1X_2, střed kružnice tedy leží na ose každé tětivy kružnice.



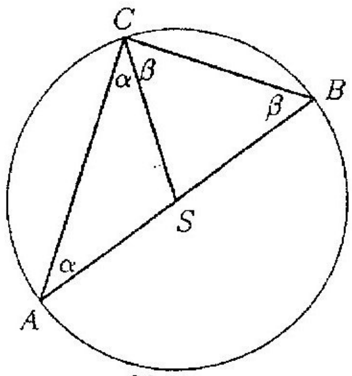
Obr. 94



Obr. 95



Obr. 96



Obr. 97

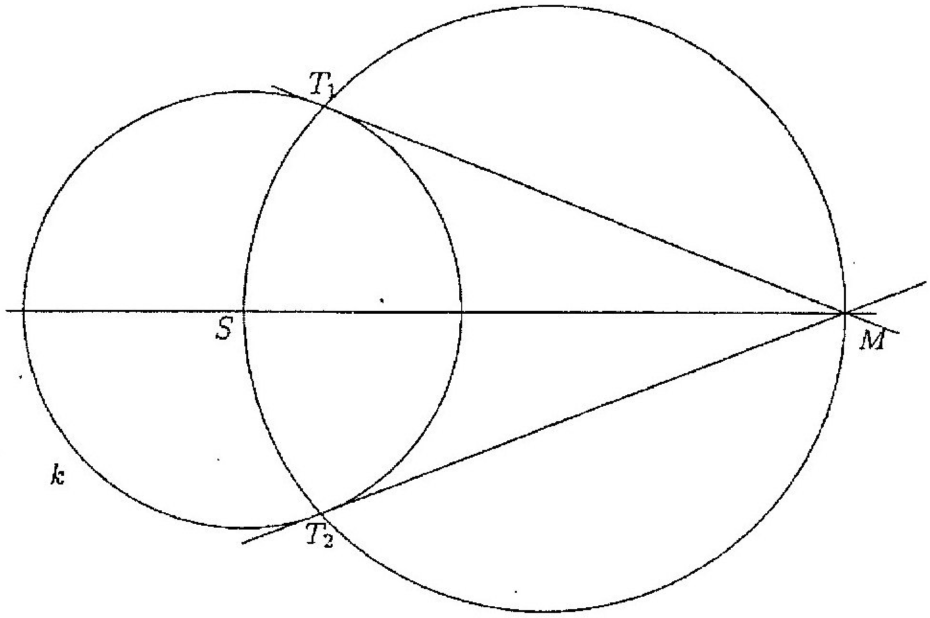
Tětiva kružnice, která obsahuje střed kružnice, má délku rovnou dvojnásobku poloměru kružnice a nazývá se **průměr** kružnice. Průměr AB kružnice k (obr. 97) rozdělí kružnici na dvě polokružnice. Je-li C další bod kružnice k, tvoří body A, B, C trojúhelník, střed S kružnice je středem strany AB. Trojúhelníky ACS a BCS jsou rovnoramenné, proto $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$, $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCS|$; označme tyto velikosti α, β. Protože součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je π, je $|\sphericalangle ACB| = \frac{\pi}{2}$, úhel ACB je pravý. Stručně říkáme, že všechny úhly nad průměrem jsou pravé. To je obsah věty, která se nazývá Thaletova (řecký matematik Thales z Milétu žil v letech 624–548 př.n.l.).

I v tomto případě platí tvrzení obrácené: Je-li úhel ACB pravý, leží bod C na kružnici k nad průměrem AB. Přímka AC nemůže být totiž tečnou kružnice k, to by musela být kolmá na AB a v trojúhelníku ACB by byly dva pravé úhly. Je tedy přímka AC sečnou, protíná kružnici k v bodě A a v dalším bodě, který označíme C'. Podle Thaletovy věty je úhel $AC'B$ pravý a podle předpokladu je úhel ACB pravý. Kdyby byly body C, C' různé, měl by trojúhelník $CC'B$ dva pravé úhly. Tedy je $C = C'$. Můžeme tedy větu vyslovit ve tvaru:

Věta (Thaletova). *Jsou-li A, B dva různé body roviny, je množina vrcholů všech pravých úhlů ležících v této rovině, jejichž ramena procházejí danými body A, B, kružnice s průměrem AB bez bodů A, B.*

o **Příklad 54.** Je dána kružnice k se středem S a vně této kružnice bod M. Z bodu M veďte tečny ke kružnici k.

Řešení. Tečny MT_1 a MT_2 jsou kolmé po řadě na poloměry ST_1 a ST_2 kružnice k (obr. 98). Proto sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem SM, čímž získáme body dotyku T_1 a T_2 obou tečen.



Obr. 98

o **Příklad 55.** Dokažte, že tečny vedené z vnějšího bodu M ke kružnici k $(S; r)$, lze zkonstruovat také takto:

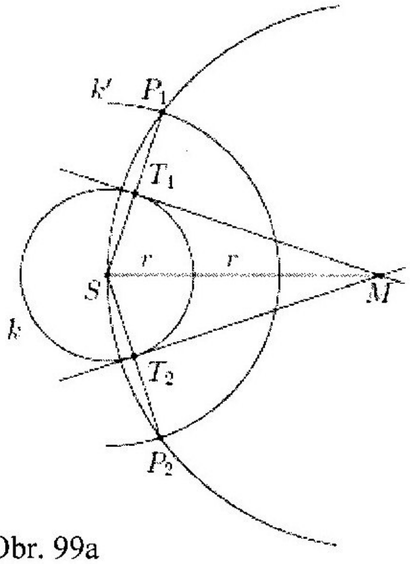
a) Sestrojíme kružnici k' $(S; 2r)$ a kružnici se středem M a poloměrem $|MS|$; jejich průsečíky označíme P_1, P_2. Osy úseček SP_1, SP_2 jsou hledané tečny (obr. 99a).

b) Sestrojíme kružnici k' $(S; |SM|)$ a tečnu v bodě T úsečky SM ke kružnici k; jejich průsečíky označíme P_1, P_2. Průsečíky T_1, T_2 úseček SP_1, SP_2 s kružnicí k jsou body dotyku hledaných tečen (obr. 99b).

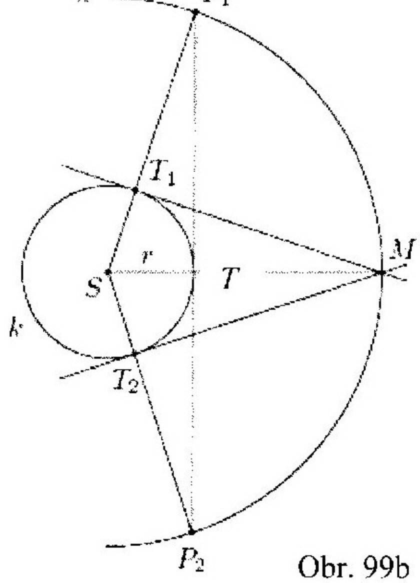
Řešení.

a) Trojúhelníky SP_1M a SP_2M jsou rovnoramenné se základnami SP_1 a SP_2 a tečny T_1M a T_2M jsou osami souměrnosti těchto trojúhelníků, proto jsou kolmé na jejich základny.

b) Trojúhelníky ST_1M a STP_1 jsou shodné podle věty (*sus*) ($|ST_1| = |ST|$, $|\sphericalangle T_1SM| = |\sphericalangle TSP_1|$, $|SM| = |SP_1|$), proto $|\sphericalangle ST_1M| = |\sphericalangle STP_1| = 90°$.



Obr. 99a



Obr. 99b

o **Cvičení 1.** Nad odvěsnami AC, BC pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou sestrojeny Thaletovy kružnice, které se protínají ve dvou bodech. Jedním průsečíkem je bod C, druhý průsečík označme X. Leží bod X na přeponě AB? Zdůvodněte.

o **Cvičení 2.** Platí obdobné tvrzení jako ve cvičení 1, je-li úhel při vrcholu C a) ostrý, b) tupý ?

o **Cvičení 3.** Je dána kružnice k se středem S a bod M, který leží a) uvnitř kružnice, b) na kružnici, c) vně kružnice. Jaký útvar vyplní středy všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem M? (V případě c) tětivu pomyslně prodloužíme do bodu M.)

o **Cvičení 4.** Je dána kružnice k se středem S, dále její libovolná tětiva AB a bod $C \neq S$ uvnitř kružnice k. Bodem C veďte tětivu MN tak, aby byla tětivou AB půlena.

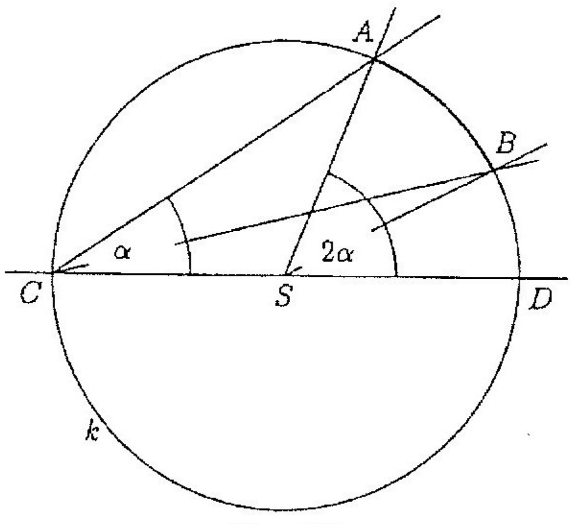
o **Cvičení 5.** Je dána kružnice k a uvnitř ní dva různé body P, Q. Vepište do kružnice k pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby bod P ležel na odvěsně AC a bod Q na odvěsně BC.

o **Cvičení 6.** Bod X probíhá kružnici se středem S sestrojenou nad průměrem AB. Na každé polopřímce SX je sestrojen bod Y tak, že jeho vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB. Sestrojte množinu všech bodů Y.

19. Věta o obvodovém a středovém úhlu

Thaletova věta je speciálním případem obecnějšího tvrzení, totiž věty o obvodovém a středovém úhlu. Zvolme na kružnici o středu S body C, D tak, aby tvořily průměr kružnice k (obr. 100). Je-li A libovolný další bod kružnice k, různý od bodů C, D, je trojúhelník ACS rovnoramenný, a označíme-li α velikost úhlu ACS, je také $\alpha = |\sphericalangle CAS|$, tedy $|\sphericalangle CSA| = \pi - 2\alpha$, $|\sphericalangle ASD| = 2\alpha$. Vidíme, že velikost úhlu ASD se rovná dvojnásobku velikosti úhlu ACD. To platí i tehdy, jestliže bod A splývá s bodem D a oba tyto úhly jsou nulové. Splývá-li bod A s bodem C, je úhel ASD přímý. Aby odvozené tvrzení platilo i v tomto případě, musíme spojnicí AC rozumět přímku kolmou k přímce CD, tedy tečnu v bodě C. Můžeme pak vyslovit větu, kterou jsme už v podstatě dokázali:

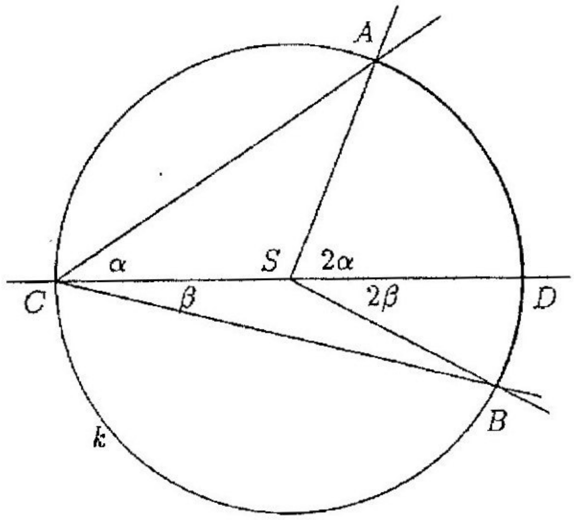
Věta. *Probíhá-li bod A rovnoměrně kružnici k, tj. otáčí-li se přímka SA konstantní úhlovou rychlostí ω kolem bodu S, otáčí se přímka CA také rovnoměrně kolem bodu C, a to poloviční úhlovou rychlostí, tedy úhlovou rychlostí* $\frac{1}{2}\omega$.



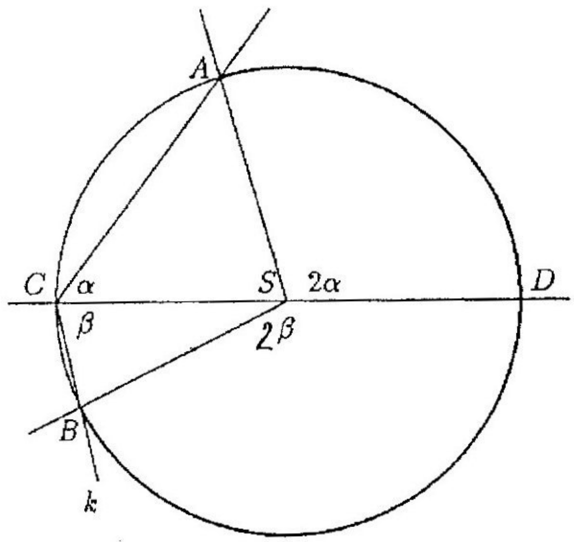
Obr. 100

Zvolme nyní na kružnici k další bod B ($B \neq A$) a předpokládejme nejdříve, že body A, B leží v téže polorovině ohraničené přímkou CD (obr. 100). Můžeme předpokládat, že $\beta = |\sphericalangle BCD|$ je menší než $\alpha = |\sphericalangle ACD|$. Stejně jako platí $|\sphericalangle ASD| = 2|\sphericalangle ACD|$, platí i $|\sphericalangle BSD| = 2|\sphericalangle BCD|$, a tudíž $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| - \frac{1}{2}|\sphericalangle BSD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB|$.

Leží-li body A, B v opačných polorovinách ohraničených přímkou CD (obr. 101), je podobně $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD|)$. Je-li $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| \leq \pi$, je $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| = |\sphericalangle ASB|$, a opět tedy platí $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB|$. Je-li však $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD| > \pi$ (obr. 102), rovná se součet $|\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle BSD|$ velikosti nekonvexního úhlu s rameny SA, SB, tj. úhlu, který obsahuje větší oblouk kružnice k, ohraničený body A, B.



Obr. 101



Obr. 102

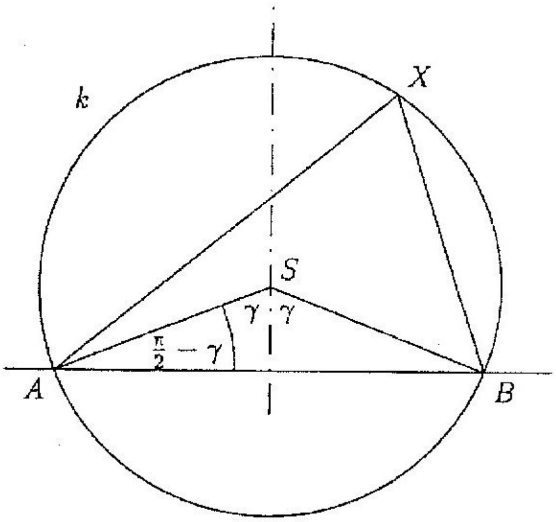
Zavedeme proto pojmy středový a obvodový úhel:

Zvolme na kružnici k o středu S dva různé body A, B. Body A, B dělí kružnici k na dva oblouky; zvolme jeden z nich a označme ho m. Úhel (konvexní nebo nekonvexní) s rameny SA, SB, který obsahuje oblouk m, se nazývá **středový úhel** příslušný k oblouku m. Středový úhel příslušný k oblouku m je tedy obloukem m dán jednoznačně. Je-li C bod kružnice k, který neleží na oblouku m, nazývá se úhel ACB **obvodový úhel** příslušný k oblouku m. Výše jsme dokázali větu:

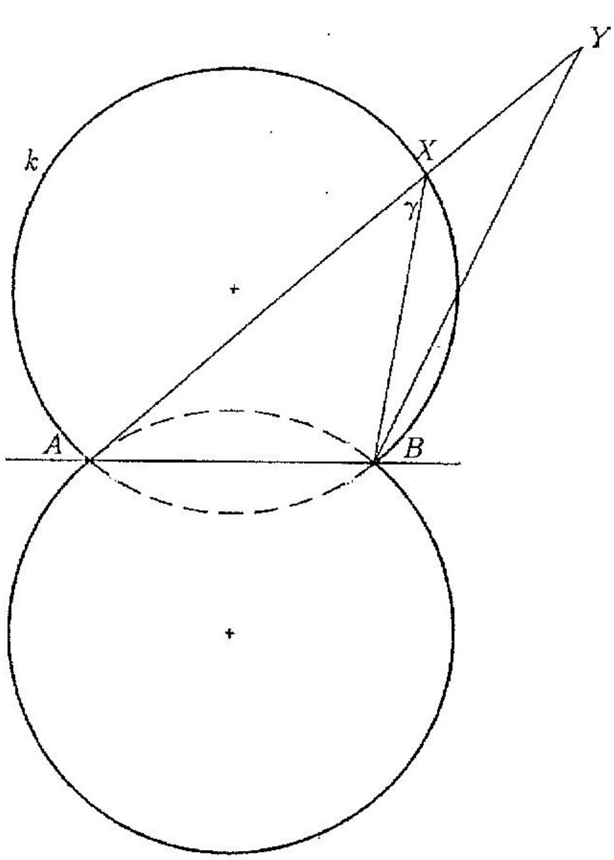
Věta (o obvodovém a středovém úhlu). *Velikost každého obvodového úhlu příslušného k oblouku m se rovná jedné polovině velikosti středového úhlu příslušného k oblouku m. Je-li m polokružnice, dostaneme větu Thaletovu.*

Pomocí věty o obvodovém a středovém úhlu můžeme určit množinu všech bodů v rovině, ze kterých vidíme danou úsečku pod daným úhlem. Nechť je tedy dáno číslo γ, $0 < \gamma < \pi$, a dva různé body A, B. Předpokládejme nejdříve, že platí $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Na ose o úsečky AB sestrojíme bod S tak, aby $|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$, tedy $|\sphericalangle BAS| = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (obr. 103). Označme k kružnici se středem S, která prochází body A, B. Pak pro všechny body X kružnice k, které leží v polorovině ABS a jsou různé od bodů A, B, platí $|\sphericalangle AXB| = \gamma$. Můžeme tedy říci, že ten oblouk kružnice k, který leží v polorovině ABS, je bez svých krajních bodů A, B množinou bodů X, pro které $|\sphericalangle AXB| = \gamma$. Nemůžeme však říci, že je množinou všech bodů X, pro které platí

$|\sphericalangle AXB| = \gamma$, protože tuto podmínku splňují přinejmenším také všechny body oblouku souměrně sdruženého podle přímky AB (obr. 104). Předpokládejme obráceně, že pro některý bod Y platí $|\sphericalangle AYB| = \gamma$. Bod Y nemůže ležet na přímce AB; nechť leží například v polorovině ABS. Spojme bod Y s bodem A



Obr. 103

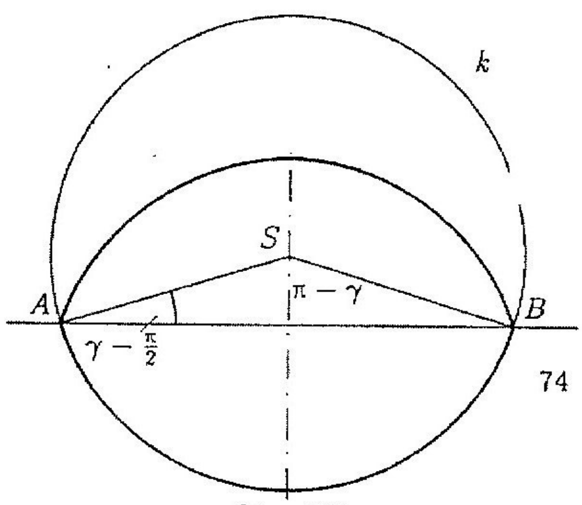


Obr. 104

a označme $X \neq A$ průsečík přímky AY s kružnicí k. Z trojúhelníků AXB, AYB plyne $|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle AXB| = \gamma$, proto $X = Y$. Kdyby byla spojnice AY tečnou kružnice k, vzali bychom za X průsečík kružnice k a přímky BY. Dospěli jsme k závěru:

Množinou všech bodů X v rovině, pro které platí $|\sphericalangle AXB| = \gamma$, je množina všech bodů jistých dvou kruhových oblouků s krajními body A, B souměrně sdružených podle přímky AB, bez bodů A, B.

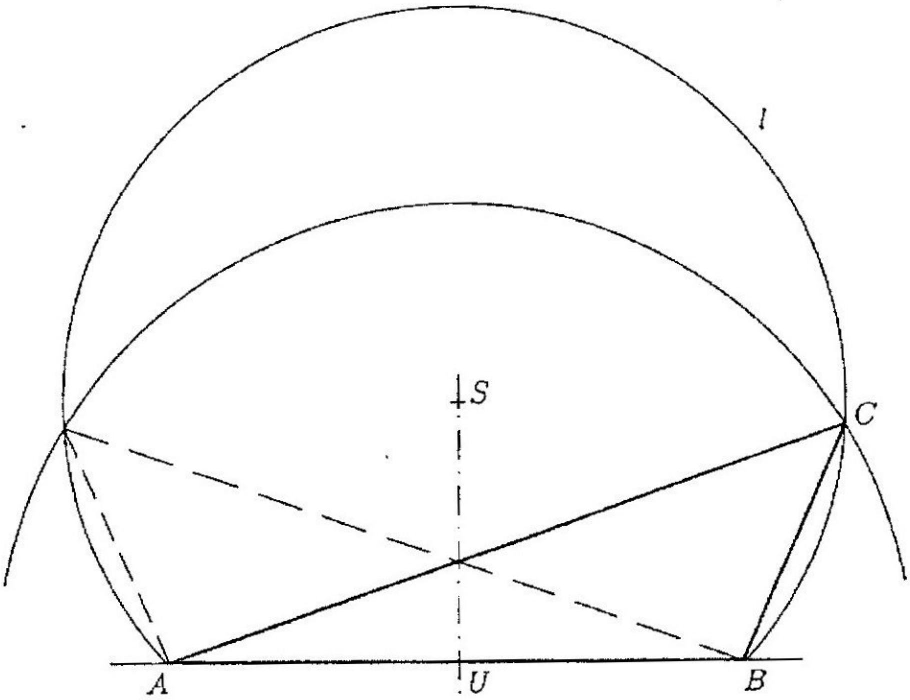
Asi namítnete, že jsme tuto větu dokázali jen pro $\gamma < \frac{\pi}{2}$. V případě $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ je však situace zcela obdobná (obr. 105), je však nutné zvolit bod S tak, aby $|\sphericalangle ASB| = 2\pi - 2\gamma$, tedy $|\sphericalangle BAS| = \gamma - \frac{\pi}{2}$, vzít menší oblouk kružnice k a oblouk souměrně sdružený podle přímky AB. Konečně v případě $\gamma = \frac{\pi}{2}$ splývá bod S se středem úsečky AB, oba oblouky tvoří spolu s body A, B kružnici nad průměrem AB.



Obr. 105

o **Příklad 56.** Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li $|AB| = 6$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ a délku $|CU| = 5$ těžnice vedené bodem C (U je střed strany AB).

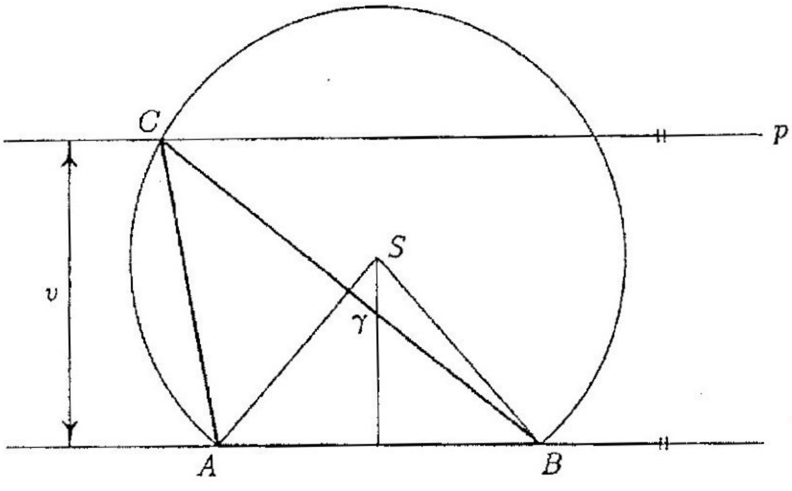
Řešení. Sestrojíme úsečku AB délky 6. Na ose úsečky AB zvolíme bod S tak, aby $|\sphericalangle ASB| = \frac{\pi}{2}$, a sestrojíme oblouk l kružnice se středem S a krajními body A, B, který leží v polorovině ABS. Nemusíme sestrojit oblouk souměrně sdružený podle přímky AB, protože stačí sestrojit ten trojúhelník ABC, který leží v polorovině ABS. Bod C musí ležet na oblouku l a zároveň na kružnici se středem U a poloměrem 5, kde U je střed úsečky AB (obr. 106). Tato kružnice protíná oblouk l ve dvou bodech souměrně sdružených podle přímky SU. Dostaneme sice dvě řešení, ta jsou však souměrně sdružená podle osy úsečky AB.



Obr. 106

o **Příklad 57.** Sestrojte trojúhelník ABC, když je dána délka $c = |AB|$, výška v na stranu AB a velikost úhlu γ při vrcholu C.

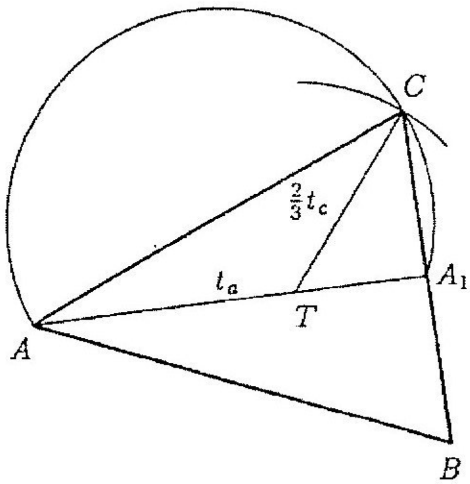
Řešení. Sestrojíme úsečku AB délky c; bod C pak leží na přímce p rovnoběžné s přímkou AB ve vzdálenosti v a na kruhovém oblouku s krajními body A, B, pro jehož body X platí $|\sphericalangle AXB| = \gamma$ a jenž leží v téže polorovině ohraničené přímkou AB jako přímka p (obr. 107).



Obr. 107

o **Příklad 58.** Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li délky těžnic t_a, t_c a velikost úhlu γ.

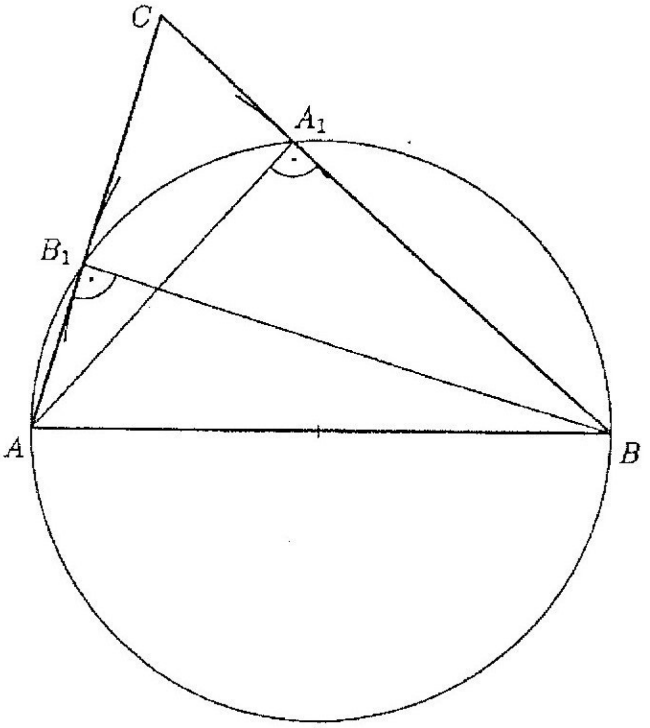
Řešení. Sestrojíme úsečku AA_1 o délce t_a a vyznačíme na ní polohu těžiště T. Bod C leží jednak na kruhovém oblouku s tětivou AA_1 a obvodovým úhlem γ, jednak na polokružnici se středem T a poloměrem $\frac{2}{3}t_c$ (obr. 108). Doplnění bodu B je již snadné.



Obr. 108

o **Příklad 59.** Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li známy velikosti výšek v_a, v_b a délka strany c.

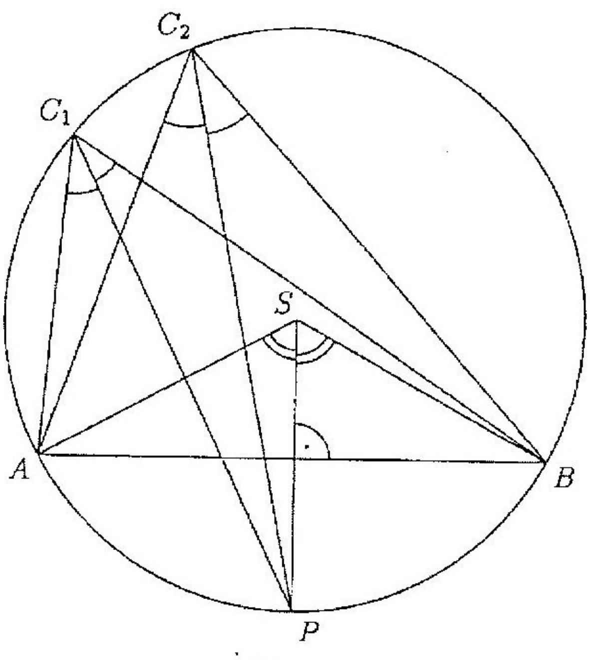
Řešení. Sestrojíme úsečku AB délky c a nad ní Thaletovu kružnici. Pata A_1 výšky v_a vznikne jako průsečík této Thaletovy kružnice a kružnice se středem A a poloměrem v_a (obr. 109); analogicky vznikne pata B_1 výšky v_b. Bod C je průsečíkem přímek AB_1 a BA_1.



Obr. 109

o **Příklad 60.** Dokažte, že osa středového úhlu a osa libovolného obvodového úhlu příslušného témuž oblouku kružnice k se protínají na kružnici k.

Řešení. Sestrojme kružnici k se středem S a vyznačme v ní tětivu AB. Označme P průsečík osy středového úhlu ASB s kružnicí k a v opačné polorovině s hraniční přímkou AB označme bod C na kruhovém oblouku. Jelikož je $|AP| = |BP|$, je $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BCP|$, a tudíž přímka CP je osou úhlu ACB (obr. 110).



Obr. 110

o **Cvičení 1.** Uvnitř trojúhelníku ABC určete všechny body X tak, aby platilo $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle CXA|$.

o **Cvičení 2.** Na kružnici k ohraničují body A, B oblouk m, úhel ACB je obvodovým úhlem příslušným k oblouku m. Nechť D je bod na tečně kružnice k v bodě A, přičemž body C, D leží v opačných polorovinách ohraničených přímkou AB. Dokažte, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DAB|$ (úhel DAB je tzv. **úsekový úhel** příslušný k oblouku m).

o **Cvičení 3.** V rovině kosočtverce $ABCD$ najděte bod X, z něhož je vidět stranu AB pod úhlem 60° a stranu BC pod úhlem 45°.

o **Cvičení 4.** Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li při obvyklém značení známy velikosti následujících prvků: a) α, v_a, c; b) a, α, v_c; c) a, v_b, t_a; d) γ, v_c, c; e) t_a, v_a, α; f) γ, v_a, v_c.

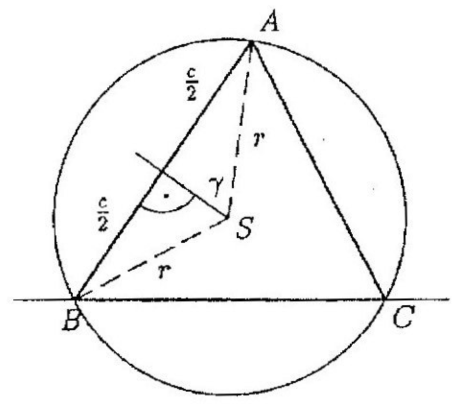
o **Cvičení 5.** Do kružnice je vepsán trojúhelník ABC tak, že jeho vrcholy dělí kružnici na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte vnitřní úhly trojúhelníku.

o **Cvičení 6.** V kružnici jsou dány tětivy $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Dokažte, že $AC' \parallel A'C$.

o **Cvičení 7.** Určete úhly trojúhelníku s vrcholy v číslech 2, 7, 11 na ciferníku hodin.

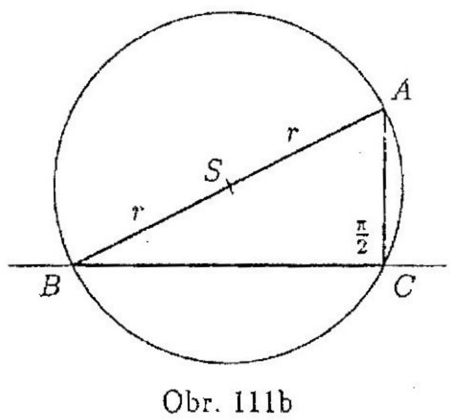
20. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Víme, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku procházejí jedním bodem O, který vždy leží uvnitř trojúhelníku. Je to střed kružnice trojúhelníku vepsané; její poloměr označíme ρ.

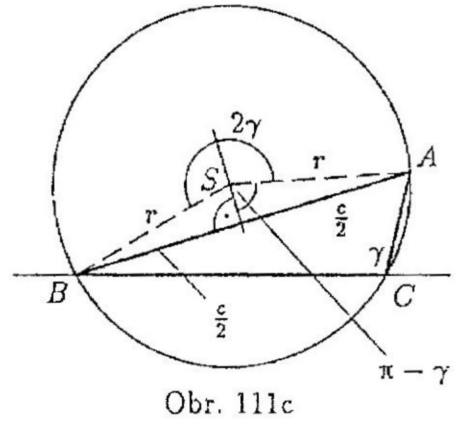


Obr. 111a

Dokázali jsme také, že se osy stran trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě, který je středem S kružnice procházející body A, B, C, tedy středem kružnice trojúhelníku ABC opsané. Její poloměr označíme r. Z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne, že střed kružnice trojúhelníku opsané leží uvnitř trojúhelníku, je-li trojúhelník ostroúhlý, ve středu přepony, je-li trojúhelník pravoúhlý, mimo trojúhelník, je-li trojúhelník tupoúhlý (obr. 111a,b,c).



Obr. 111b



Obr. 111c

Zároveň je vidět, že $\frac{1}{2}c = r \sin\gamma$ a že tento vzorec platí i pro trojúhelníky pravoúhlé a tupoúhlé, protože $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a $\sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$. Platí tedy

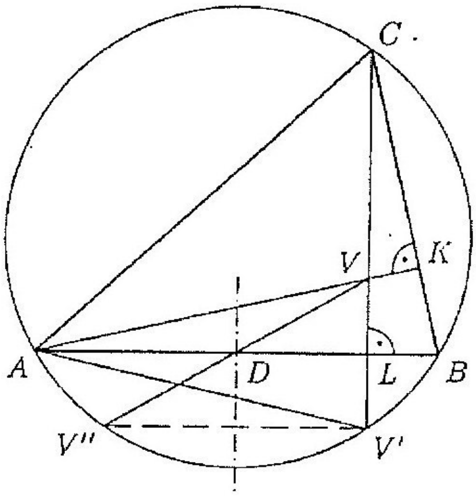
$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

kde a, b, c značí délky stran trojúhelníku a α, β, γ velikosti protějších úhlů. Vzpomeňte si na sinovou větu $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ a porovnejte ji s odvozeným vzorcem pro poloměr kružnice opsané.

Dokážeme ještě větu o vztahu průsečíku výšek trojúhelníku a kružnici mu opsané. Platí:

Body souměrně sdružené k průsečíku výšek V podle stran trojúhelníku i podle středů stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.

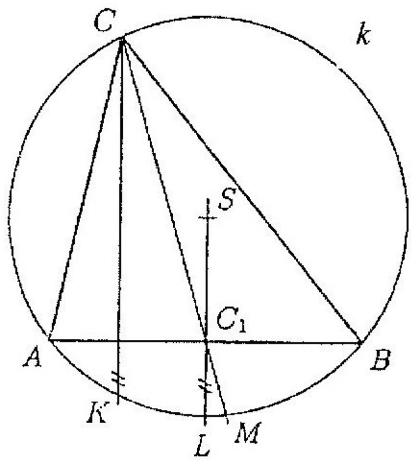
Při důkazu použijeme větu o obvodovém a středovém úhlu. Označíme V' bod souměrně sdružený k bodu V podle strany AB a K, L paty výšek vedených vrcholy A, C trojúhelníku (obr. 112). Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABK, AVL plyne $|\sphericalangle AVL| = |\sphericalangle ABK| = \beta$. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků AVL, $AV'L$ plyne $|\sphericalangle AV'L| = \beta$, takže $|\sphericalangle AV'C| = |\sphericalangle ABC|$, proto leží body B, V' na stejném kruhovém oblouku s tětivou AC, který je částí kružnice opsané trojúhelníku ABC. Označme dále V'' bod souměrně sdružený k bodu V podle středu D strany AB. Můžeme ho též dostat z bodu V' souměrností podle osy o strany AB, neboť složením osových souměrností podle přímek AB a o dostaneme středovou souměrnost podle středu D. Takže V'' leží též na kružnici opsané trojúhelníku ABC.



Obr. 112

o **Příklad 61.** Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže jsou dány různé body K, L, M na kružnici k mu opsané, které po řadě značí:
průsečík výšky z vrcholu C s kružnicí k různý od bodu C,
průsečík osy strany AB s kružnicí k, který leží v opačné polorovině než bod C,
průsečík těžnice z bodu C s kružnicí k různý od bodu C.

Řešení. Známe tři body kružnice opsané trojúhelníku ABC, proto známe i její střed S. Můžeme tedy sestrojit bod C, neboť úsečky KC, LS jsou rovnoběžné. Průnikem přímek LS a MC vznikne bod C_1, což je střed strany AB. Strana AB je pak kolmá na přímku KC (obr. 113).



Obr. 113

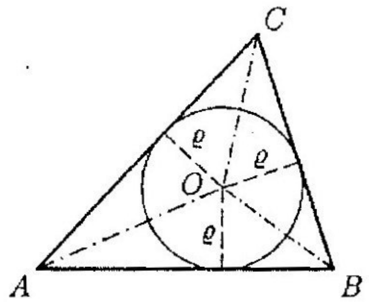
Střed O kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na ose vnitřního úhlu trojúhelníku, např. při vrcholu C, která prochází středem oblouku, jež je částí kružnice opsané trojúhelníku a němž bod C neleží (příklad 60).

Spojnice bodu O s vrcholy trojúhelníku rozdělí trojúhelník ABC na tři trojúhelníky. Sečteme-li jejich obsahy, musíme dostat obsah celého trojúhelníku. Proto platí pro poloměr ρ kružnice trojúhelníku vepsané vztah (obr. 114)

$$P = \frac{1}{2}(a+b+c)\rho = \rho s,$$

kde P je obsah trojúhelníku a s jeho poloviční obvod. Použijeme-li Heronův vzorec, dostaneme

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$



Obr. 114

Chceme-li dostat podobný vzorec odvozený z délek stran pro poloměr r kružnice opsané, vyjdeme ze vztahu $2r = \frac{c}{\sin\gamma}$, neboli $4r^2 = \frac{c^2}{1-\cos^2\gamma}$, a pro $\cos\gamma$ použijeme kosinovou větu. Výsledkem je rovnost

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

odkud například plyne $r\rho = \frac{abc}{4s}$, nebo též vzorec pro obsah trojúhelníku

$$P = \frac{abc}{4r}.$$

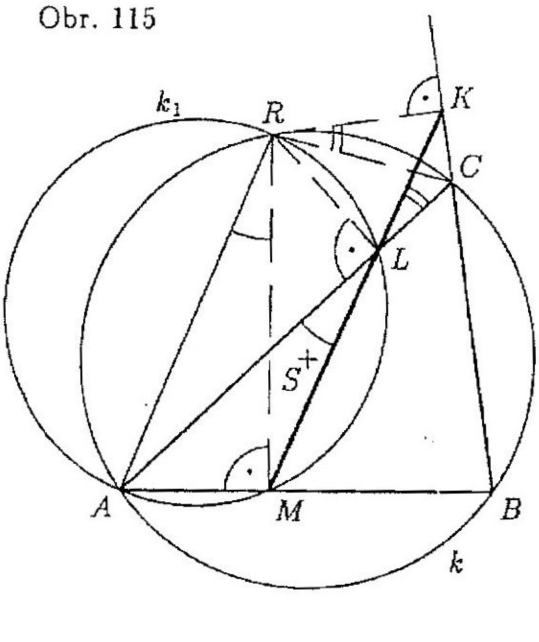
o **Příklad 62.** Je dán trojúhelník ABC a označme K, L, M po řadě body dotyku kružnice trojúhelníku vepsané se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že je

$|AM| = |AL| = s-a,$ $|BM| = |BK| = s-b,$ $|CK| = |CL| = s-c.$

Řešení. Označme $|AM| = |AL| = t$, $|BM| = |BK| = u$, $|CK| = |CL| = v$. Je tedy $u + v = a$, $v + t = b$, $t + u = c$. Z těchto tří rovností plyne $t = \frac{1}{2}(b+c-a) = s-a$, $u = s-b$, $v = s-c$.

o **Příklad 63.** Je dán trojúhelník ABC a R bod kružnice opsané trojúhelníku ABC. Označíme K, L, M po řadě paty kolmic vedených bodem R k přímkám BC, CA, AB. Dokažte, že body K, L, M leží v přímce. Říká se jí **Simsonova přímka.**

Obr. 115



Řešení. Splývá-li bod R s některým z bodů A, B, C, jsou dva z bodů K, L, M totožné a tvrzení úlohy je zřejmé. Také je-li některý z bodů K, L, M vrcholem trojúhelníku ABC, je důkaz snadný, protože bod R pak tvoří s některým vrcholem trojúhelníku průměr kružnice trojúhelníku opsané. Uvažujme proto jen ostatní případy (obr. 115). Kružnice k_1 nad průměrem AR prochází podle Thaletovy věty body L, M. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu se sobě rovnají hodnoty $|\sphericalangle ALM|$ a $|\sphericalangle ARM|$, protože jsou to obvodové úhly příslušné k témuž oblouku AM kružnice k_1. Podobně se dokáže, že $|\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle KRC|$. Protože však R leží na kružnici k opsané trojúhelníku ABC, je součet velikostí úhlů RAB a RCB úhel přímý, neboť body A a C leží na opačných obloucích ohraničených tětivou RB (podrobnější zdůvodnění je v kapitole 27 pro tětivový čtyřúhelník). Proto jsou úhly RAM a RCK shodné, a tedy pravoúhlé trojúhelníky RAM, RCK podobné. Pak jsou však úhly ARM, CRK, a tudíž i úhly ALM, KLC shodné. Jsou to tedy vrcholové úhly a body K, L, M leží v přímce.

---

o **Cvičení 1.** Užitím kosinové věty a vzorce $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ vyjádřete $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ a $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ pomocí a, b, c.

o **Cvičení 2.** Je dán trojúhelník ABC a bod R na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Označme R_1, R_2, R_3 body souměrně sdružené k bodu R podle stran trojúhelníku ABC. Dokažte, že body R_1, R_2, R_3 leží v přímce.

o **Cvičení 3.** Kružnice opsaná trojúhelníku se dotýká kružnice procházející středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelník je pak pravoúhlý, přičemž bod dotyku obou kružnic je jeho vrcholem, v němž je vnitřní úhel pravý.

o **Cvičení 4.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol C, průsečík výšek V a střed kružnice opsané S.

o **Cvičení 5.** Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li při obvyklém značení (r, ρ jsou poloměry kružnice opsané a vepsané trojúhelníku) dány velikosti následujících prvků:
a) c, γ, r; b) ρ, a, v_b; c) ρ, α, β; d) r, c, v_a; e) r, v_a, γ; f) ρ, a, α.

o **Cvičení 6.** Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není průměrem kružnice. Sestrojte množinu středů kružnic vepsaných do všech trojúhelníků ABX, kde bod X probíhá větší (resp. menší) oblouk kružnice s tětivou AB, $X \neq A$, $X \neq B$. Úlohu řešte i pro případ, kdy AB je průměrem kružnice.

o **Cvičení 7.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno těžiště T, průsečík výšek V a pata C_1 výšky v_c.

o **Cvičení 8.** V trojúhelníku ABC prodlužte stranu AB za bod B a vyznačte tam bod K. Stejně prodlužte stranu AC za bod C a vyznačte tam bod L. Sestrojte kružnici tak, aby se dotýkala polopřímek BK, CL a úsečky BC. (Tato kružnice se nazývá **kružnice vně připsaná** straně a. Její střed označme O_a, její poloměr ρ_a.)

o **Cvičení 9.** Dotýká-li se kružnice vepsaná poloměru ρ trojúhelníku ABC přímek AB, BC, CA postupně v bodech X, Y, Z a kružnice vně připsaná straně BC (viz cvičení 8) těchto přímek postupně v bodech U, V, W, platí $|BY|=|CV|$, $|YV|=\big||AB|-|AC|\big|$ a $|XU|=|ZW|=|BC|$. Dokažte. Na základě této znalosti dokažte, že poloměr ρ_a kružnice vně připsané vyjádřený pomocí délek stran a poloměru ρ je roven $\rho_a=\rho\cdot\frac{s}{s-a}=\frac{(s-b)(s-c)}{\rho}$.

o **Cvičení 10.** Dokažte, že obsah trojúhelníku ABC je roven $P=\rho_a(s-a)$, kde ρ_a je poloměr kružnice vně připsané a s je poloviční obvod trojúhelníku (viz cvičení 8). Dále dokažte, že platí rovnost $\rho_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.

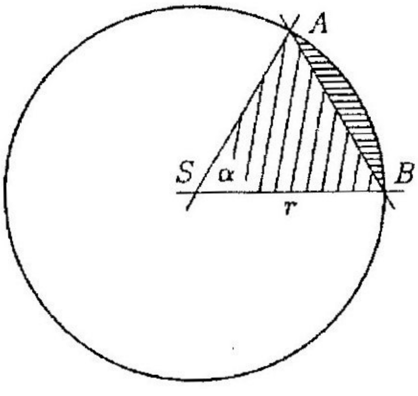
o **Cvičení 11.** Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku je součet délek odvěsen roven součtu průměru kružnice vepsané a průměru kružnice opsané.

o **Cvičení 12.** Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa vnitřního úhlu ACB protne kružnici k v bodě $U \neq C$, osa vnějšího úhlu u vrcholu C protne k v bodě $V \neq C$. Dokažte, že přímka UV je osou strany AB.

o **Cvičení 13.** Dokažte, že v trojúhelníku s výškami v_a, v_b, v_c a poloměrem ρ kružnice vepsané platí $\frac{1}{v_a}+\frac{1}{v_b}+\frac{1}{v_c}=\frac{1}{\rho}$.

21. Délka oblouku kružnice, obsah výseče a úseče

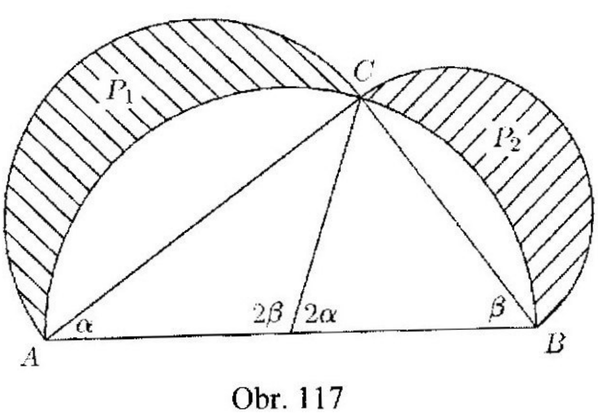
Máme-li kružnici o poloměru r, je její délka
$$o = 2\pi r\,.$$
Délka l oblouku na této kružnici, který odpovídá středovému úhlu α (v obloukové míře), je
$$l = r\alpha\,.$$
Máme-li ovšem úhel α vyjádřen ve stupních, je
$$l = \frac{2\pi r}{360°}\cdot\alpha = \frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha\,.$$
Kruhem o středu S a poloměru r rozumíme množinu všech bodů X roviny, pro které je $|SX| \leq r$. Jeho obsah je roven
$$P = \pi r^2\,.$$



Obr. 116

Máme-li na kružnici o středu S a poloměru r nějaký oblouk, pak ta část kruhu, která leží v příslušném středovém úhlu k uvažovanému oblouku, se nazývá **kruhová výseč** (obr. 116). Označíme-li velikost středového úhlu α v obloukové míře, dostaneme pro obsah výseče
$$P = \frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot\alpha = \frac{1}{2}\alpha r^2\,.$$
Je-li úhel α měřen ve stupňové míře, je
$$P = \frac{\pi}{360°}\cdot\alpha r^2\,.$$
Označme ještě krajní body zvoleného oblouku A, B. Přímka AB rozdělí kruh na dvě části, které se nazývají **kruhové úseče**. Obsah menší úseče ($\alpha \leq \pi$) dostaneme, když od celé výseče odečteme obsah trojúhelníku SAB (obr. 116), tedy
$$P = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)\,.$$

o **Příklad 64.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Polokružnice nad odvěsnami AC, BC ležící v polorovinách opačných k polorovinám ACB a BCA vytvoří spolu s polokružnicí nad průměrem AB a procházející bodem C dva měsíčky (obr. 117). Vypočtěte jejich obsahy. Šrafované útvary se nazývají Hippokratovy měsíčky.



Obr. 117

Řešení. Obsah P_1 měsíčku nad odvěsnou AC vypočteme tak, že od obsahu půlkruhu s průměrem AC odečteme obsah kruhové úseče, jež je částí kruhu o poloměru $\frac{1}{2}|AB|$ a odpovídá středovému úhlu 2β, tedy

$$P_1 = \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\cdot 2\beta - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\sin 2\beta\right) = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{c^2\beta}{4} + \frac{c^2}{8}\sin 2\beta .$$

Podobně máme pro obsah P_2 druhého měsíčku rovnost

$$P_2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{c^2\alpha}{4} + \frac{c^2}{8}\sin 2\alpha .$$

Užitím vzorců $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$, $b = c\sin\beta = c\cos\alpha$ dostaneme

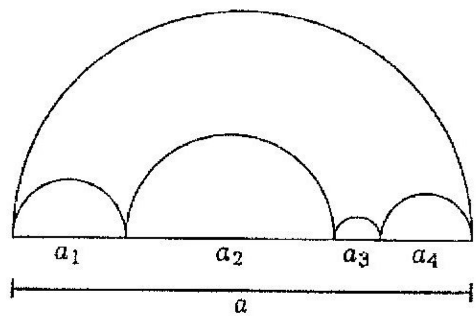
$$P_1 = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{c^2\beta}{4} + \frac{ab}{4}, \qquad P_2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{c^2\alpha}{4} + \frac{ab}{4}.$$

Protože $c^2 = a^2 + b^2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, je $P_1 + P_2 = \frac{ab}{2}$.

V tomto výsledku se vůbec nevyskytuje číslo π, součet obsahů obou měsíčků se rovná obsahu trojúhelníku ABC. Tento zajímavý výsledek dával naději na úspěch matematikům starověku, kteří řešili tzv. problém kvadratury kruhu, tj. euklidovskými konstrukcemi (pravítkem a kružítkem) sestrojit čtverec, který by měl stejný obsah jako daný kruh. Dnes je však dokázáno, že tuto konstrukci kružítkem a pravítkem nelze provést, že je to problém neřešitelný.

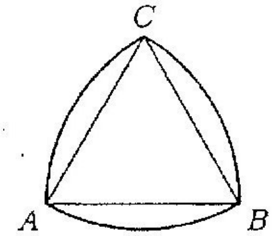
o **Příklad 65.** Úsečku délky a rozdělte na n úseček a nad každou z nich sestrojte polokružnici. Porovnejte součet délek všech těchto polokružnic s délkou polokružnice nad celou úsečkou (obr. 118).

Řešení. Označíme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ délky úseček, na které je rozdělena úsečka délky a. Je tedy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$. Součet délek všech polokružnic nad těmito úsečkami je $\pi\frac{a_1}{2} + \pi\frac{a_2}{2} + \ldots + \pi\frac{a_n}{2}$, délka polokružnice nad úsečkou délky a je $\pi\frac{a}{2}$; oba tyto výrazy se sobě rovnají.



Obr. 118

o **Cvičení 1.** Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Kruhové oblouky se středy v bodech A, B, C procházející vždy zbývajícími dvěma vrcholy trojúhelníku, ohraničují část roviny, které se říká Relauxův trojúhelník (obr. 119). Je to útvar konstantní šířky – zvolíme-li rovinný pás nejmenší možné šířky tak, aby v něm celý Relauxův trojúhelník ležel, pak při otáčení se tento trojúhelník neustále dotýká hranice pásu. Vypočtěte obsah Relauxova trojúhelníku, je-li $|AB| = 6$ cm.



Obr. 119

Poznámka: Obdobné vlastnosti jako Relauxův trojúhelník má každý pravidelný „lichoúhelník". Má tutéž vlastnost pravidelný „sudoúhelník"?

o **Cvičení 2.** Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 10 cm. Čtvrtkružnice o středech A, B, C, D a poloměru 10 cm rozdělí čtverec $ABCD$ na 9 částí. Vypočtěte jejich obsahy.

o **Cvičení 3.** Vypočtěte součet obsahů Hippokratových měsíčků výpočtem obsahu trojúhelníku ABC, který má odvěsny délek a, b, a obsahů půlkruhů příslušných průměrům AC, BC, AB a s použitím Pythagorovy věty.

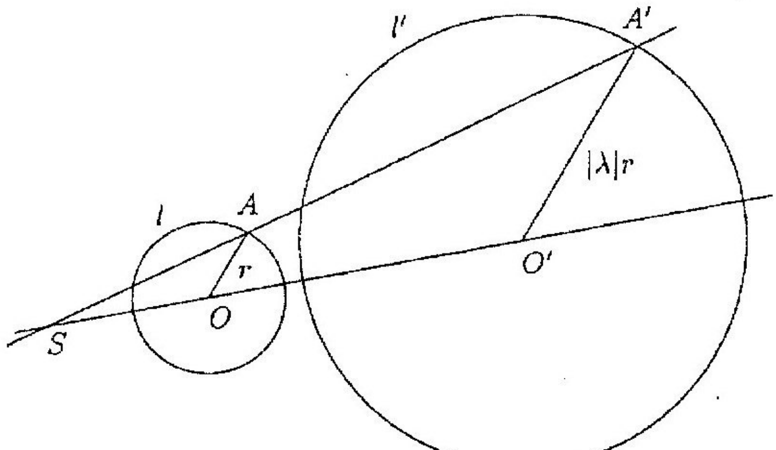
o **Cvičení 4.** Délku l kružnice zvětšíme o jeden metr. O kolik se zvětší poloměr kružnice? Jak tato změna závisí na poloměru původní kružnice? Jak se tato změna projeví např. na zemském rovníku?

22. Vzájemná poloha dvou kružnic, stejnolehlost kružnic

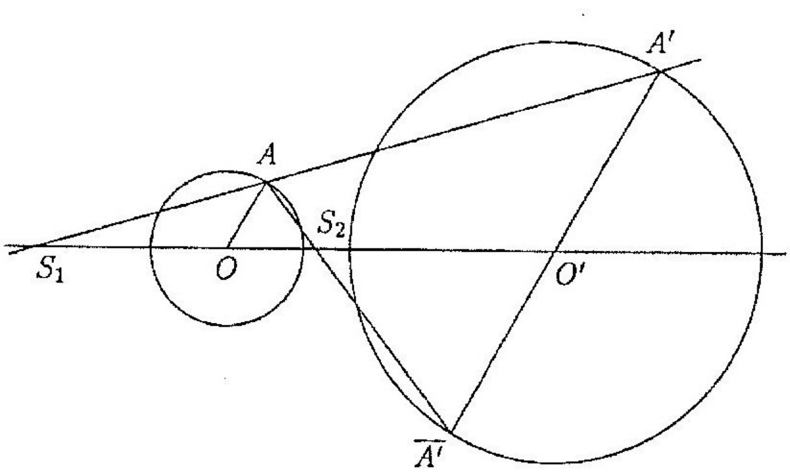
Označíme-li s vzdálenost středů dvou kružnic a r_1, r_2 jejich poloměry, mohou nastat tyto případy:

$s < \lvert r_1 - r_2 \rvert$	$s = \lvert r_1 - r_2 \rvert$	$\lvert r_1 - r_2 \rvert < s < r_1 + r_2$	$s = r_1 + r_2$	$s > r_1 + r_2$
jedna kružnice leží ve vnitřní oblasti druhé	jedna kružnice se dotýká zevnitř druhé	kružnice se protínají ve dvou bodech	kružnice mají vnější dotyk	každá z kružnic leží ve vnější oblasti druhé

Podívejme se na problém existence stejnolehlosti, která zobrazuje jednu z daných dvou kružnic na druhou. Nechť kružnice l o středu O a poloměru r je zobrazena ve stejnolehlosti o středu S a koeficientu λ (obr. 120). Označíme A některý bod kružnice l a O', A' obrazy bodů O, A ve zvolené stejnolehlosti. Pak je $|O'A'| = |\lambda| r$, obrazem kružnice l je kružnice l' o středu O' a poloměru $|\lambda| r$. Úsečky OA, $O'A'$ jsou rovnoběžné, při kladném λ jsou dokonce orientované úsečky OA, $O'A'$ shodně orientované (určují týž orientovaný směr), při záporném λ určují opačné směry.



Obr. 120



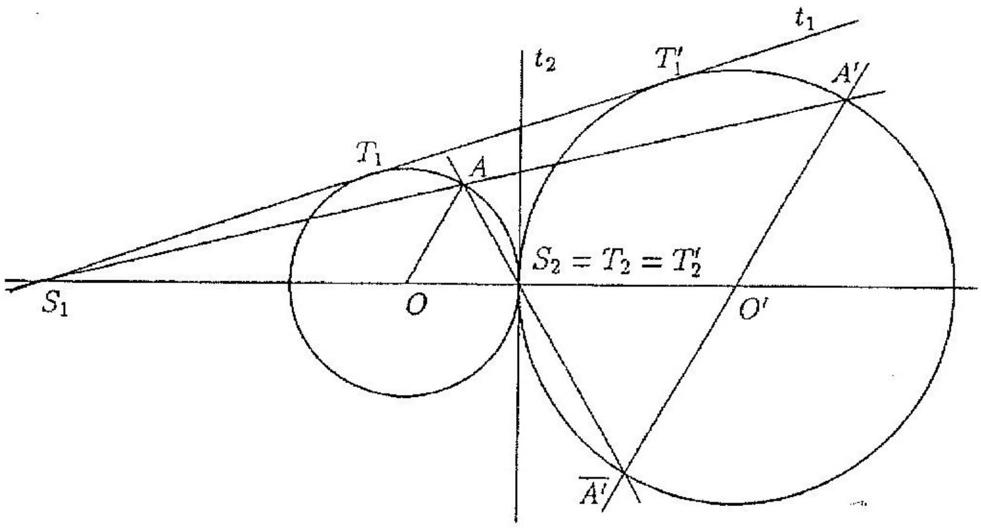
Obr. 121

Mějme nyní v rovině dvě kružnice o různých středech O, O'. Jestliže existuje stejnolehlost zobrazující jednu z nich na druhou, leží střed stejnolehlosti na přímce OO'.

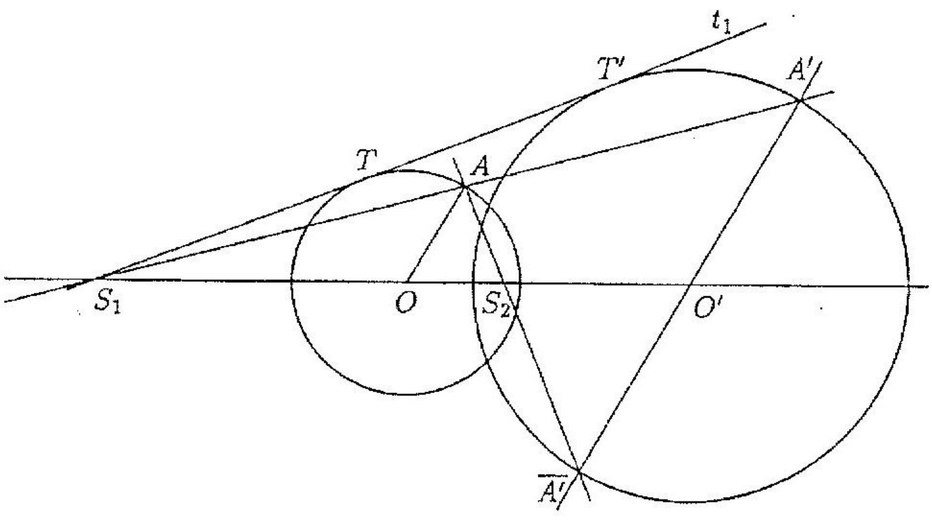
Na první kružnici zvolíme libovolný bod A (který neleží na přímce OO') a na druhé bod A' tak, aby byly přímky OA, $O'A'$ rovnoběžné. Střed hledané stejnolehlosti je průsečíkem přímek OO', AA'. K danému bodu A máme dvě možnosti volby bodu A' (obr. 121). Zdá se tedy, že vždy existují dvě stejnolehlosti zobrazující první kružnici na druhou. Mají-li však kružnice stejný poloměr, je při jedné volbě bodu A' přímka AA' rovnoběžná s přímkou OO' a neexistuje stejnolehlost zobrazující body O, A po řadě na body O', A' (existuje však posunutí zobrazující jednu z daných kružnic na druhou). Jsou-li kružnice soustředné ($O = O'$) a různé, existují vždy dvě stejnolehlosti zobrazující první kružnici na druhou, středy obou stejnolehlosti splývají s bodem O.

o **Příklad 66.** Volte různé polohy dvou kružnic o různých poloměrech, hlavně vně se dotýkající, protínající se, zevnitř se dotýkající, dále když jedna leží uvnitř druhé (ne však soustředné) a nakonec soustředné. Ve všech případech určete polohu obou středů stejnolehlosti těchto kružnic.

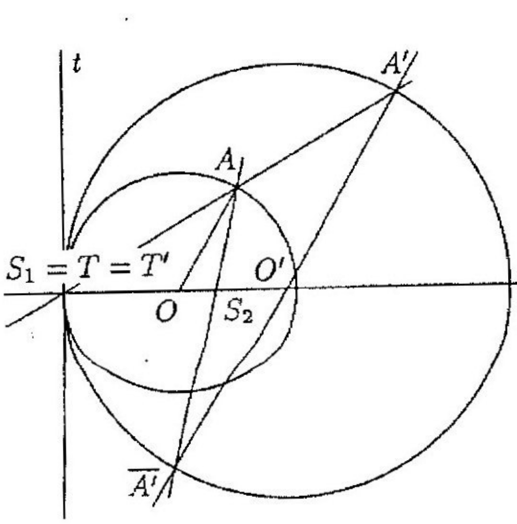
Řešení. Středy stejnolehlosti označíme S_1, S_2. Jejich polohu a způsob jejich nalezení (obdobný jako v předchozí úvaze) vidíte na obr. 122a-d. U soustředných kružnic splynou body O, O', S_1, S_2.



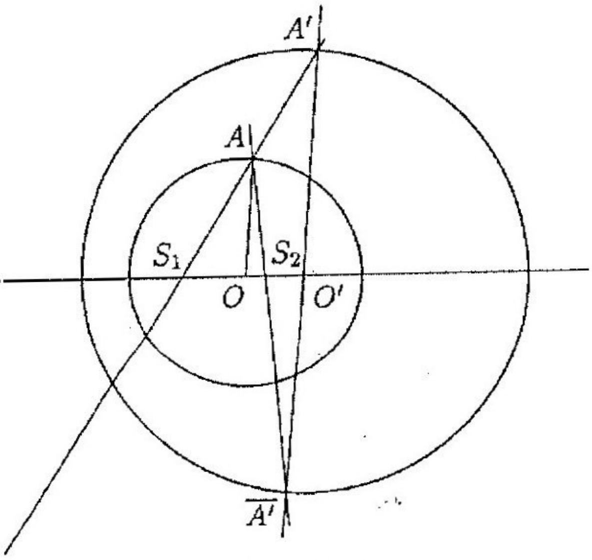
Obr. 122a



Obr. 122b



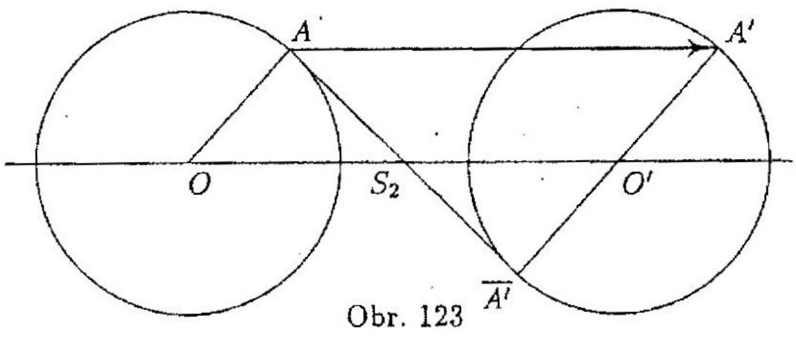
Obr. 122c



Obr. 122d

Můžeme shrnout: Mají-li kružnice k_1, k_2 různé poloměry, existují právě dvě stejnolehlosti, jedna s kladným, druhá se záporným koeficientem, při kterých se kružnice k_1 zobrazí na kružnici k_2. Střed S_1 stejnolehlosti s kladným koeficientem se nazývá **vnější střed stejnolehlosti**, obdobně střed S_2 stejnolehlosti se záporným koeficientem se nazývá **vnitřní střed stejnolehlosti**. O kružnicích říkáme, že jsou **stejnolehlé** (v obou případech).

Mají-li různé kružnice k_1, k_2 stejný poloměr, existuje právě jedna stejnolehlost zobrazující k_1 na k_2; jde o středovou souměrnost. Dále existuje právě jedno posunutí zobrazující kružnici k_1 na kružnici k_2. Na obr. 123 to vidíme pro kružnice ležící vně sebe; pro ostatní vzájemné polohy dvou kružnic je to analogické.

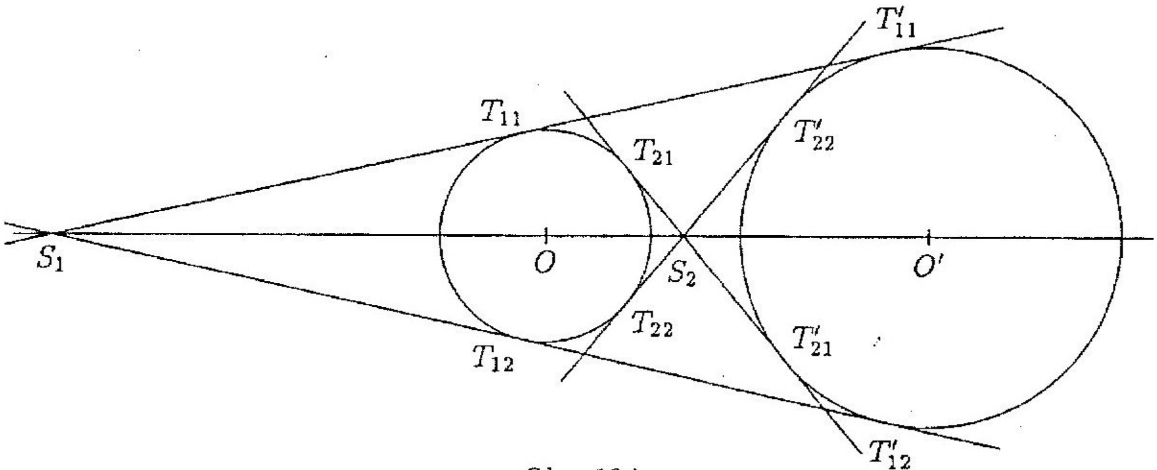


Obr. 123

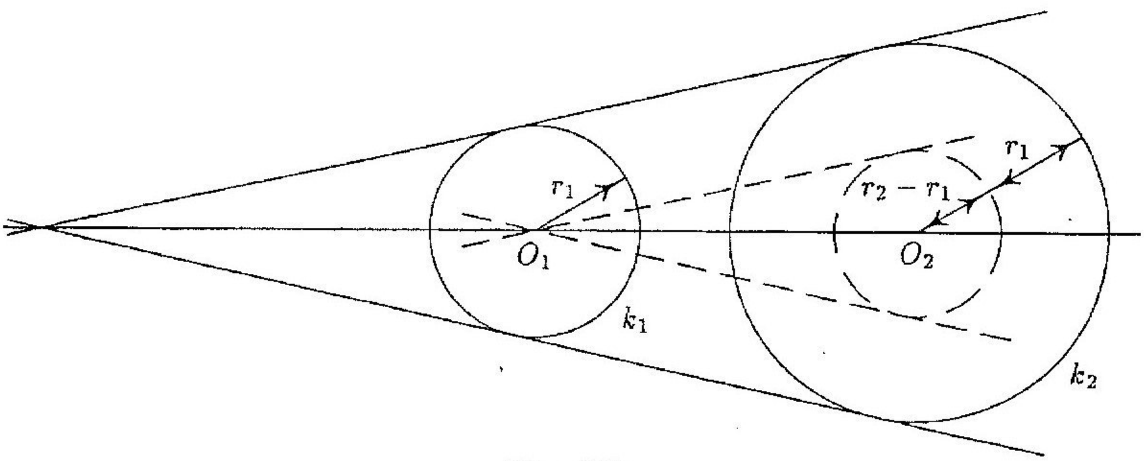
o **Příklad 67.** Mají-li dvě kružnice o nestejných poloměrech společnou tečnu, pak tato tečna prochází středem některé stejnolehlosti zobrazující jednu kružnici na druhou. Dokažte.

Řešení. Středy kružnic označíme O, O', body dotyku kružnic na společné tečně označíme T, T'. Pak jsou úsečky OT, $O'T'$ rovnoběžné, protože jsou obě kolmé ke společné tečně. Proto je obrazem bodu T bod T' v jedné stejnolehlosti zobrazující první kružnici na druhou, a tudíž přímka TT' prochází středem této stejnolehlosti. Pokud existují i další tečny obou kružnic, platí tam stejné úvahy (obr. 122a,b,c, obr. 124).

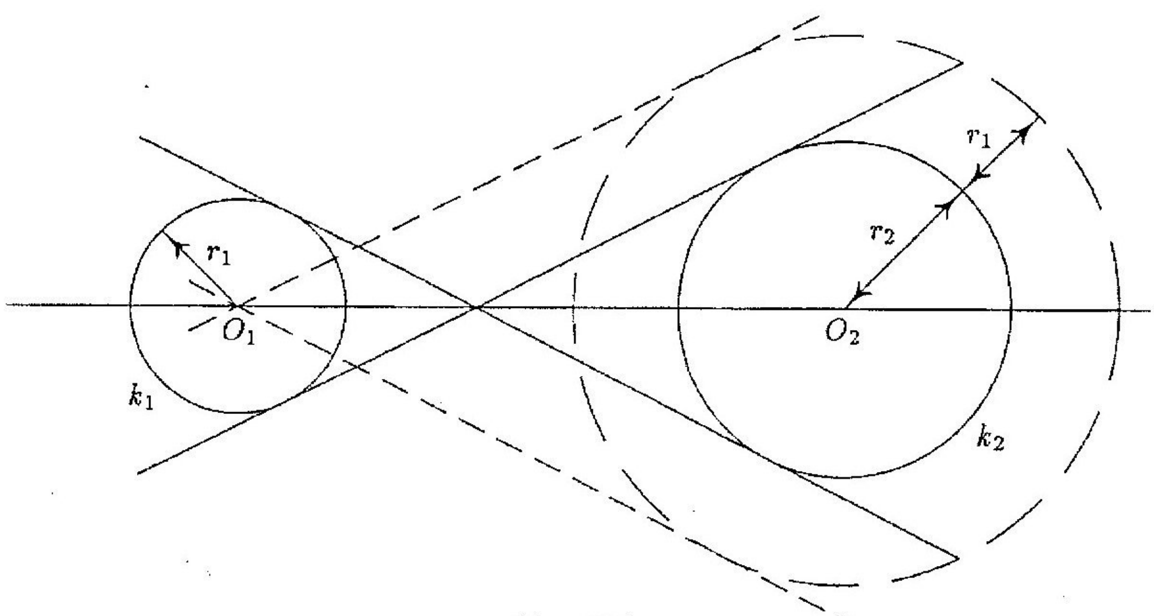
Poznámka. Společné tečny ke dvěma kružnicím o různých poloměrech se dají tedy sestrojit jako tečna z bodu (středu stejnolehlosti kružnic) k jedné z kružnic (příklad 54). Procházejí-li tečny vnějším (vnitřním) středem stejnolehlosti, nazývají se **vnější (vnitřní) tečny** kružnic.



Obr. 124



Obr. 125a

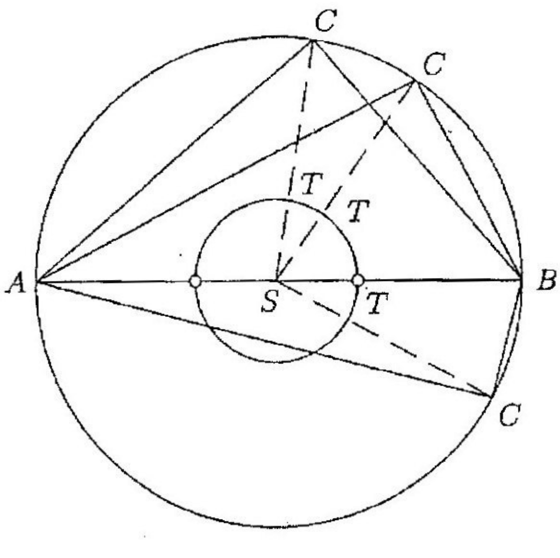


Obr. 125b

Společné tečny dvou kružnic o nestejných poloměrech se dají také sestrojit pomocí tzv. **dilatace**. Tato metoda se zakládá na následující úvaze: Zmenšíme-li poloměr r_2 větší kružnice k_2 o poloměr r_1 menší kružnice k_1, změní se úloha o nalezení společných vnějších tečen kružnic na úlohu o nalezení tečny z bodu O_1 ke kružnici se středem O_2 a poloměrem $r_2 - r_1$ (obr. 125a). Analogicky při hledání vnitřních tečen kružnic zvětšíme větší poloměr r_2 o menší poloměr r_1 a úloha přejde na hledání tečny z bodu O_1 ke kružnici se středem O_2 a poloměrem $r_2 + r_1$ (obr. 125b).

Příklad 68. Najděte útvar, který vyplní těžiště všech pravoúhlých trojúhelníků ABC, které mají společnou přeponu AB.

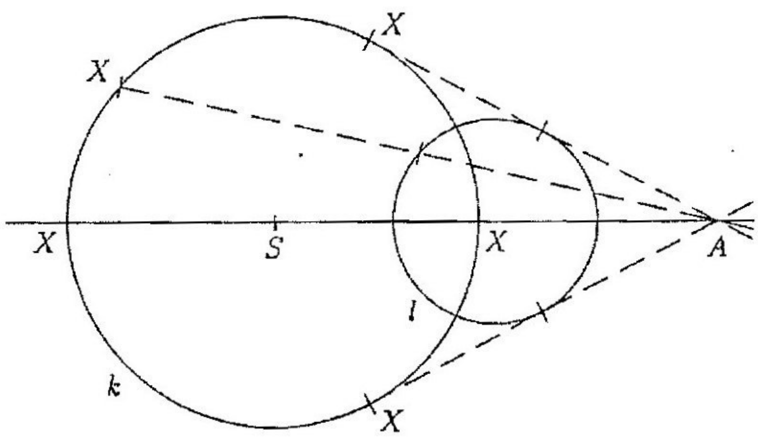
Řešení. Označme S střed přepony AB. Hledaným útvarem je kružnice se středem S a poloměrem $\frac{1}{3}|SA|$, kromě bodů ležících na přeponě AB (obr. 126). Nalezená kružnice a kružnice opsaná pravoúhlým trojúhelníkům ABC jsou stejnolehlé; bod S je jejich vnější střed stejnolehlosti.



Obr. 126

o **Příklad 69.** Je dána kružnice k se středem S a vně kružnice bod A. Sestrojte množinu středů všech úseček AX, kde bod X probíhá celou kružnici k.

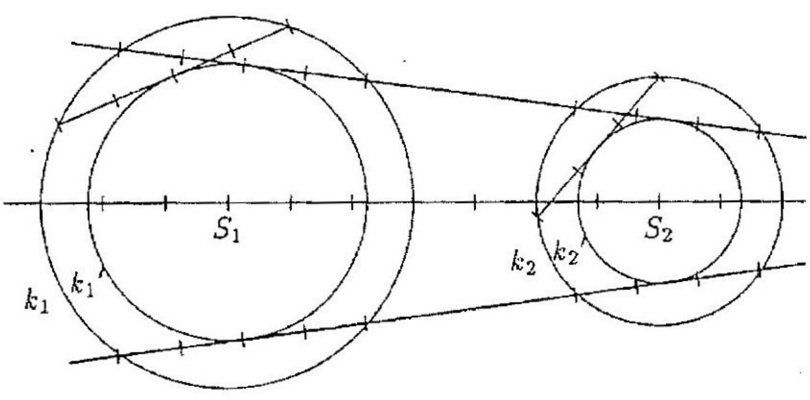
Řešení. Hledanou množinou středů kružnic je kružnice l stejnolehlá s kružnicí k se středem stejnolehlosti A a koeficientem $\frac{1}{2}$ (obr. 127).



Obr. 127

o **Příklad 70.** Jsou dány kružnice k_1 se středem S_1 a poloměrem 3 a kružnice k_2 se středem S_2 a poloměrem 2 a platí $|S_1S_2| = 7$. Sestrojte všechny přímky, na nichž vytínají kružnice k_1, k_2 postupně tětivy délky 4 a 3.

Řešení. V kružnici k_1 sestrojíme nějakou tětivu délky 4 a v kružnici k_2 nějakou tětivu délky 3. K těmto tětivám sestrojíme dotýkající se kružnice k_1', k_2' soustředné s kružnicemi k_1, k_2. Hledané přímky jsou společnými tečnami kružnic k_1', k_2' (obr. 128).



Obr. 128

o **Příklad 71** (***Mongeova věta o stejnolehlosti tří kružnic***). Jsou dány tři kružnice k_1 $(S_1; r_1)$, k_2 $(S_2; r_2)$, k_3 $(S_3; r_3)$, jejichž středy neleží v přímce a poloměry jsou vesměs různé. Jsou-li S_{e12}, S_{i12}, S_{e23}, S_{i23}, S_{e13}, S_{i13} postupně vnější a vnitřní středy stejnolehlostí dvojic příslušných kružnic, leží body S_{e12}, S_{e23}, S_{e13} a také body S_{e12}, S_{i23}, S_{i13} a také body S_{e13}, S_{i12}, S_{i23} a také body S_{e23}, S_{i12}, S_{i13} v přímce. Dokažte.

Řešení. Pokud je složením dvou stejnolehlostí stejnolehlost, jsou středy těchto tří stejnolehlostí kolineární, jak bylo dokázáno ve cvičení 8 v kapitole 8. Navíc mají všechny tři stejnolehlosti kladný koeficient (v případě S_{e12}, S_{e23}, S_{e13}), nebo dvě záporný a jeden kladný (v případech S_{e12}, S_{i23}, S_{i13} a S_{e13}, S_{i12}, S_{i23} a S_{e23}, S_{i12}, S_{i13}). Tím je tvrzení dokázáno.

---

o **Cvičení 1.** Je dána kružnice k a její tětiva AB. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků ABX, kde X je bod kružnice k.

o **Cvičení 2.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, přičemž $|AC| = b$, $|BC| = a$. Kružnice k_1, k_2, k_3 mají středy v bodech A, B, C a každé dvě z nich mají vnější dotyk. Vypočtěte jejich poloměry.

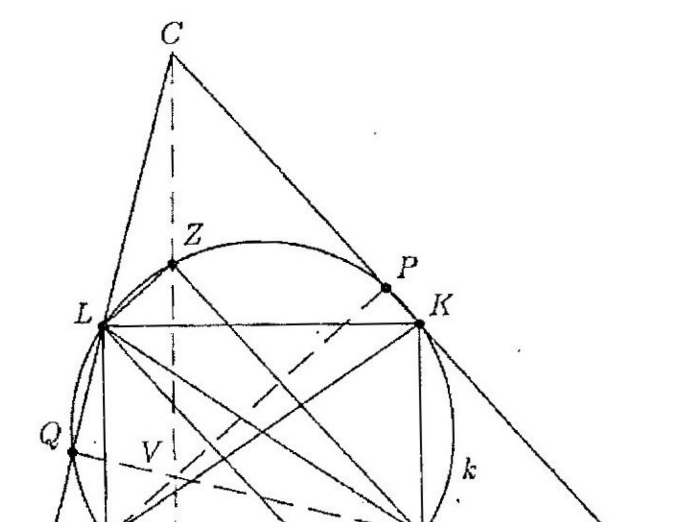
o **Cvičení 3.** Pomocí stejnolehlosti sestrojte kružnici dotýkající se dvou daných různoběžných přímek a procházející daným bodem, který na daných přímkách neleží.

o **Cvičení 4.** Je dána přímka AB. Sestrojte dvojice kružnic, z nichž jedna se dotýká přímky v bodě A, druhá v bodě B a obě mají vnější dotyk. Určete množinu všech bodů dotyku obou kružnic.

23. Feuerbachova a Apolloniova kružnice

V této kapitole se zmíníme o dvou zajímavých kružnicích.

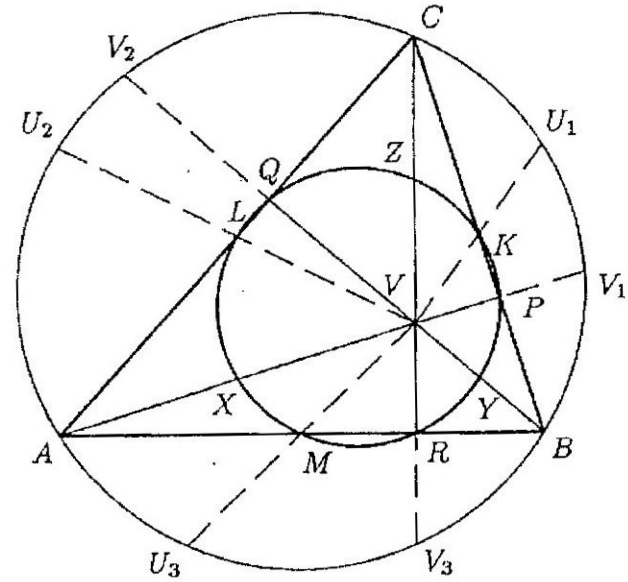
V případě první z nich mějme trojúhelník ABC a označme P, Q, R paty výšek, V průsečík výšek, dále K, L, M středy stran trojúhelníku ABC a X, Y, Z středy úseček AV, BV, CV (obr. 129). Úsečka KL je střední příčka trojúhelníku ABC, tedy $LK \parallel AB$. Podobně je KY střední příčkou v trojúhelníku CBV, proto je $KY \parallel CR$. Totéž platí pro úsečku LX a konečně YX je střední příčka trojúhelníku AVB, proto je $XY \parallel AB$. Tím jsme dokázali, že čtyřúhelník $LKYX$ je pravoúhelník, tj. obdélník nebo čtverec, a lze mu opsat kružnici; označme ji k. Úsečky LY a KX jsou jejími průměry, a protože LQ je kolmá na QY, leží na kružnici k také bod Q. Podobně dokážeme, že na kružnici k leží rovněž bod P; stačí si všimnout, že trojúhelník XPK je pravoúhlý. Jistě



Obr. 129

už sami dokážete, že stejně jako čtyřúhelník $LKYX$ je také $LMYZ$ pravoúhelník, takže na kružnici k nutně leží i body M, Z. Úsečka MZ je dokonce průměrem kružnice k, a protože $ZR \perp RM$, leží na kružnici k i bod R. Na každé kružnici leží samozřejmě nekonečně mnoho bodů, na naší kružnici k však leží devět význačných bodů trojúhelníku ABC – jsou to středy jeho stran, paty výšek a středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku. Proto se kružnici k říká též **kružnice devíti bodů**, nebo také **Feuerbachova kružnice** (podle matematika K. W. Feuerbacha, čti fojerbacha).

Jiný důkaz tvrzení, že těchto devět bodů leží na kružnici, využívá stejnolehlosti. Víme již, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC prochází též body V_1, V_2, V_3 souměrně sdruženými k průsečíku V jeho výšek podle stran trojúhelníku a též body U_1, U_2, U_3 souměrně sdruženými k průsečíku výšek podle středů stran trojúhelníku (obr. 130). Stejnolehlost se středem V a koeficientem $\frac{1}{2}$ zobrazí kružnici opsanou trojúhelníku na kružnici, která prochází patami P, Q, R výšek trojúhelníku, středy K, L, M stran trojúhelníku, středy X, Y, Z úseček VA, VB, VC. To je důkaz, že těchto devět bodů leží na společné kružnici.



Obr. 130

Ještě uvedeme jednu poznámku k Feuerbachové kružnici, jejíž střed označíme F. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC a Feuerbachova kružnice jsou stejnolehlé. Vnější střed stejnolehlosti je průsečík V výšek trojúhelníku ABC (koeficient $\frac{1}{2}$), vnitřní střed stejnolehlosti je těžiště T trojúhelníku ABC (koeficient $-\frac{1}{2}$). Proto F leží společně se středem S kružnice opsané na Eulerově přímce trojúhelníku ABC a platí

$$|TF| = \frac{1}{2}|TS|, \qquad |VF| = \frac{1}{2}|VS|, \qquad |VF| = |FS|.$$

Tedy body V, F, T, S leží na Eulerově přímce v tomto pořadí a platí (obr. 131)

$$|VF| : |FT| : |TS| = 3 : 1 : 2.$$

Obr. 131

o **Příklad 72.** Zjistěte, které z devíti význačných bodu trojúhelníku, kterými prochází jeho Feuerbachova kružnice, mohou splynout.

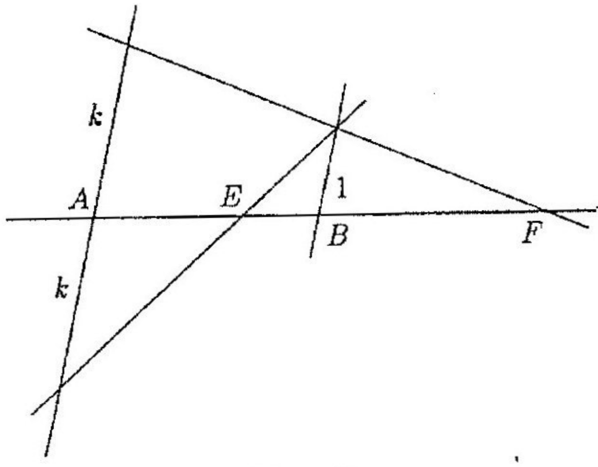
Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku splývá pata výšky na základnu se středem základny. V pravoúhlém trojúhelníku splývají obě paty výšek na odvěsny s vrcholem trojúhelníku, v němž je vnitřní úhel pravý. S tímto bodem splývá i průsečík výšek. Proto středy obou úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku splynou se středy odvěsen, třetí střed splývá s vrcholem pravého úhlu. V rovnostranném trojúhelníku splývají vždy paty výšek a středy stran, Feuerbachova kružnice je totožná s kružnicí trojúhelníku vepsanou.

Nyní se zaměříme na jinou, na začátku odstavce avizovanou kružnici. Předpokládejme, že jsou v rovině dány dva navzájem různé body A, B a nechť je k kladné číslo. Zjistěme, co vytvoří všechny ty body X v rovině, pro které platí

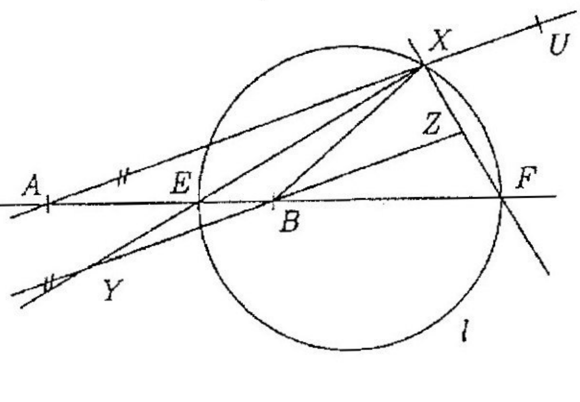
$$\frac{|AX|}{|BX|} = k.$$

Je-li $k = 1$, je odpověď jasná. Hledanou množinou je osa úsečky AB.

Nechť tedy $k \neq 1$. Dokážeme, že množinou všech bodů X v rovině, pro které je $|AX| = k \cdot |BX|$, je kružnice. Především existují na přímce AB dva body, které tuto podmínku splňují; označme je E, F. Dostaneme je snadno: body A, B vedeme dvě rovnoběžné přímky, různé od přímky AB. Na přímku vedenou bodem B naneseme úsečku délky 1, na přímku vedenou bodem A naneseme úsečku délky k, koncové body spojíme a najdeme průsečík s přímkou AB (obr. 132). Podle toho, zda obě úsečky leží v téže polorovině ohraničené přímkou AB nebo v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB, dostaneme bod E nebo bod F. Ze stejnolehlosti se středem F, popřípadě E, při které se bod B zobrazí na bod A, pak plyne $\dfrac{|AF|}{|BF|} = \dfrac{|AE|}{|BE|} = k$.



Obr. 132



Obr. 133

Jiné body na přímce AB nemohou tuto podmínku splňovat. Předpokládejme, že bod X ležící mimo přímku AB splňuje podmínku $\dfrac{|AX|}{|BX|} = k$. Bod X spojíme přímkami s body A, E, B, F a bodem B vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou AX (obr. 133). Její průsečíky s přímkami XE, XF označíme Y, Z. Ze stejnolehlosti trojúhelníků AEX, BEY plyne $\dfrac{|AX|}{|BY|} = \dfrac{|AE|}{|BE|} = k$, takže je $|BY| = |BX|$. Trojúhelník BXY je tedy rovnoramenný, odkud plyne, že $|\sphericalangle EXB| = |\sphericalangle XYB| = |\sphericalangle EXA|$, takže přímka XE je osou úhlu AXB. Obdobně ze stejnolehlosti trojúhelníků AFX, BFZ dokážeme, že přímka XF je osou úhlu přímek AX, BX, neboli že přímka XF je osou úhlu BXU, kde U je bod polopřímky AX ležící za bodem X. Jsou-li však XE a XF osy dvojice přímek AX, BX, je úhel EXF pravý, leží tedy bod X na Thaletově kružnici l nad průměrem EF.

Dokážeme ještě obráceně, že každý bod X kružnice l má vlastnost $\frac{|AX|}{|BX|} = k$. Zvolme libovolný bod X na kružnici l různý od bodů E, F. Obdobně jako v předchozím kroku sestrojíme body Y, Z. Trojúhelník YXZ je pravoúhlý a ze stejnolehlosti trojúhelníků AXE, BYE a AFX, BFZ plyne $\frac{|AX|}{|BY|} = \frac{|AE|}{|BE|} = k$, $\frac{|AX|}{|BZ|} = \frac{|AF|}{|BF|} = k$, takže $|BY| = |BZ|$. Je tedy bod B středem přepony v pravoúhlém trojúhelníku YXZ, takže je středem kružnice trojúhelníku opsané. Je proto $|BY| = |BX| = |BZ|$, a tudíž $\frac{|AX|}{|BY|} = \frac{|AX|}{|BX|} = k$, takže bod X je bodem uvažované množiny.

Kružnice l je množinou všech bodů X, pro které platí $|AX| = k \cdot |BX|$ pro dané různé body A, B a kladný koeficient k, a nazývá se **Apolloniova kružnice** (Apollonios z Pergy žil kolem roku 200 př.n.l., znal již velmi důkladně teorii kuželoseček).

Poznámka. Z vlastnosti Apolloniovy kružnice vyplývá, že v každém trojúhelníku osa vnitřního úhlu dělí protilehlou stranu ve stejném poměru, jako je poměr délek příslušných přilehlých stran.

o **Příklad 73.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $|AB| = 9$, $|AC| : |BC| = 2$ a $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. Zvolíme úsečku AB délky 9 a uvnitř úsečky AB bod E tak, aby platilo $|AE| : |BE| = 2$. Dále zvolíme na polopřímce AB bod F tak, aby $|AF| : |BF| = 2$. Kružnice nad průměrem EF je množinou všech bodů X s vlastností $|AC| : |BC| = 2$, vrchol C hledaného trojúhelníku musí tedy ležet na této kružnici. Můžeme se omezit na jednu polorovinu ohraničenou přímkou AB, a tudíž na polokružnici l nad průměrem EF. Protože $|\sphericalangle ACB| = \frac{\pi}{4}$, musí bod C ležet též na oblouku k kružnice ve zvolené polorovině. Krajními body oblouku jsou body A, B, středem kružnice je bod S na ose úsečky AB, pro který je $|\sphericalangle ASB| = \frac{\pi}{2}$. Oblouk k a polokružnice l se protínají právě v jednom hledaném bodě C.

o **Příklad 74.** Na přímce jsou dány různé body A, B, C, D v tomto pořadí. Najděte všechny body, z nichž jsou úsečky AB, BC, CD vidět pod stejným úhlem.

Řešení. Hledaný bod nazvěme X. Jelikož má platit $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle BXC|$, platí podle poznámky výše $|AX| : |CX| = |AB| : |BC|$. Proto bod X leží na Apolloniově kružnici určené body A, C a poměrem $|AB| : |BC|$. Analogicky bod X též leží na Apolloniově kružnici určené body B, D a poměrem $|BC| : |CD|$.

o **Příklad 75.** Je dána kružnice k_1 se středem S_1 a poloměrem r_1 a vně další kružnice k_2 se středem S_2 a poloměrem r_2, $r_2 < r_1$. Vnitřní a vnější středy stejnolehlosti kružnic označme S_i, S_e, koeficient stejnolehlosti (jeho absolutní hodnotu) označme k. Dokažte, že

a) kružnice l sestrojená nad průměrem S_iS_e je Apolloniovou kružnicí určenou body S_1, S_2 a poměrem k,

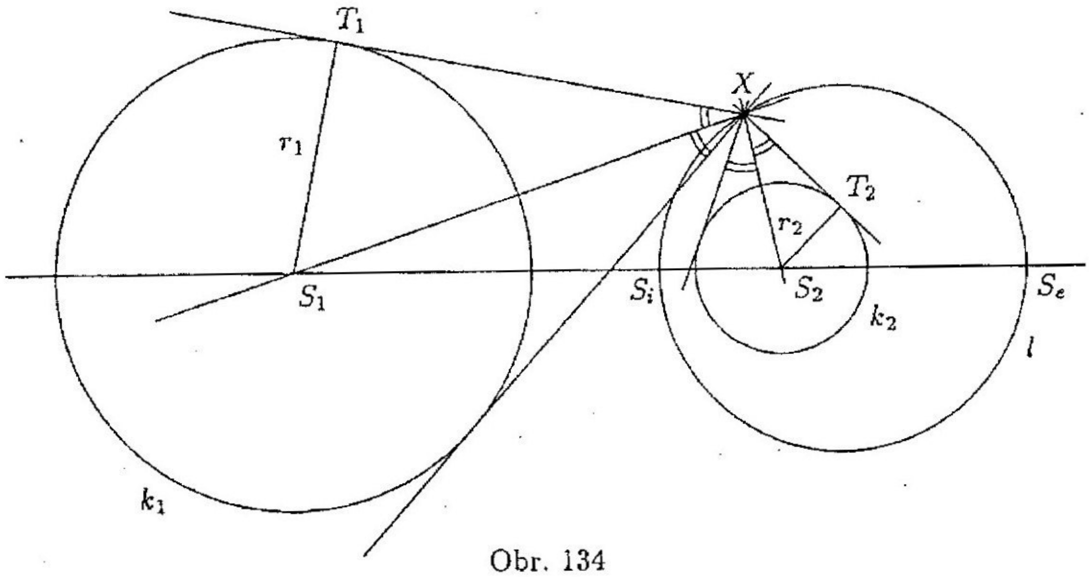
b) z každého bodu X kružnice l jsou obě kružnice k_1, k_2 vidět pod stejným úhlem. (Každý bod X může poskytovat jiný úhel.)

c) Prozkoumejte úlohy a), b) i pro jiné polohy kružnic k_1, k_2.

Řešení. (obr. 134)

a) Jelikož pro body S_i, S_e ze stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 platí $\frac{|S_iS_1|}{|S_iS_2|}=\frac{|S_eS_1|}{|S_eS_2|}=\frac{r_1}{r_2}=k$, je kružnice s průměrem S_iS_e hledanou Apolloniovou kružnicí.

b) Pro bod X kružnice l z vlastnosti Apolloniovy kružnice platí $\frac{|XS_1|}{|XS_2|}=\frac{|S_iS_1|}{|S_iS_2|}=\frac{r_1}{r_2}=k$, to znamená, že trojúhelníky XS_1T_1 a XS_2T_2 jsou podobné, což značí, že $|\sphericalangle S_1XT_1|=|\sphericalangle S_2XT_2|$.



Obr. 134

Apolloniova kružnice je také vhodná k nalezení toho jediného samodružného bodu podobnosti, která není shodností (kapitola 9). Je-li podobnost dána např. trojicí různých vzorů A, B, C a k nim trojicí obrazů A', B', C', je znám koeficient podobnosti $k=\frac{|A'B'|}{|AB|}$. Označíme-li S samodružný bod podobnosti, musí platit $|SA'|=k\cdot|SA|$, $|SB'|=k\cdot|SB|$, $|SC'|=k\cdot|SC|$. Bod S tedy patří Apolloniovým kružnicím určeným dvojicemi bodů A, A' a B, B' a C, C' a ve všech třech případech koeficientem k a sestrojuje se jako průsečík Apolloniových kružnic.

---

o **Cvičení 1.** Kdy splynou body V, F, T, S v obr. 131?

o **Cvičení 2.** Je-li ostroúhlý trojúhelník ABC vepsán do kružnice k, dělí body A, B, C kružnici na tři oblouky. Překlopíme-li každý z nich podle příslušné strany trojúhelníku, získáme tři oblouky procházející jedním bodem. Dokažte.

o **Cvičení 3.** Na úsečce AB je dán bod E různý od středu úsečky AB. Sestrojte Apolloniovu kružnici určenou body A, B a poměrem $|AE|:|BE|$.

o **Cvičení 4.** Je dána Apolloniova kružnice určená body A, B a koeficientem k. Sestrojte Apolloniovu kružnici určenou body A, B a koeficientem $\frac{1}{k}$.

o **Cvičení 5.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li při obvyklém značení dáno:
a) c, t_c, $v_a : v_b = 3:2$ (návod: $v_a : v_b = b : a$); b) b, c, $3\cdot t_c = 4\cdot a$; c) b, t_b, $t_a : t_c = 2$.

o **Cvičení 6.** Jsou dány body A, B ležící uvnitř téhož průměru kružnice k. Sestrojte dvě shodné tětivy kružnice k, které mají společný jeden krajní bod a každá z nich prochází jedním z bodů A, B.

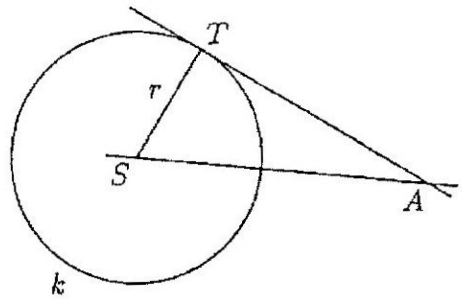
o **Cvičení 7.** Sestrojte bod, z něhož jsou vidět tři dané kružnice pod stejným úhlem.

o **Cvičení 8.** Je dán trojúhelník ABC. Označme E, F průsečíky os úhlů přímek AC, BC s přímkou AB. Dokažte, že $\dfrac{|AE|}{|BE|}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{|AC|}{|BC|}$.

24. Mocnost bodu ke kružnici

Je-li v rovině dána kružnice k se středem S a poloměrem r a v její vnější oblasti bod A, můžeme vést bodem A tečnu ke kružnici k. Její bod dotyku označíme T (obr. 135). Trojúhelník STA je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu T, a platí tedy

$$|AT|^2=|AS|^2-r^2.$$



Obr. 135

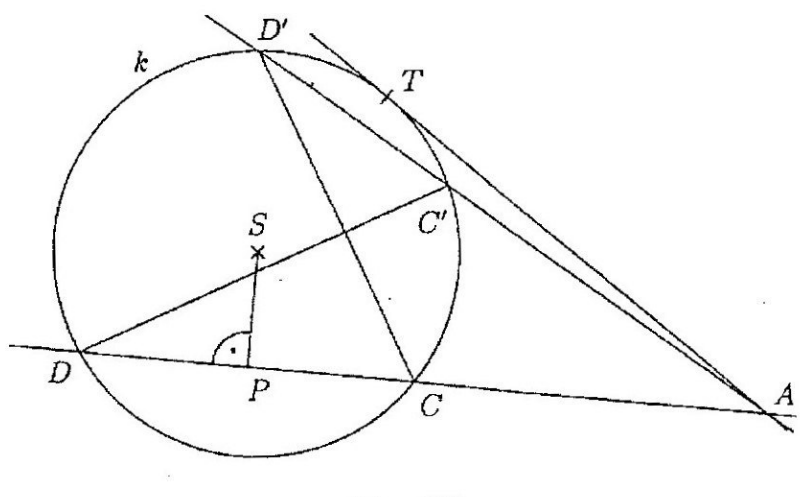
Číslo $|AS|^2-r^2$ se nazývá **mocnost bodu A ke kružnici k** a budeme ho definovat i v případě, kdy je bod A bodem kružnice k nebo bodem vnitřní oblasti kružnice k. Mocnost bodu A ke kružnici k budeme značit $M(A, k)$. Platí tedy:

$M(A, k) > 0$, právě když A je bodem vnější oblasti kružnice k,
$M(A, k) = 0$, právě když A je bodem kružnice k,
$M(A, k) < 0$, právě když A je bodem vnitřní oblasti kružnice k.

Veďme bodem A libovolnou sečnu kružnice k, její průsečíky s kružnicí k označme C, D. Předpokládejme nejdříve, že A je bodem vnější oblasti kružnice k (obr. 136). Označme P patu kolmice vedené bodem S na přímku AC. Je pak $|AD| = |AP| + |PD|$, $|AC| = |AP| - |PC|$. Vzhledem k $|PD| = |PC|$ je

$$|AC|\cdot|AD|=|AP|^2-|PC|^2=|AS|^2-|SP|^2-\left(r^2-|SP|^2\right)=|AS|^2-r^2=M\left(A,k\right).$$

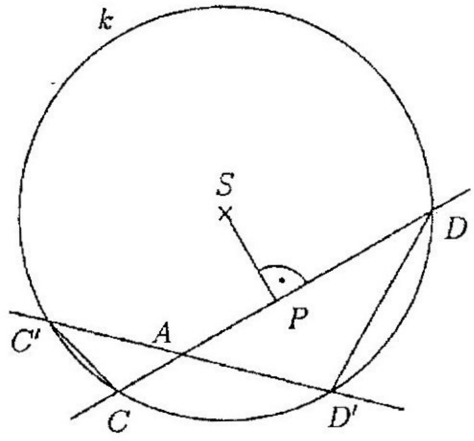
Vidíme, že hodnota $|AC|\cdot|AD|$ nezávisí na tom, kterou sečnu jsme bodem A vedli. Vedeme-li bodem A sečnu, která protíná kružnici k v bodech C', D', je $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD'|$ a tato hodnota se rovná také hodnotě $|AT|^2$, kde je T bod dotyku tečny vedené bodem A ke kružnici k. Tečnu můžeme chápat jako mezní případ sečny, kdy body C' a D' splynou v jeden bod T.



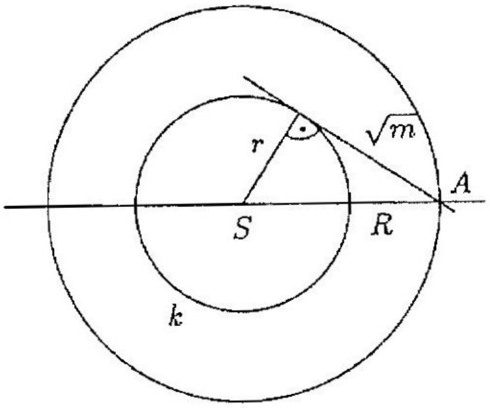
Obr. 136

Rovnost $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD'|$ můžeme také dokázat pomocí podobnosti trojúhelníků. Z věty o obvodových úhlech plyne $|\sphericalangle C'DC| = |\sphericalangle C'D'C|$ (obvodové úhly příslušné oblouku CC') a podle věty (*uu*) dostáváme, že jsou podobné trojúhelníky $AC'D$ a ACD'. Je tedy $\frac{|AC'|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AD'|}$, odkud $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD'|$.

Stejný výsledek dostaneme, i když je bod A bodem vnitřní oblasti kružnice k (obr. 137). Je pak $|AC|\cdot|AD| = (|CP| - |AP|)(|DP| + |AP|) = |PD|^2 - |AP|^2 = r^2 - |SP|^2 - (|AS|^2 - |SP|^2) =$ $= r^2 - |AS|^2 = -M(A,k)$. Podobně jako v předcházejícím případě bychom mohli i zde využít podobnosti trojúhelníků ACC' a $AD'D$. Je tedy $\frac{|AC'|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AD'|}$, tj. $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD'|$, a tato hodnota se rovná absolutní hodnotě záporné mocnosti bodu A ke kružnici k.



Obr. 137



Obr. 138

o **Příklad 76.** Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Určete množinu všech bodů A, jejichž mocnost ke kružnici k je m, $m > 0$.

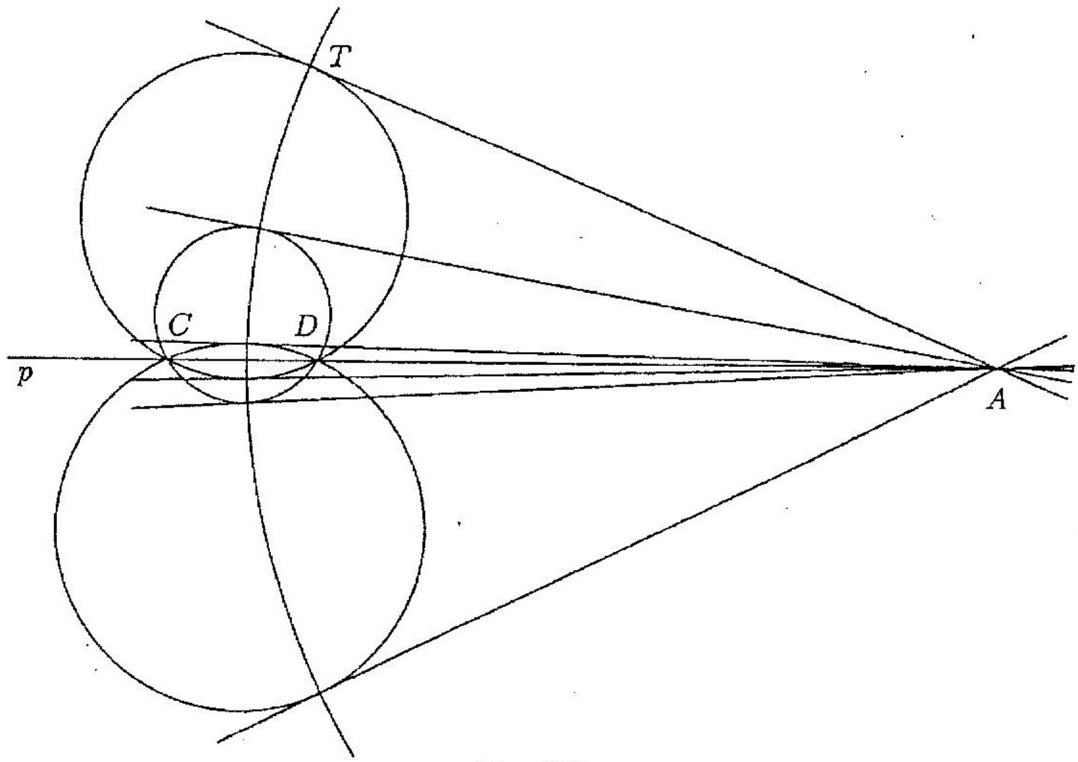
Řešení. Hledané body budou ležet na kružnici se středem S a poloměrem R, pro který platí $m = R^2 - r^2$, neboli $R = \sqrt{m + r^2}$. Konstrukce této kružnice je patrná z obr. 138.

o **Příklad 77.** Na přímce p leží různé body C, D a též bod A vně úsečky CD. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body C, D (tzv. svazek protínajících se kružnic) a ke každé z nich veďte tečny z bodu A. Dokažte, že všechny body dotyku leží na kružnici se středem A a s poloměrem $\sqrt{|AC|\cdot|AD|}$.

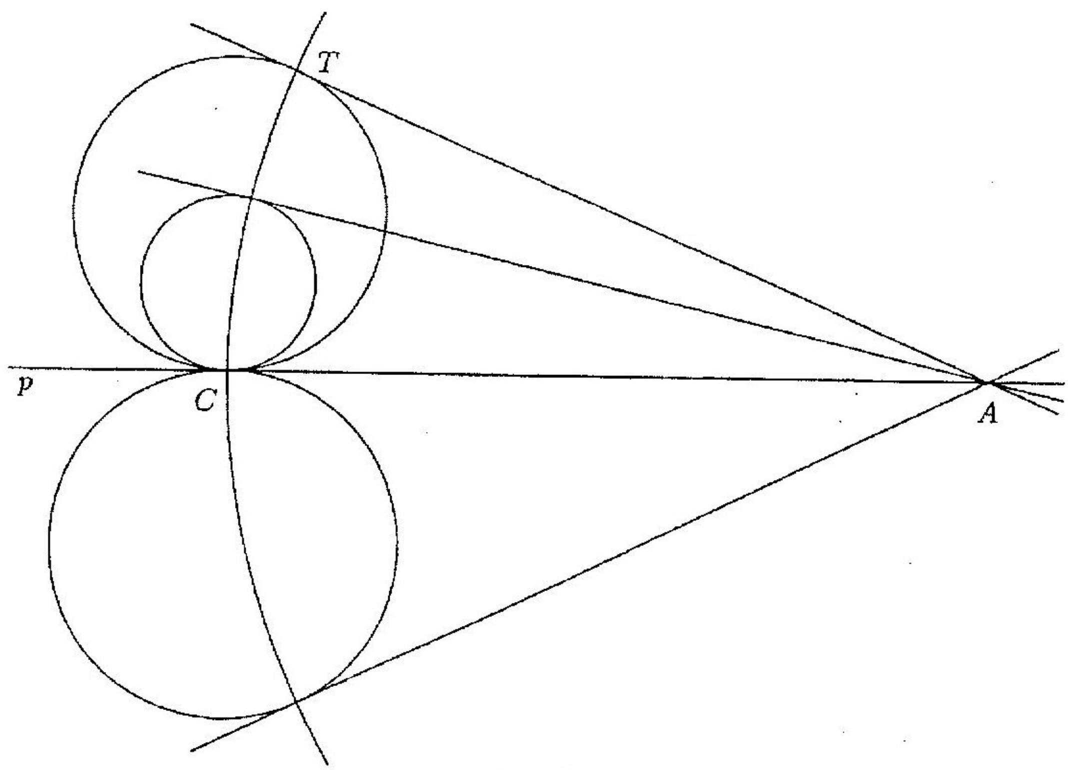
Řešení. Mocnost bodu A ke každé kružnici svazku je rovna $|AC|\cdot|AD|$, tj. stejná pro všechny kružnice svazku. Tato mocnost je též rovna číslu $|AT|^2$, kde T je bod dotyku tečny vedené z bodu A ke kružnicím svazku (obr. 139), tzn. délka tečny z bodu A do bodu dotyku T je konstantní pro všechny kružnice svazku. Ta délka je $|AT| = \sqrt{|AC|\cdot|AD|}$.

o **Příklad 78.** Na přímce p leží bod C a též další bod A. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě C (tzv. svazek dotýkajících se kružnic) a ke každé z nich veďte tečny z bodu A. Dokažte, že všechny body dotyku leží na kružnici se středem A a poloměrem $|AC|$.

Řešení. Je analogické jako u předchozího příkladu (obr. 140).



Obr. 139



Obr. 140

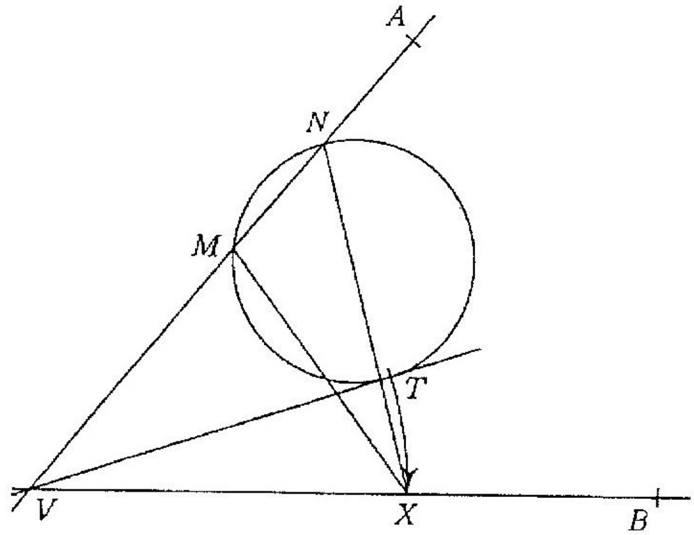
o **Příklad 79.** Jsou dány úsečky délek a, b. Sestrojte úsečku délky $x = \sqrt{ab}$.

Řešení. Úlohu bychom mohli vyřešit užitím některé z Euklidových vět. Pomocí mocnosti bodu ke kružnici můžeme postupovat takto: Na libovolné přímce sestrojíme body

A, C, D tak, aby $|AC| = a$, $|AD| = b$ a aby byly polopřímky AC, AD totožné. Sestrojíme pak libovolnou kružnici procházející body C, D a tečnu k ní vedenou bodem A. Pro bod dotyku T pak platí $|AT|^2 = ab$, tedy $x = |AT| = \sqrt{ab}$ (obr. 139).

o **Příklad 80.** Je dán úhel AVB a uvnitř ramene VA úsečka MN. Na rameni VB najděte bod X tak, aby velikost úhlu MXN byla co největší.

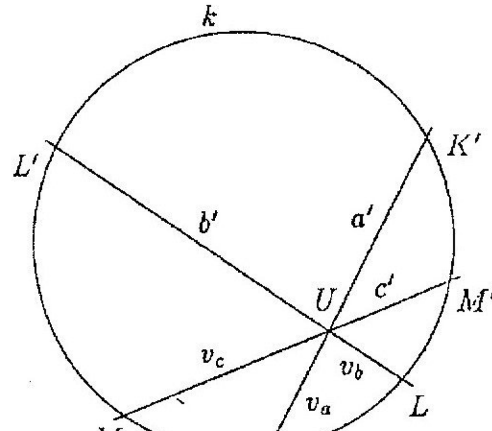
Řešení. Hledaný bod X leží s body M, N na nějaké kružnici svazku protínajících se kružnic určeném body M, N. Aby bod X ležel na rameni VB, musí se jednat o kružnici, která se buď dotýká přímky VB, nebo ji protíná. Obvodový úhel MXN je tím větší, čím menší poloměr má kružnice procházející body M, N. Jde tedy vlastně o úlohu sestrojit kružnici, která prochází body M, N a dotýká se přímky VB. Můžeme ji řešit např. pomocí mocnosti bodu V ke kružnicím svazku. Sestrojíme libovolnou kružnici procházející body M, N, k ní sestrojíme tečnu VT a bod dotyku T otočíme kolem bodu V na rameno VB. Získáme bod X (obr. 141). Takové body X jsou dva, avšak jen jeden je řešením (proč?), pokud není úhel AVB pravý.



Obr. 141

o **Příklad 81.** Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li známy velikosti jeho výšek v_a, v_b, v_c.

Řešení. Ze společného bodu U sestrojme různými směry úsečky UK, UL, UM o délkách v_a, v_b, v_c v tomto pořadí tak, aby body K, L, M neležely v přímce. Z bodů K, L, M sestrojíme kružnici k a v ní tětivy KK', LL', MM', které procházejí bodem U (obr. 142a); označme $|UK'| = a'$, $|UL'| = b'$, $|UM'| = c'$. Z mocnosti bodu U ke kružnici k platí $v_a \cdot a' = v_b \cdot b' = v_c \cdot c'$ a ze vzorce pro obsah trojúhelníku ABC platí $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$. Z obou vztahů pak plyne rovnost $a : b : c = a' : b' : c'$. Sestrojíme tedy trojúhelník o stranách délek a', b', c' a pak už snadno sestrojíme trojúhelník ABC.



Obr. 142a

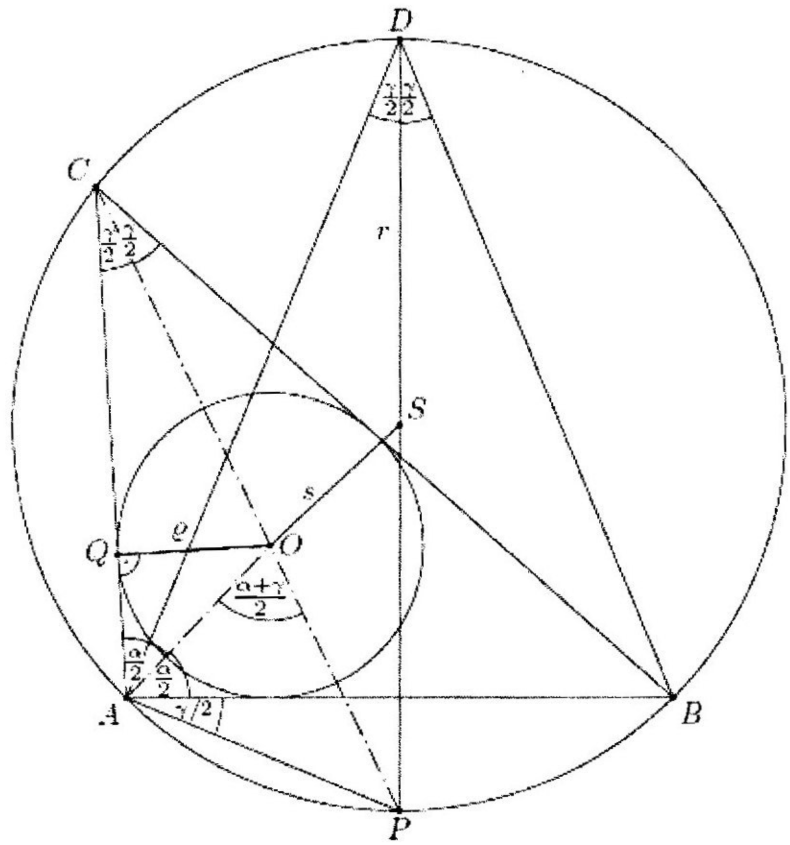
o **Příklad 82** (***Eulerova věta***). Dokažte, že v každém trojúhelníku, který má poloměr r kružnice opsané a poloměr ρ kružnice vepsané, je vzdálenost s středů kružnice opsané a kružnice vepsané rovna

$$s = \sqrt{r^2 - 2r\rho}\,.$$

Řešení. Je dán trojúhelník ABC a jemu opsaná kružnice. Střed kružnice opsané je S, střed kružnice vepsané je O. Do této kružnice vepíšeme rovnoramenný trojúhelník ABD např. se základnou AB (obr. 142b). (Pokud je již trojúhelník ABC rovnoramenný, položíme $D = C$ a všechny další úvahy jsou platné i v tomto případě.)

Nejprve dokážeme, že trojúhelník APO, kde P je střed oblouku AB, je rovnoramenný se základnou AO. Je totiž jednak úhel AOP výplňkový k úhlu AOC trojúhelníku AOC, proto má velikost $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, jednak je velikost úhlu OAP rovna $\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$, neboť úhel PAB je obvodový k oblouku PB.

Je vidět, že trojúhelníky PDA a OCQ jsou podobné, proto platí $\frac{|AP|}{2r}=\frac{\rho}{|OC|}$, neboli $|AP|\cdot|OC| = 2r\rho$. Jelikož je ale $|AP| = |OP|$, je $|OP|\cdot|OC| = 2r\rho$. Tento součin vyjadřuje mocnost bodu O ke kružnici opsané trojúhelníku ABC, proto je také $|OP|\cdot|OC| = s^2 - r^2$. Z posledních dvou rovností plyne dokazovaný vztah.



Obr. 142b

Přistupme ještě k dalšímu pojmu vycházejícímu z mocnosti bodu ke kružnici. Jsou-li v rovině dány dvě kružnice, kružnice k o středu S a poloměru r a kružnice l o středu U a poloměru ρ, můžeme se ptát, které body roviny mají k oběma kružnicím stejnou mocnost. V případě $U = S$ a $r = \rho$ (tedy $k = l$) je to samozřejmě každý bod roviny, je-li $U = S$ a $r \neq \rho$, nemá žádný bod roviny ke kružnicím k, l stejnou mocnost. Zajímavý je pouze případ $U \neq S$, tedy případ kružnic nesoustředných.

Hledáme tedy množinu všech bodů X, pro které platí

$$|XS|^2 - r^2 = |XU|^2 - \rho^2. \qquad (*)$$

Označme X_1 kolmý průmět bodu X na přímku SU. Je

$$|XS|^2 = |X_1S|^2 + |XX_1|^2, \qquad |XU|^2 = |X_1U|^2 + |XX_1|^2,$$

takže rovnost (*) platí právě tehdy, platí-li

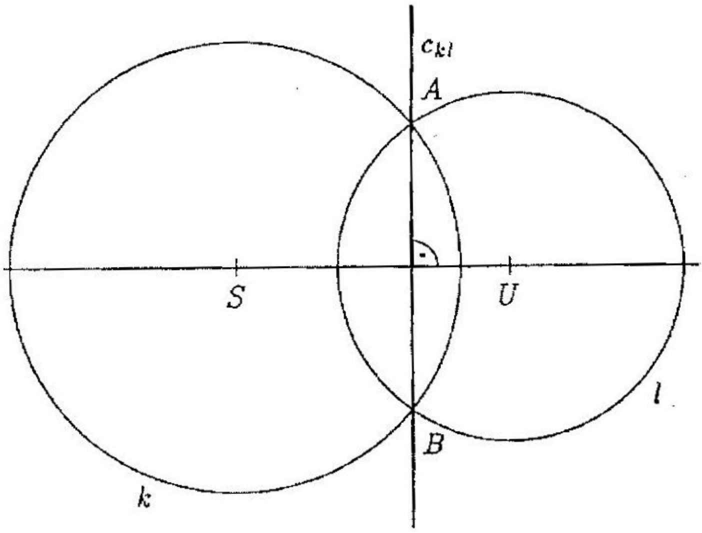
$$|X_1S|^2 - r^2 = |X_1U|^2 - \rho^2. \qquad (**)$$

A pro každý bod X_1 přímky SU, který tuto rovnici splňuje, splňují rovnici (*) také všechny body X ležící na kolmici k přímce SU vedené bodem X_1. Můžeme předpokládat, že $r \geq \rho$. Z rovnosti (**) pak plyne $|X_1S| \geq |X_1U|$; leží tedy bod X_1 na polopřímce VU, kde V je střed úsečky SU, takže $|X_1U| = ||US| - |SX_1||$. Dosazením do (**) dostáváme

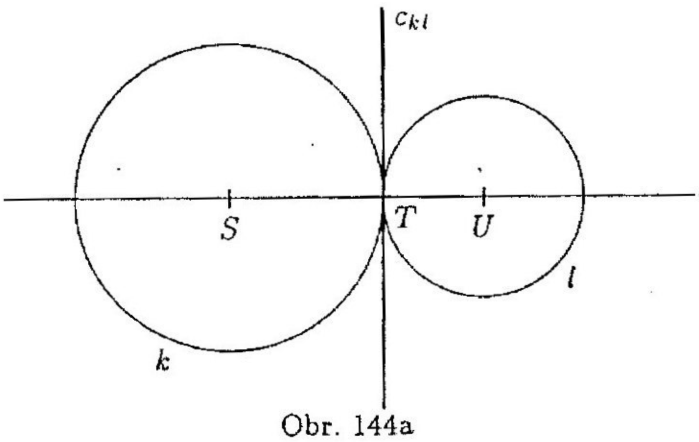
$$|SX_1| = \frac{r^2 - \rho^2 + |US|^2}{2 \cdot |US|} > 0.$$

Vidíme, že takový bod X_1 existuje právě jeden, a tudíž množinou všech bodů, jež mají k nesoustředným kružnicím k, l stejnou mocnost, je přímka kolmá ke spojnici středů obou kružnic. Tato přímka se nazývá **chordála kružnic** k,l; označme ji c_{kl}.

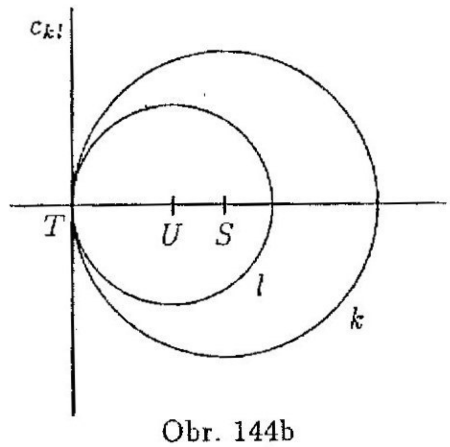
Jestliže se kružnice k, l protínají v bodech A, B, je jejich chordálou přímka AB, neboť body A, B mají k oběma kružnicím stejnou mocnost (nulovou) (obr. 143). Dotýkají-li se kružnice k, l, je jejich chordálou jejich společná tečna t ve společném bodě T (obr. 144a,b). Každý bod X přímky t má totiž k oběma kružnicím stejnou mocnost rovnající se číslu $|XT|^2$. Jestliže se kružnice k, l ani neprotínají, ani nedotýkají, zvolíme libovolnou kružnici m, která obě kružnice k, l protíná. Průsečík chordály kružnic k, m a chordály kružnic l, m má pak stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k, l, m, a musí jím tedy procházet i chordála kružnic k, l, o které víme, že je kolmá na spojnici středů kružnic k, l. Můžeme ji tedy sestrojit (obr. 145a,b). Střed kružnice m však nesmíme volit na spojnici SU, to by byla chordála kružnic k, m s chordálou kružnic l, m rovnoběžná.



Obr. 143



Obr. 144a

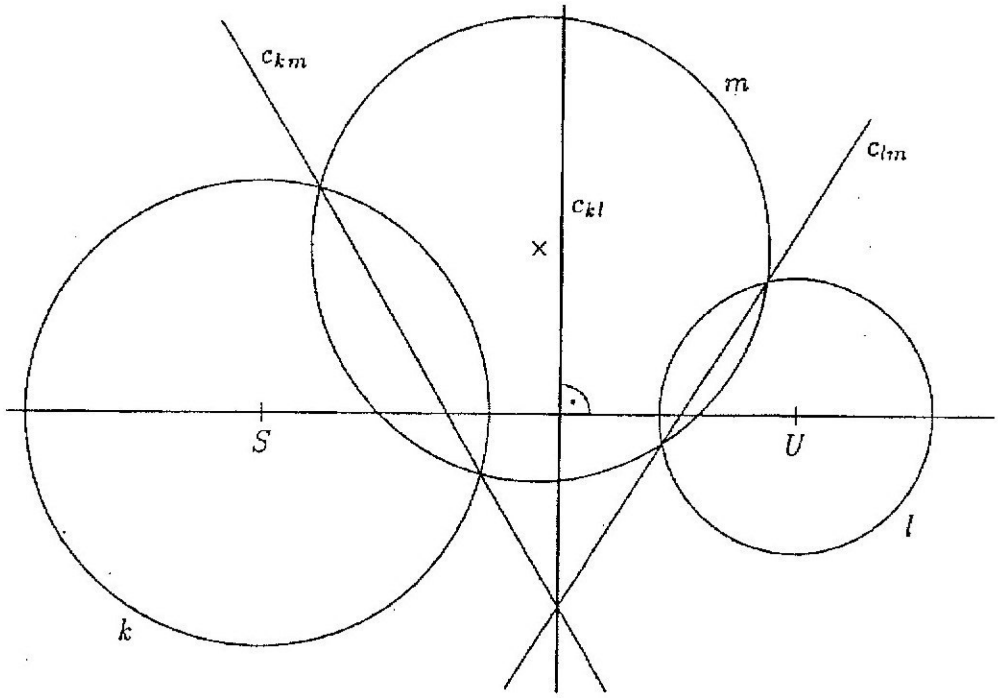


Obr. 144b

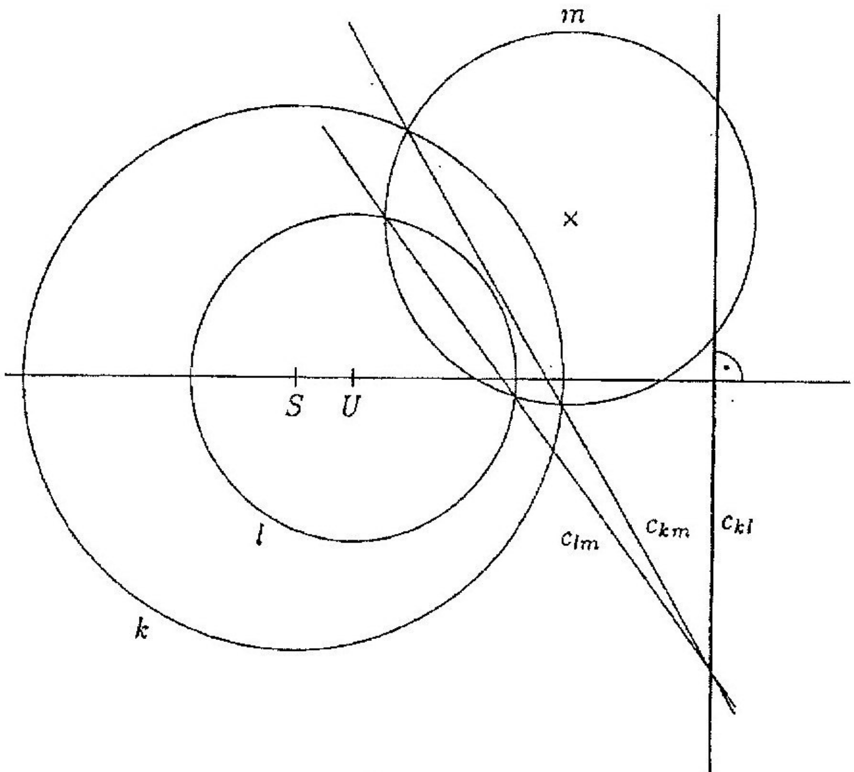
Poznamenejme, že bod, který má ke všem třem kružnicím k, l, m stejnou mocnost, se nazývá **chordální střed (potenční bod)** těchto kružnic.

Chordála dvou kružnic (ta její část, která leží vně kružnic) je množinou bodů, z nichž lze vést k oběma kružnicím stejně dlouhé tečny. Stejně tak chordální střed tří kružnic (pokud leží vně všech tří kružnic) je bod, z něhož lze vést ke třem kružnicím stejně dlouhé tečny.

Chordála svazku protínajících se kružnic v bodech A, B je přímka AB. Chordála svazku dotýkajících se kružnic se společnou tečnou p je přímka p.



Obr. 145a



Obr. 145b

---

o **Cvičení 1.** Jsou dány dvě shodné kružnice, kružnice k_1 se středem S_1 a poloměrem $r_1 = 16$, kružnice k_2 se středem S_2 a bod S_1 patří kružnici k_2. Sestrojte na kružnici k_1 bod X tak, aby $M(X, k_2) = -112$.

o **Cvičení 2.** Jestliže pro pět různých bodů A, C, D, C', D', kde A je vnějším bodem úseček CD, $C'D'$ a přímky CD, $C'D'$ jsou různé, platí rovnost $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD'|$, leží body C, D, C', D' na jedné kružnici. Dokažte.

o **Cvičení 3.** Jestliže pro čtyři různé body A, C, D, T, kde A je vnějším bodem úsečky CD a bod T neleží na přímce CD, platí rovnost $|AC|\cdot|AD| = |AC'|^2$, leží body C, D, T na jedné kružnici, jejíž tečnou je přímka AT. Dokažte.

o **Cvičení 4.** Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a v její vnější oblasti bod A. Bodem A veďte sečnu XY kružnice k tak, aby bod X byl středem úsečky AY (X, Y patří k). Řešte pomocí mocnosti bodu ke kružnici.

o **Cvičení 5.** Jsou dány úsečky délek a, b, c, $b \neq c$. Sestrojte úsečku délky $x = \sqrt{a^2 - bc}$ pouze užitím mocnosti bodu ke kružnici.

o **Cvičení 6.** Jsou dány nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Na přímce p najděte bod X tak, aby $|XT_1| = |XT_2|$, kde T_1 (T_2) je dotykový bod tečny vedené z bodu X ke kružnici k_1 (k_2).

o **Cvičení 7.** Tři kružnice o poloměrech 3, 3, 2 se po dvou vně dotýkají. Určete délku úseku na tečnách vedených z potenčního bodu těchto tří kružnic k daným kružnicím.

25. Kruhová inverze

Je-li v rovině dán bod S a dále reálné číslo $\lambda \neq 0$, je tím dána stejnolehlost roviny, tj. zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' téže roviny podle těchto pravidel:
1) Pro každý bod $X \neq S$ jsou polopřímky SX a SX' totožné, je-li $\lambda > 0$, a opačné, je-li $\lambda < 0$.
2) Pro každý bod X a jeho obraz X' platí $|SX'| = |\lambda|\cdot|SX|$. Obrazem bodu S je tedy bod $S' = S$ (S je samodružný).

Zajímavé zobrazení dostaneme, jestliže první podmínku ponecháme a druhou podmínku pozměníme takto:

2) Pro každý bod X a jeho obraz X' platí $|SX'| = \dfrac{|\lambda|}{|SX|}$, přičemž není definován obraz bodu S.

Toto zobrazení se nazývá **kruhová inverze**, bod S je jejím středem, číslo λ jejím koeficientem. Je to prosté zobrazení celé roviny kromě bodu S opět na celou rovinu s výjimkou bodu S.

Všimněte si podstatného rozdílu mezi stejnolehlostí a kruhovou inverzí. Ve stejnolehlosti je vzdálenost $|SX'|$ přímo úměrná vzdálenosti $|SX|$, u kruhové inverze jde o nepřímou úměrnost; zvětší-li se vzdálenost $|SX|$, zmenší se vzdálenost $|SX'|$. V definici kruhové inverze vystupují body X, X' symetricky. Zobrazí-li se tedy bod X na bod X', zobrazí se v téže kruhové inverzi bod $Y = X'$ na bod $Y' = X$. V kruhové inverzi není tedy třeba rozlišovat vzor a obraz. Kruhová inverze proto patří mezi involutorní zobrazení. Pro stejnolehlost to platí pouze v případě $\lambda = 1$ (identita), nebo $\lambda = -1$ (středová souměrnost).

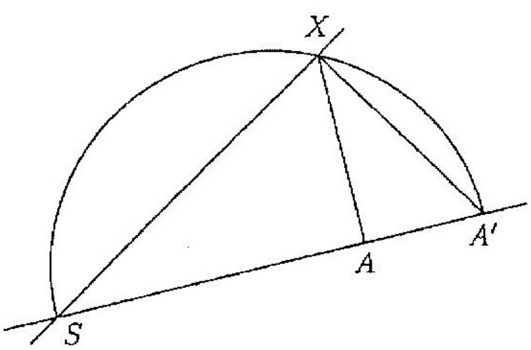
Vedeme-li středem S kruhové inverze přímku p, pak obraz X' každého bodu X přímky p (různého od bodu S) leží opět na přímce p a každý bod X přímky p ($X \neq S$) je obrazem bodu X'. Je tedy obrazem přímky p (bez bodu S) opět přímka p bez bodu S. Je-li koeficient λ kruhové inverze kladný, zobrazí se dokonce každá polopřímka SA (bez bodu S) opět na tuto polopřímku, při záporném λ se každá taková polopřímka zobrazí na polopřímku opačnou.

Podobně jako stejnolehlost je i kruhová inverze dána středem S a místo koeficientu λ ji můžeme zadat libovolným bodem $A \neq S$ a jeho obrazem $A' \neq S$. Body S, A, A' musejí ovšem ležet nutně na jedné přímce.

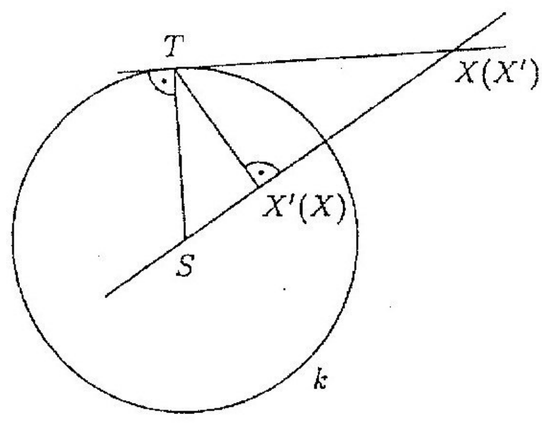
Je-li dána kruhová inverze se středem S a kladným koeficientem λ, je bod X právě tehdy samodružný, je-li $|SX'| = |SX|$. Protože $|SX'| = \dfrac{|\lambda|}{|SX|}$, je poslední podmínka ekvivalentní s podmínkou $|SX| = \sqrt{\lambda}$. Tvoří tedy samodružné body kružnici o středu S a poloměru $\sqrt{\lambda}$.

o **Příklad 83.** Kruhová inverze s kladným koeficientem je dána středem S a dvojicí odpovídajících si bodů A, A'. Najděte její kružnici samodružných bodů.

Řešení. Polopřímky SA, SA' jsou totožné. Je-li $A = A'$, je hledanou kružnicí kružnice se středem S, která prochází bodem A. Není-li $A = A'$, můžeme předpokládat $|SA'| > |SA|$, jinak zaměníme A a A'. Nad úsečkou SA' (obr. 146) sestrojíme Thaletovu polokružnici, jejíž průsečík X s kolmicí k přímce SA vedenou bodem A je samodružný bod kruhové inverze, neboť podle Euklidovy věty o odvěsně je $|SX| = \sqrt{|SA| \cdot |SA'|}$. Hledanou kružnicí je kružnice se středem S procházející bodem X.



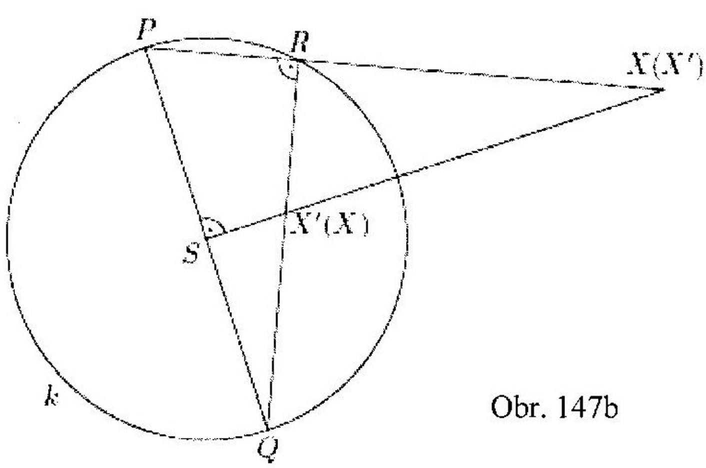
Obr. 146



Obr. 147a

Je-li kruhová inverze (s kladným koeficientem λ) dána kružnicí k (se středem S a poloměrem $\sqrt{\lambda}$) samodružných bodů, snadno sestrojíme k libovolnému bodu X jeho obraz X'. Když je bod X bodem vnější oblasti kružnice k (obr. 147a), vedeme jím tečnu ke kružnici k a její bod dotyku T promítneme kolmo na přímku SX do bodu X'. Z pravoúhlého trojúhelníku STX pak plyne na základě Euklidovy věty o odvěsně, že $|ST|^2 = |SX| \cdot |SX'|$ a $|ST|^2 = \lambda$ je koeficient kruhové inverze. Je-li X bodem vnitřní oblasti kružnice k, vedeme jím kolmici k SX, v průsečíku T s kružnicí k sestrojíme tečnu kružnice a průsečík této tečny s přímkou SX je bod X'.

Jiný způsob, kterým můžeme v kruhové inverzi (s kladným koeficientem λ) dané kružnicí k se středem S a poloměrem $\sqrt{\lambda}$ k bodu X najít jeho obraz X', je ukázán na obr. 147b. Sestrojíme polopřímku SX a na ni kolmý



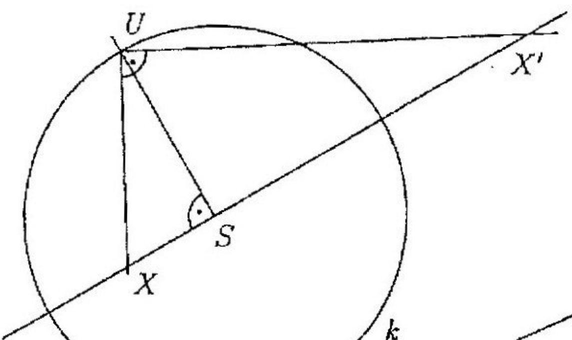
Obr. 147b

průměr PQ kružnice k. Je-li bod X vnějším bodem kružnice k, vedeme přímku XP; ta protne kružnici k v bodě R. Tětiva RQ protne polopřímku SX v hledaném bodě X'. Pravoúhlé trojúhelníky XPS a $QX'S$ jsou totiž podobné a platí $\frac{|SX|}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{|SX'|}$, neboli $|SX|\cdot|SX'| = \lambda$. Je-li bod X vnitřním bodem kružnice k, sestrojíme přímku XQ; dostaneme bod R. Průsečíkem přímky PR a polopřímky SX dostaneme hledaný bod X'.

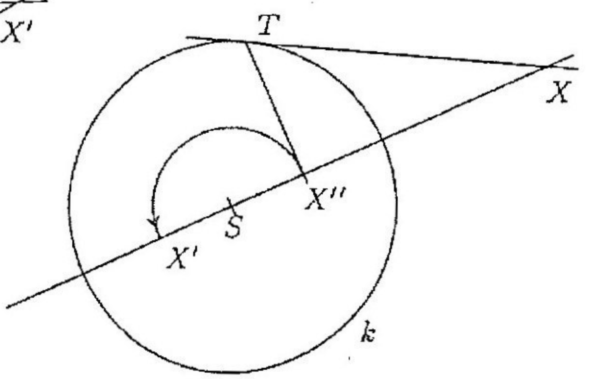
Kruhová inverze (se středem S) se záporným koeficientem λ nemá zřejmě žádný samodružný bod, neboť polopřímky SX a SX' jsou opačné, takže nemohou body X a jeho obraz X' splynout. Pro některé body X však platí, že $|SX| = |SX'|$, tedy je pro ně střed S kruhové inverze středem úsečky XX'. Jsou to právě ty body X, pro které je $|SX|^2 = |\lambda|$, tj. $|SX| = \sqrt{-\lambda}$. Kružnice k se středem S a poloměrem $\sqrt{-\lambda}$ je jedinou kružnicí se středem S, která je v uvažované kruhové inverzi samodružná a do jisté míry nám nahrazuje kružnici samodružných bodů kruhové inverze s kladným koeficientem. Její body nejsou samodružné, každý se zobrazí na bod souměrně sdružený podle středu S.

o **Příklad 84.** Kruhová inverze se záporným koeficientem λ je dána tou kružnicí k se středem S a poloměrem r, která je v kruhové inverzi samodružná. Sestrojte k bodu $X \neq S$ jeho obraz X'.

Řešení. Bodem S vedeme kolmici k SX, jeden její průsečík s kružnicí k označíme U, bodem U vedeme kolmici k UX, její průsečík s přímkou SX je hledaný bod X' (obr. 148). Podle Euklidovy věty o výšce je totiž $|SX|\cdot|SX'| = r^2 = |\lambda|$ a body X, X' leží na opačných polopřímkách oddělených bodem S.



Obr. 148

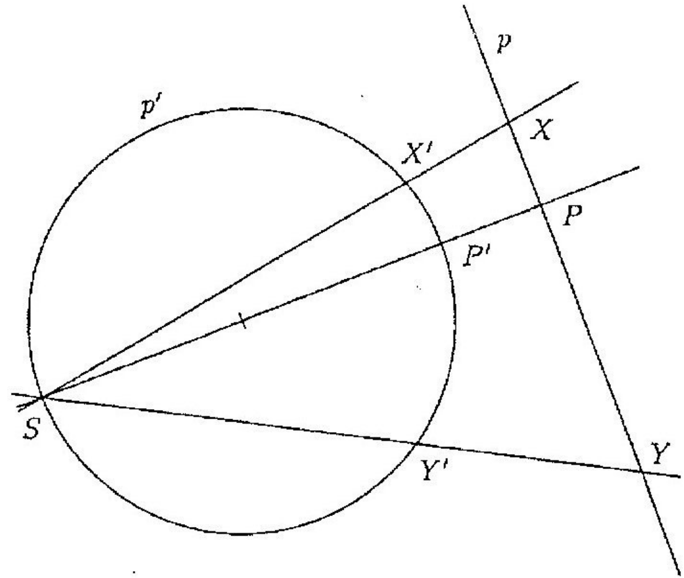


Obr. 149

Uvědomme si, že kruhová inverze se záporným koeficientem λ a středem S, která je dána samodružnou kružnicí k se středem S, se dá složit z kruhové inverze s koeficientem $|\lambda|$, která je dána kružnicí k samodružných bodů se středem S, a ze středové souměrnosti podle středu S. Potom obraz X' bodu $X \neq S$ z předchozího příkladu se dá též sestrojit takto: nejprve najdeme X'' jako obraz bodu X podle obr. 147 a pak bod X'' zobrazíme středově souměrně podle středu S na bod X' (obr. 149).

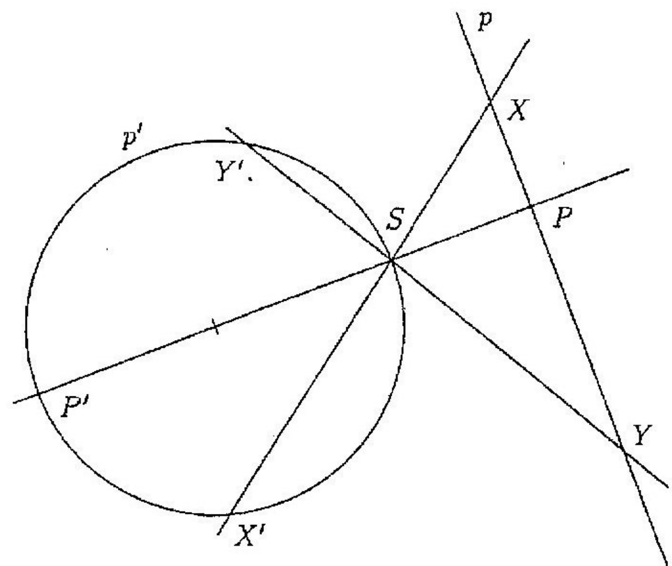
Zaměřme se nyní na sestrojování obrazu přímky a kružnice v kruhové inverzi.

Víme již, že obrazem přímky p procházející středem S kruhové inverze je v této inverzi opět přímka p, přičemž vynecháváme bod S. Ten není ani vzorem, ani obrazem žádného bodu přímky p. Co je však obrazem přímky p, která neprochází středem kruhové inverze? V tom případě označme P patu kolmice vedené bodem S na přímku p (obr. 150a,b) a obraz P' bodu P v kruhové inverzi. Spojíme bod $X \neq P$ přímky p s bodem S a označíme X' ten průsečík přímky SX s kružnicí sestrojenou nad průměrem SP', který je různý od S. Dokážeme, že bod X' je obrazem bodu X. Především je vidět, že polopřímky SX, SX' jsou totožné (opačné) právě tehdy, jsou-li totožné (opačné) polopřímky SP, SP'. Stačí tedy už jen dokázat, že $|SX|\cdot|SX'| = |SP|\cdot|SP'|$. To však plyne z podobnosti trojúhelníků SPX a $SX'P'$, které se shodují v úhlu při vrcholu S a v pravém úhlu při vrcholu P a při vrcholu X'.



Obr. 150a

Vidíme, že kruhová inverze nezobrazuje nutně tři body ležící na přímce opět na tři body ležící na přímce. Tedy přímka neprocházející středem kruhové inverze se zobrazí na kružnici procházející středem kruhové inverze.

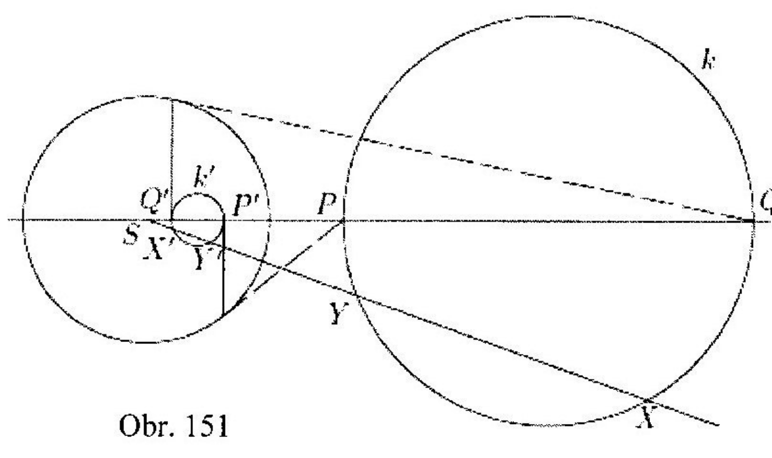


Obr. 150b

Jelikož v kruhové inverzi jsou vzor a obraz záměnné a přímka neprocházející středem kruhové inverze se zobrazí na kružnici procházející středem kruhové inverze, zobrazí se obráceně kružnice procházející středem kruhové inverze na přímku neprocházející středem kruhové inverze. Stačí totiž ukázat, že každá kružnice procházející středem kruhové inverze je obrazem nějaké přímky.

Co je však obrazem kružnice, která neprochází středem kruhové inverze?

Uvažujme proto kruhovou inverzi se středem S a kružnici k neprocházející bodem S. Označme PQ průměr kružnice k tak, že přímka PQ prochází bodem S (obr. 151). Obrazem úsečky PQ v tomto zobrazení je úsečka $P'Q'$. Dále na kružnici k zvolme



Obr. 151

libovolně dva body X, Y tak, aby přímka XY procházela bodem S. (V případě, že $X = Y$, je SX tečnou kružnice k.) Pro obrazy X', Y' bodů X, Y platí podle definice kruhové inverze:

$$|SY|\cdot|SY'| = |SP|\cdot|SP'| \tag{1}$$

$$|SX|\cdot|SX'| = |SQ|\cdot|SQ'| \tag{2}$$

Z definice mocnosti bodu S ke kružnici k plyne:

$$|SY|\cdot|SX| = |SP|\cdot|SQ| \tag{3}$$

Z rovností (1), (3), (2) postupně vyplývá

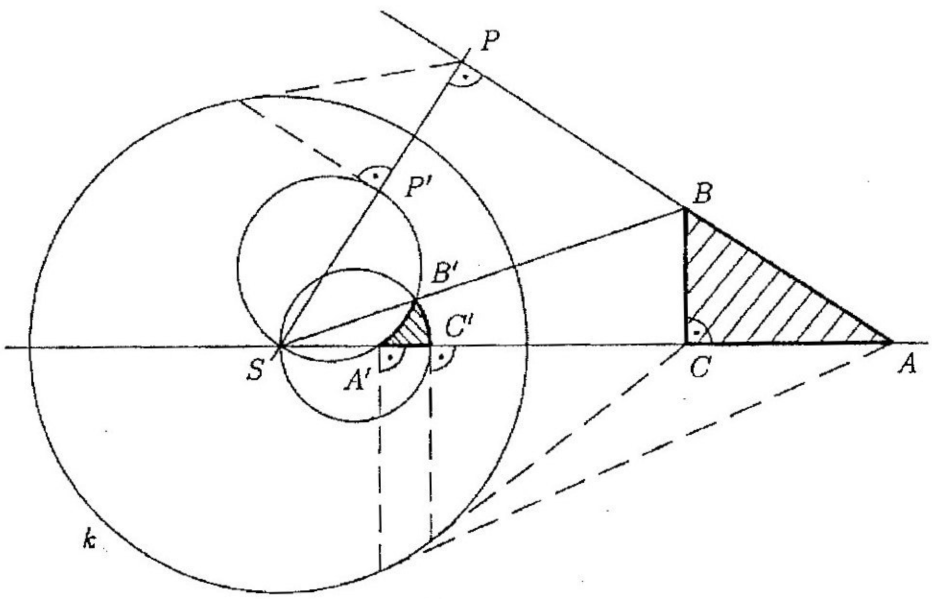
$$\frac{|SY'|}{|SP'|}=\frac{|SP|}{|SY|}=\frac{|SX|}{|SQ|}=\frac{|SQ'|}{|SX'|} \tag{4}$$

odkud $|SY'|\cdot|SX'| = |SP'|\cdot|SQ'|$.

Podle cvičení 2 a 3 v kapitole 24 o mocnosti bodu ke kružnici dostáváme, že body X', Y', P', Q' leží na kružnici. Takže obrazem kružnice k, která neprochází bodem S, je kružnice k'. Navíc v rovnosti (4) platí např. $\frac{|SY'|}{|SP'|}=\frac{|SX|}{|SQ|}$, což značí, že kružnice k, k' jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem S. Zatímco se ale v kruhové inverzi zobrazí bod X na bod X', ve stejnolehlosti se zobrazí bod X na bod Y'.

Při důkazu jsme uvažovali jen případ, kdy bod S není bodem úsečky PQ. Tvrzení však platí, i když bod S je vnitřním bodem úsečky PQ, a důkaz je analogický.

Ještě dokážeme, že složením dvou kruhových inverzí s týmž středem S je stejnolehlost se středem S. Pro jednoduchost uvažujme kruhové inverze s kladnými koeficienty. Má-li první kruhová inverze koeficient $\lambda > 0$ a druhá koeficient $\mu > 0$, zobrazí se bod $X \neq S$ v první kruhové inverzi na bod X' a v druhé se bod X' zobrazí na bod X'' tak, že se polopřímky SX, SX' a SX'' shodují a platí $|SX''|=\frac{\mu}{|SX'|}$, $|SX'|=\frac{\lambda}{|SX|}$, takže $|SX''|=\frac{\mu}{\lambda}|SX|$. Vidíme, že složené zobrazení zobrazující bod X na bod X'' je stejnolehlost se středem S a koeficientem $\frac{\mu}{\lambda}$.



Obr. 152

o **Příklad 85.** V kruhové inverzi s kladným koeficientem dané středem S a kružnicí samodružných bodů k zobrazte pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), který leží vně kružnice k a jehož odvěsna CA leží na přímce procházející bodem S. Dále proveďte totéž pro jiné polohy trojúhelníku ABC.

Řešení. V dané kruhové inverzi (obr. 152) zobrazíme body A, B, C na body A', B', C'. Strana $A'C'$ leží na přímce AC, neboť přímka AC prochází středem kruhové inverze. Přímka BC se zobrazí na kružnici procházející středem kruhové inverze, proto se strana $B'C'$ jeví jako kruhový oblouk na této kružnici. Totéž jako pro stranu $B'C'$ platí i pro stranu $A'B'$.

Poznámka: Bez důkazu poznamenejme, že při zobrazování kruhovou inverzí se zachovávají odchylky křivek (přímek a kružnic). Přitom odchylkou protínající se přímky s kružnicí rozumíme odchylku této přímky a tečny kružnice ve společném bodě kružnice a přímky. Odchylkou dvou protínajících se kružnic se rozumí odchylka tečen obou kružnic v jejich společném bodě.

o **Příklad 86.** Víme, že v kruhové inverzi se kružnice neprocházející středem kruhové inverze zobrazí na kružnici. Zobrazí se střed zobrazované kružnice na střed zobrazené kružnice?

Řešení. Označme S střed kruhové inverze např. s kladným koeficientem λ. Zobrazme kružnici l se středem O a s průměrem AB, který leží na přímce procházející bodem S. Body O, A, B se zobrazí postupně na body O', A', B'. Vzdálenost $|SO|$ je aritmetickým průměrem vzdáleností $|SA|$, $|SB|$ (viz kapitola 30), tj. platí

$$|SO| = \frac{|SA| + |SB|}{2}.$$

Z definice kruhové inverze dále platí

$$|SA'| = \frac{\lambda}{|SA|}, \quad |SB'| = \frac{\lambda}{|SB|}.$$

Takže pro zobrazený střed kružnice l platí

$$|SO'| = \frac{\lambda}{|SO|} = \frac{2\lambda}{\frac{\lambda}{|SA'|} + \frac{\lambda}{|SB'|}} = \frac{2}{\frac{1}{|SA'|} + \frac{1}{|SB'|}},$$

tj. vzdálenost $|SO'|$ je harmonickým průměrem vzdáleností $|SA'|$, $|SB'|$ (viz kapitola 30), což znamená, že se střed kružnice neprocházející středem kruhové inverze nezobrazí na střed zobrazené kružnice (neboť $|SA'| \neq |SB'|$).

Graficky najdeme střed zobrazené kružnice l' tak, že zobrazíme bod dotyku T tečny ST ke kružnici l na bod T' a kolmice v bodě T' na přímku ST protne přímku SO ve středu kružnice l'.

---

o **Cvičení 1.** V kruhové inverzi s kladným koeficientem zobrazte hranici a vnitřek rovnostranného trojúhelníku o délce strany a. Střed kruhové inverze je
a) v těžišti trojúhelníku a kružnice samodružných bodů prochází vrcholy trojúhelníku,
b) v jednom vrcholu trojúhelníku a kružnice samodružných bodů má poloměr a,
c) ve středu jedné strany trojúhelníku a poloměr kružnice samodružných bodů je $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

o **Cvičení 2.** Čtverec o straně délky 4 je rozdělen na 16 shodných čtverečků; jednotlivé čtverečky označme čísly 1 až 16, vnější oblast čtverce označme číslem 17. Tento útvar zobrazte v kruhové inverzi s kladným koeficientem, jestliže kruhová inverze má střed ve středu původního čtverce a kružnice samodružných bodů má poloměr $\sqrt{2}$.

o **Cvičení 3.** Kružnice k_1, k_2 se vně dotýkají v bodě T_{12}, kružnice k_2, k_3 se vně dotýkají v bodě T_{23}, kružnice k_3, k_4 se vně dotýkají v bodě T_{34}, kružnice k_4, k_1 se vně dotýkají v bodě T_{41}. Dokažte, že body T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41} leží na jedné kružnici.

o **Cvičení 4.** Je dána kruhová inverze s kladným koeficientem a kružnicí k samodružných bodů. Dokažte, že v této kruhové inverzi je právě ta kružnice l samodružná (kromě kružnice samodružných bodů), která protíná kružnici k v bodech A, B a průměry kružnic k, l jsou v bodě A (resp. v bodě B) navzájem kolmé, tj. průměr jedné kružnice je tečnou v bodě A (resp. v B) ke druhé kružnici.

o **Cvičení 5.** Jsou-li X', Y' obrazy bodů X, Y v kruhové inverzi o středu S a koeficientu λ, je $|X'Y'| = |\lambda| \cdot \dfrac{|XY|}{|SX| \cdot |SY|}$. Dokažte.

(Návod: Použijte kosinovou větu pro trojúhelníky SXY a $SX'Y'$, případně zvlášť uvažujte případ, kdy leží body S, X, Y v přímce.)

26. Apolloniovy úlohy

Uvažujme množinu všech bodů, přímek a kružnic v rovině. **Apolloniovými úlohami** nazýváme skupinu úloh, ve kterých máme ke třem různým prvkům výše uvedené množiny sestrojit kružnici (případně přímku), která se všech tří prvků dotýká (je-li některým prvkem bod, myslí se dotykem průchod tímto bodem, rovnoběžné přímky považujeme za dotýkající se přímky). Apolloniových úloh je deset: bod-bod-bod, bod-bod-přímka, bod-bod-kružnice, bod-přímka-přímka, bod-přímka-kružnice, bod-kružnice-kružnice, přímka-přímka-přímka, přímka-přímka-kružnice, přímka-kružnice-kružnice, kružnice-kružnice-kružnice. Některé z těchto základních úloh se mohou ještě dělit na případy podle toho, zda např. bod na přímce leží či nikoli, zda jsou přímky rovnoběžné či nikoli atd.

Úlohy, kdy aspoň jedním daným prvkem je bod a tento bod leží na dané přímce nebo kružnici, se také nazývají **Pappovy úlohy**. Pappových úloh je šest.

Ve všech dále uvedených příkladech budeme uvažovat pouze případy, kdy lze požadovanou kružnici (nebo přímku) sestrojit. Vynecháme tedy např. případ tří rovnoběžných přímek.

o **Příklad 87.** Apolloniova úloha bod-bod-bod (BBB)

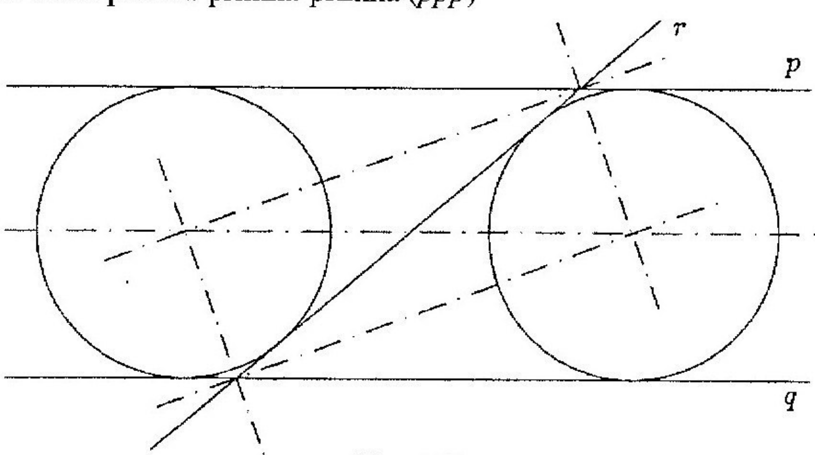
Řešení. Jsou-li dány tři různé body A, B, C neležící v přímce, úloha vlastně znamená sestrojení kružnice opsané trojúhelníku ABC.

o **Příklad 88.** Apolloniova úloha přímka-přímka-přímka (ppp)

Řešení.

Dané přímky označme p, q, r.

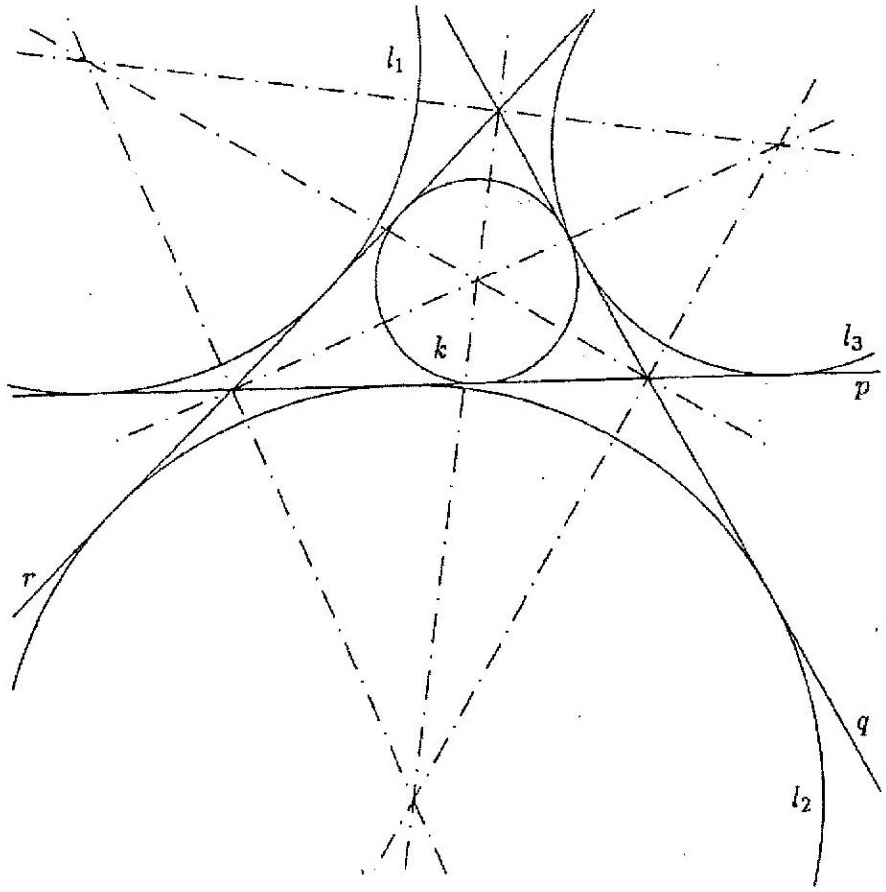
a) Přímky p, q jsou rovnoběžné, přímka r je s nimi různoběžná. Středy hledaných kružnic leží jak na ose pásu přímek p, q, tak na ose úhlu přímek p, r a q, r (obr. 153).



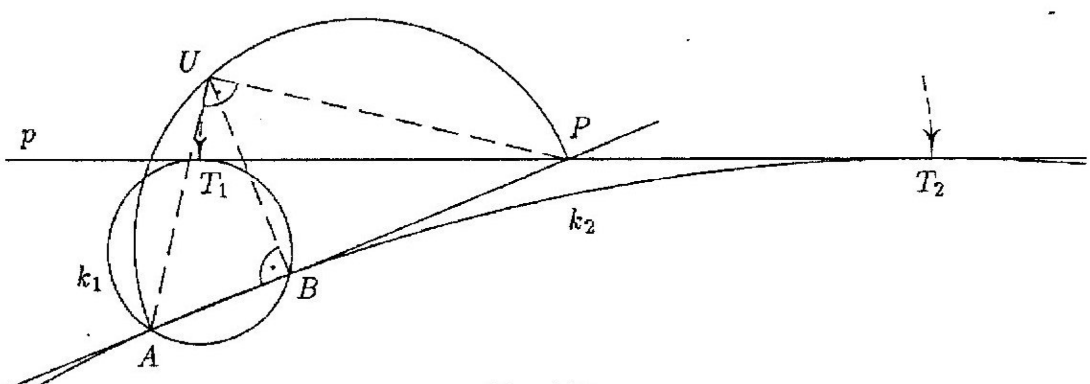
Obr. 153

b) Přímky p, q, r jsou po dvou různoběžné. Středy hledaných kružnic leží na osách úhlů přímek p, q a p, r a q, r (obr. 154). Víme, že tímto způsobem se sestrojuje

kružnice k **vepsaná** trojúhelníku a také tři **vně připsané kružnice** l_1, l_2, l_3 stranám trojúhelníku, jehož strany leží na přímkách p, q, r.



Obr. 154



Obr. 155

o **Příklad 89.** Apolloniova úloha bod-bod-přímka (BBp)

Řešení.

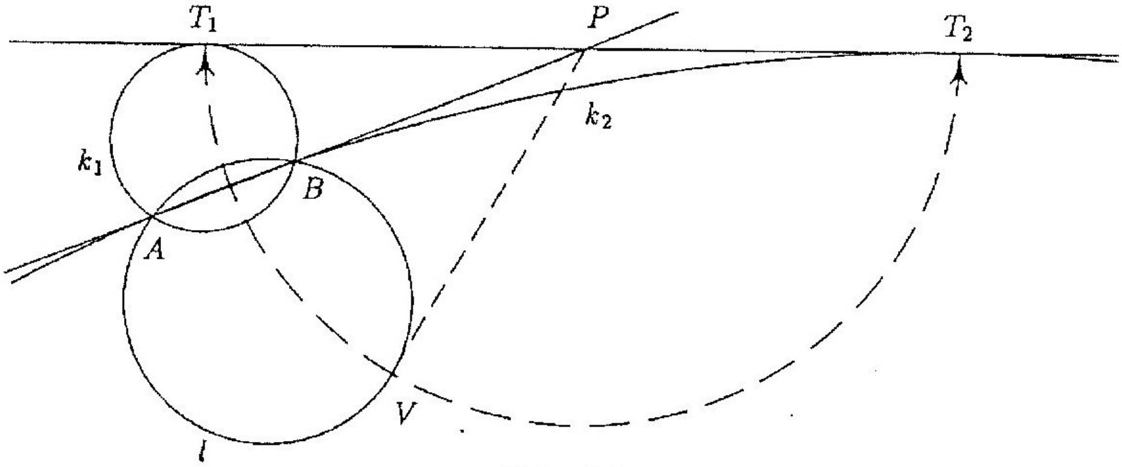
Dané body označme A, B, danou přímku p.

a) Bod A neleží na přímce p, bod B leží na p. Střed S hledané kružnice leží jednak na ose úsečky AB, jednak na kolmici k přímce p v bodě B.

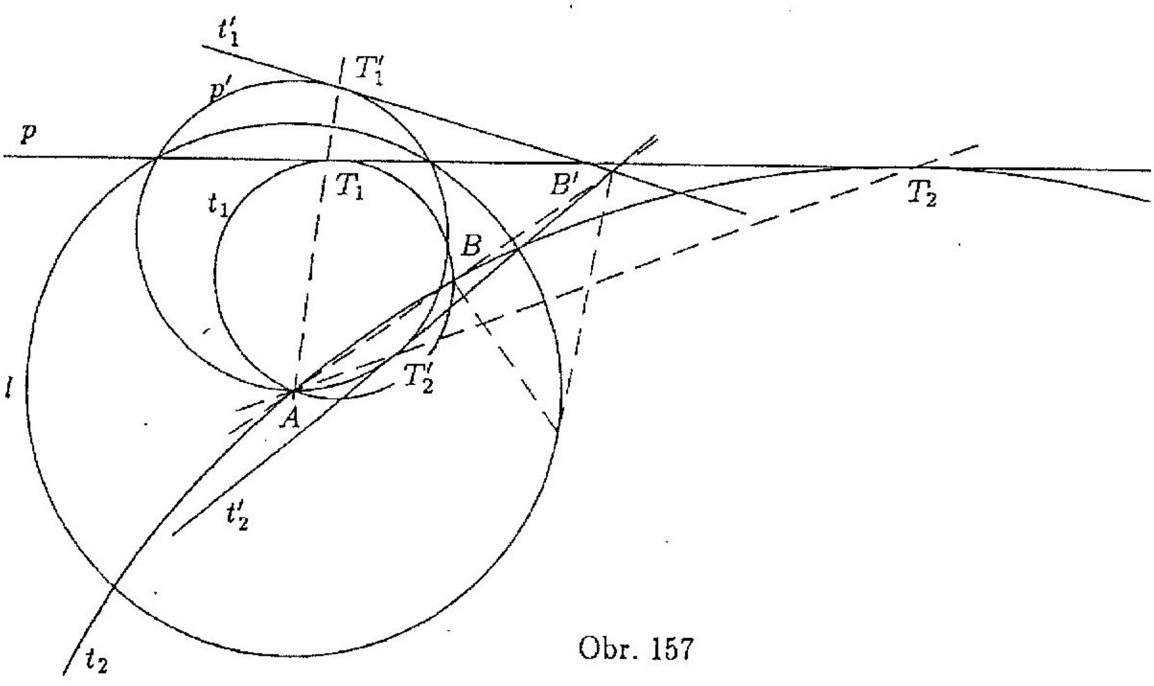
b) Ani bod A ani bod B neleží na přímce p. Pokud body A, B leží na rovnoběžce s přímkou p, prochází hledaná kružnice také průsečíkem osy úsečky AB a přímky p. Zbývá tedy případ, kdy přímka AB je různoběžná s přímkou p. Označme P průsečík přímek AB a p (předpokládejme $|AP| > |BP|$), bod dotyku hledané kružnice k s přímkou p označme T.

Platí $|PA|\cdot|PB| = |PT|^2$. To znamená, že buď (obr. 155) sestrojíme bod T pomocí Euklidovy věty o odvěsně, když nejprve sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem AP a bod U, což je průsečík Thaletovy kružnice a kolmice v bodě B na přímku AP, otočíme kolem bodu P na přímku p (získáme dva body T_1, T_2 a dvě kružnice k_1, k_2). Druhá možnost sestrojení bodu T je pomocí mocnosti bodu P ke všem kružnicím svazku procházejícím body A, B (obr. 156). Tato mocnost je stejná pro všechny kružnice svazku a je rovna $|PA|\cdot|PB| = |PT|^2$. Sestrojíme tedy libovolnou kružnici l svazku, z bodu P k ní vedeme tečnu s bodem dotyku V a ten pak otočíme kolem bodu P na přímku p (získáme opět dva body T_1, T_2 a dvě kružnice k_1, k_2).

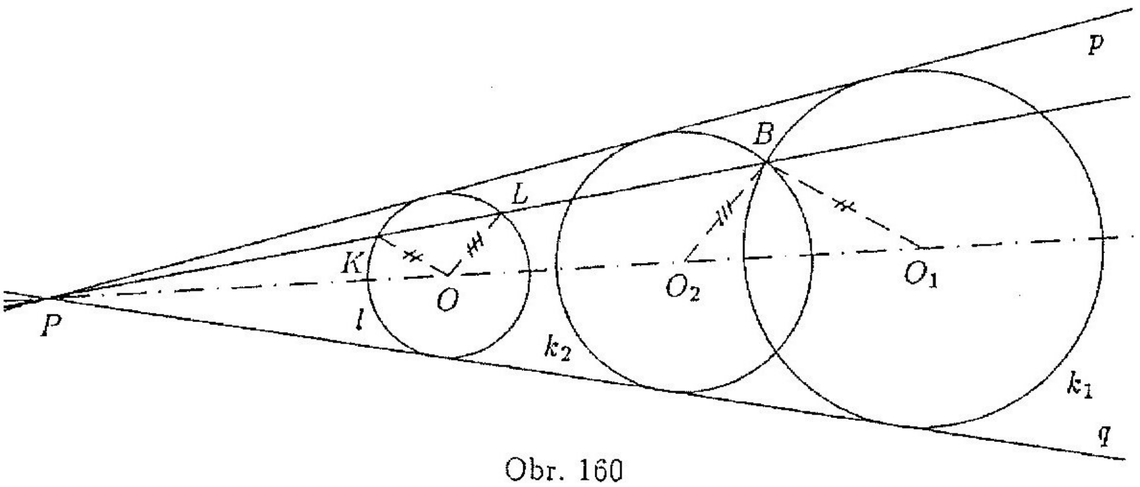
Úlohu bod-bod-přímka je též možno řešit pomocí kruhové inverze. Zvolíme např. bod A za střed kruhové inverze s kladným koeficientem; kružnici l samodružných bodů nejlépe zvolíme tak, aby protínala přímku p. V této kruhové inverzi se bod B zobrazí na bod B', přímka p na kružnici p' (obr. 157) procházející bodem A. Z bodu B' sestrojíme tečny t_1', t_2' ke kružnici p'. Tyto tečny zobrazíme v dané kruhové inverzi na kružnice t_1, t_2, které procházejí body A, B a dotýkají se přímky p.



Obr. 156



Obr. 157



Obr. 160

o **Příklad 91.** Apolloniova úloha bod-přímka-přímka (*Bpp*)

Řešení.

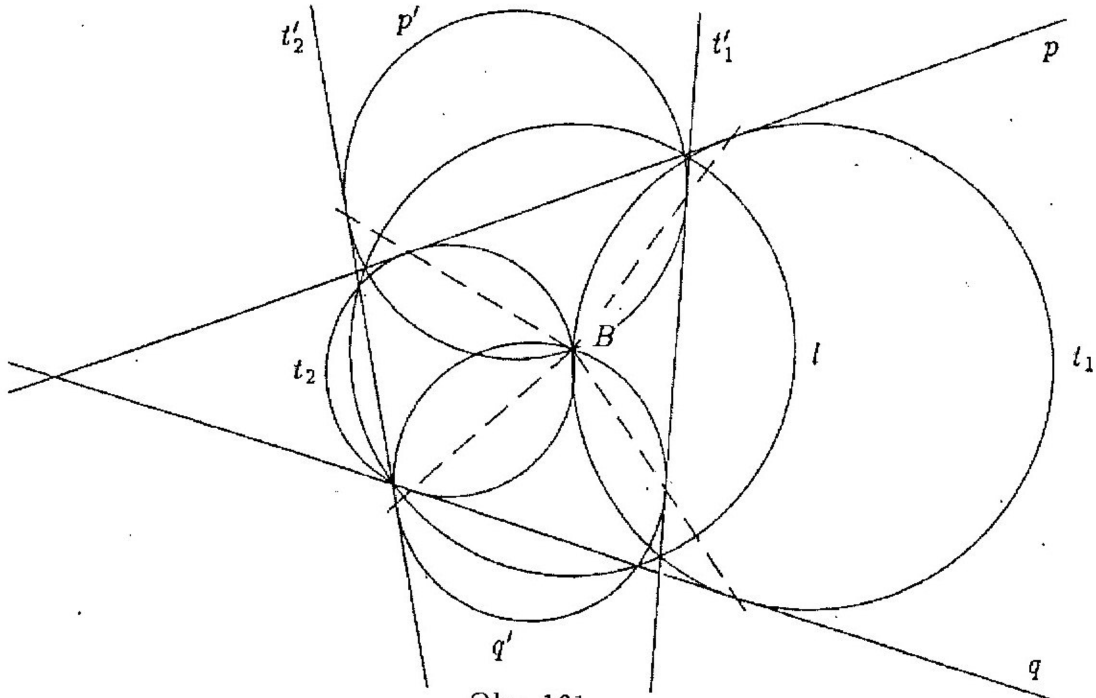
Daný bod označme B, dané přímky p, q.

a) Přímky p, q jsou rovnoběžné. Leží-li bod B na některé z těchto přímek, např. na přímce p, leží střed hledané kružnice na kolmici k přímce p v bodě B a na ose pásu přímek p, q. Leží-li bod B uvnitř pásu přímek p, q, jsou středy hledaných kružnic průsečíky osy pásu přímek p, q a kružnice se středem B a poloměrem rovným polovině šířky pásu. Poloměry hledaných kružnic jsou rovny polovině šířky pásu.

b) Přímky p, q jsou různoběžné. Leží-li bod B např. na přímce p, leží středy hledaných kružnic na kolmici k přímce p v bodě B a zároveň na osách obou úhlů sevřených přímkami p, q. Leží-li bod B uvnitř úhlu sevřeného přímkami p, q (obr.160), použijeme stejnolehlosti se středem P v průsečíku přímek p, q. Sestrojíme libovolnou kružnici l se středem O, která se dotýká obou přímek p, q. Tato kružnice protne přímku BP v bodech K, L. Ve stejnolehlosti se zobrazí přímka KO na přímku BO_1, čímž se získá střed O_1 jedné hledané kružnice k_1, a též přímka LO se zobrazí na přímku BO_2, čímž se získá střed O_2 druhé hledané kružnice k_2.

Leží-li bod B uvnitř úhlu sevřeného různoběžnými přímkami p, q a ne na ose úhlu, můžeme použít i metody založené na mocnosti bodu ke kružnici. Hledaná kružnice prochází také bodem B', který je osově souměrný k bodu B podle osy úhlu, a dotýká se přímky p v bodě T. Přímka BB' protne přímku p v bodě P. Pro mocnost bodu P k hledané kružnici platí $|PB|\cdot|PB'|=|PT|^2$, odkud ze znalosti délek $|PB|$, $|PB'|$ můžeme sestrojit bod T. Úloha je tak převedena na úlohu bod-bod-bod. Touto metodou se dá řešit i případ, pokud bod B leží na ose úhlu.

Úlohu bod-přímka-přímka je také možno řešit pomocí kruhové inverze s kladným koeficientem a středem v bodě B. Uvažujme nejprve, že bod B neleží na žádné z přímek p, q; přímky mohou být různoběžné i rovnoběžné. Zvolíme takovou kružnici l samodružných bodů, která protne obě přímky. V kruhové inverzi se zobrazí přímka p na kružnici p', přímka q na kružnici q' (obě procházejí bodem B). Ke kružnicím p', q' sestrojíme obě vnější tečny t_1', t_2', které zpět v kruhové inverzi zobrazíme na hledané kružnice t_1, t_2, které procházejí bodem B a dotýkají se přímek p, q (obr. 161). Jako druhý případ uvažujme, že bod B leží např. na přímce p; přímky p, q mohou být různoběžné i rovnoběžné. Přímka p zůstane samodružná v kruhové inverzi, přímka q se zobrazí na kružnici q'. Nyní sestrojíme tečny t_1', t_2' ke kružnici q', které jsou rovnoběžné s přímkou p. Přímky t_1', t_2' se zobrazí na hledané kružnice t_1, t_2, což je znázorněno již na obr. 161.



Obr. 161

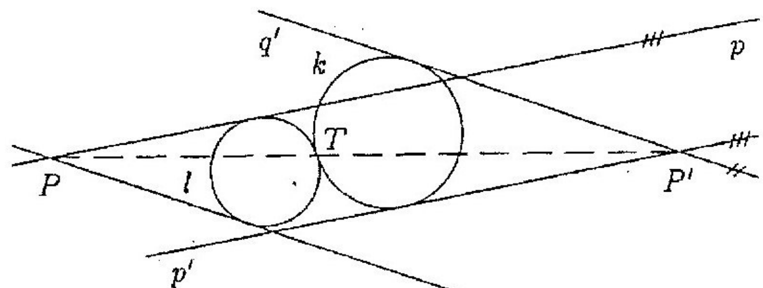
o **Příklad 92.** Apolloniova úloha přímka-přímka-kružnice (*ppk*)

Řešení.

Dané přímky označme p, q, danou kružnici k.

a) Přímky p, q jsou rovnoběžné, kružnice k má střed S a poloměr r. Středy hledaných kružnic leží na ose pásu přímek p, q a na kružnicích se středem v S a poloměrem r zvětšeným, resp. zmenšeným, o polovinu vzdálenosti přímek p, q. Vyjde-li rozdíl poloměru r a poloviny vzdálenosti přímek p, q záporný, leží střed hledané kružnice na kružnici se středem S a poloměrem rovným absolutní hodnotě rozdílu; hledaná kružnice a kružnice k mají vnitřní dotyk.

b) Přímky p, q jsou různoběžné. Řešení provedeme pro jednu hledanou kružnici l. Ta má se zadanou kružnicí k bod dotyku T a tento (zatím neznámý) zvolíme za střed stejnolehlosti kružnic k, l. Ve stejnolehlosti přejde přímka p v přímku p', která se dotýká kružnice k a je s přímkou p rovnoběžná, stejně přímka q přejde v přímku q', průsečík P přímek p, q přejde v bod P', průsečík přímek p', q' (obr. 162). Přímka PP' protne kružnici k v bodě T, ve kterém se budou kružnice k, l dotýkat. (Ze dvou možných průsečíků kružnice k s přímkou PP' vyberte ten správný!) Naše úloha tedy přešla na úlohu bod-přímka-přímka (přímky p, q, bod T), což je příklad 91 b). Rozmyslete si, kolik může mít úloha řešení. Nezapomeňte, že přímky p' rovnoběžné s přímkou p a dotýkající se kružnice k mohou být dvě, stejně tak přímky q'.



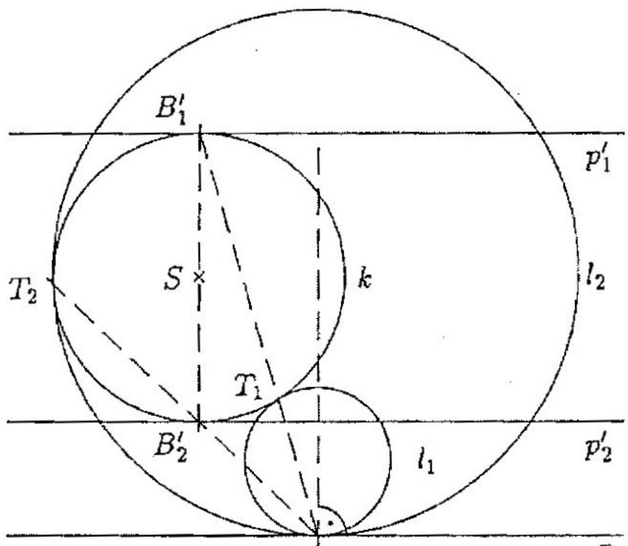
Obr. 162

o **Příklad 93.** Apolloniova úloha bod-přímka-kružnice (*Bpk*)

Řešení.

Daný bod označme B, přímku p a kružnici k.

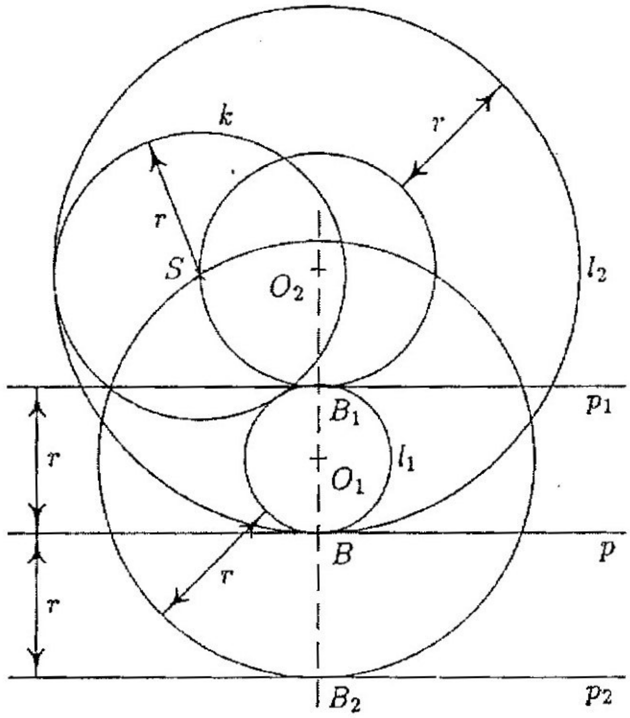
a) Bod B leží na přímce p, kružnice k má střed S a poloměr r. Hledané kružnice nazvěme l_1, l_2, jejich body dotyku s kružnicí k nazvěme T_1, T_2. A právě bod T_1 (resp. T_2) zvolíme za střed stejnolehlosti kružnic k, l_1 (resp. k, l_2). V této stejnolehlosti přejde přímka p v přímku p_1' (resp. p_2') rovnoběžnou s přímkou p (obr. 163), body dotyku přímek p_1', p_2' s kružnicí k označíme B_1', B_2'. Přímka BB_1' (resp. BB_2') protne kružnici k v bodě T_1 (resp. T_2). Tím úloha přešla na úlohu bod-bod-přímka (body B, T_1, resp. B, T_2, kružnice k).



Obr. 163

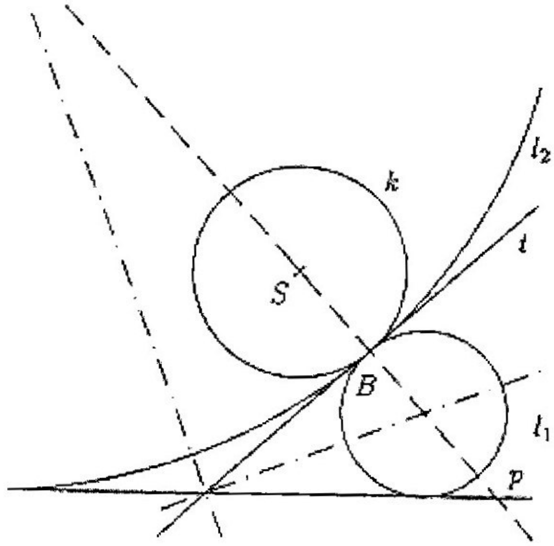
Úlohu můžeme řešit i pomocí tzv. **dilatace**. Je zadán bod B, který leží na přímce p, a kružnice k se středem S a poloměrem r. Sestrojíme dvě rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou p ve vzdálenosti r od ní a průsečíky kolmice k přímce p v bodě B s přímkami p_1, p_2 označme B_1, B_2 (obr. 164). Zároveň poloměr kružnice k zmenšíme o délku r, čímž kružnice k přejde v bod S. Máme tedy za úkol sestrojit kružnici, která se dotýká přímky p_1 (resp, p_2) v bodě B_1 (resp. B_2) a prochází bodem S, což již umíme z příkladu 89 a); její střed označme O_1 (resp. O_2).

b) Bod B leží na kružnici k se středem S. Sestrojíme tečnu t v bodě B ke kružnici k. Je-li t rovnoběžná s přímkou p, je střed hledané kružnice průsečíkem osy pásu přímek p, t s přímkou BS. Není-li t rovnoběžná s přímkou p, jsou středy hledaných kružnic l_1, l_2 průsečíky os úhlů přímek p, t s přímkou BS (obr. 165).

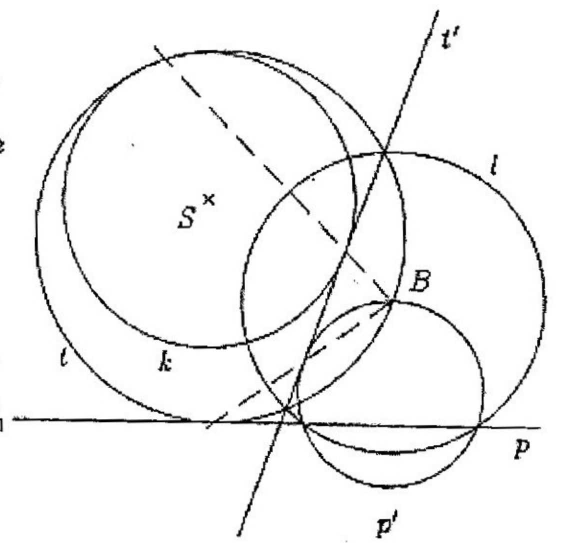


Obr. 164

c) Bod B neleží ani na přímce p ani na kružnici k. Úlohu budeme řešit pomocí kruhové inverze se středem v bodě B. Kružnici l kruhové inverze volíme nejlépe tak, aby kružnice k zůstala v této inverzi samodružná; přímka p se zobrazí na kružnici p' procházející bodem B. Sestrojíme společné vnitřní i vnější tečny ke kružnicím k, p'. Tyto tečny zobrazíme v kruhové inverzi zpět na hledané kružnice, které se dotýkají přímky p, kružnice k a procházejí bodem B. Na obr. 166 je situace pro přehlednost provedena pouze pro jednu takovou tečnu t' a její obraz t, což je hledaná kružnice. Rozmyslete si, kolik může mít úloha řešení.



Obr. 165



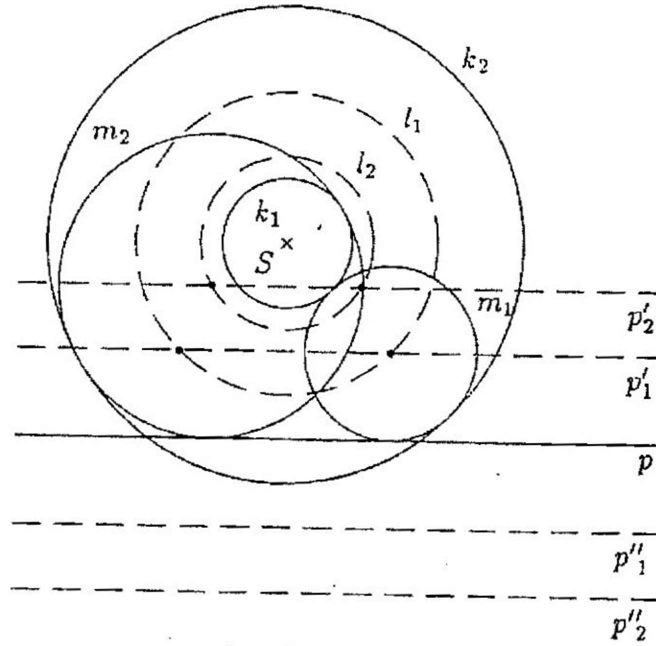
Obr. 166

o **Příklad 94.** Apolloniova úloha přímka-kružnice-kružnice (pkk)

Řešení.

Danou přímku označme p, kružnice k_1, k_2.

a) Kružnice k_1 s poloměrem r_1 a kružnice k_2 s poloměrem r_2 jsou soustředné se společným středem S; předpokládejme $r_1 < r_2$. Středy hledaných kružnic leží jednak na kružnici l_1 se středem S a poloměrem $\frac{r_1 + r_2}{2}$ a zároveň na přímkách p_1', p_1'' rovnoběžných s přímkou p a vzdálených od ní o délku $\frac{r_2 - r_1}{2}$, jednak na kružnici l_2 se středem S a poloměrem $\frac{r_2 - r_1}{2}$ a zároveň na přímkách p_2', p_2'' rovnoběžných s přímkou p a vzdálených od ní o délku $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Na obr. 167 je znázorněna pouze jedna kružnice m_1 jednoho typu a pouze jedna kružnice m_2 druhého typu. Rozmyslete si, kolik až může mít úloha řešení.



Obr. 167

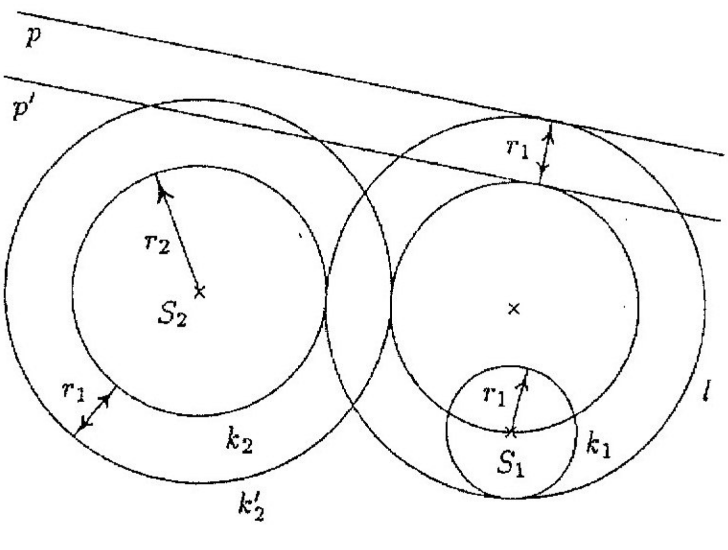
b) Kružnice k_1 se středem S_1 a poloměrem r_1 a kružnice k_2 se středem S_2 a poloměrem r_2 nejsou soustředné. Úlohu vyřešíme dilatací. Kružnici s menším poloměrem (řekněme, že je to r_1; v případě $r_1 = r_2$ volíme též r_1) zmenšíme pouze na její střed, poloměr kružnice k_2 zvětšíme, resp. zmenšíme, o délku r_1 (dostaneme kružnice k_2', k_2''), s přímkou p vedeme rovnoběžky p', p'' ve vzdálenosti r_1 od p. Máme pak za úkol sestrojit kružnice procházející bodem S_1, dotýkající se kružnice k_2' (resp. k_2'') a přímky p' (resp. p''), nebo které procházejí body S_1, S_2 (při $r_1 = r_2$) a dotýkají se přímky p' (resp. p''). Obě úlohy jsme už vyřešili výše. Pak poloměry získaných kružnic zvětšíme o délku r_1 a sestrojíme hledané kružnice. Na obr. 168 je pro přehlednost znázorněna jedna taková kružnice l.

o **Příklad 95.** Apolloniova úloha bod-kružnice-kružnice (*Bkk*)

Řešení.

Daný bod označme B, kružnice k_1, k_2.

a) Bod B leží na kružnici k_1, kružnice k_1, k_2 mohou být soustředné i nesoustředné. Sestrojíme v bodě B tečnu t ke kružnici k_1 a tím naše úloha přejde na úlohu bod-přímka-kružnice (bod B leží na přímce t, kružnice k_2), která je vyřešena v příkladu 93 a).



Obr. 168

b) Bod B neleží ani na jedné z kružnic k_1, k_2, kružnice mohou být soustředné i nesoustředné. Bod B zvolíme za střed kruhové inverze, v níž se obě kružnice zobrazí na kružnice (kruhovou inverzi volíme nejlépe tak, aby k_1 nebo k_2 zůstala samodružná). Další postup je již popsán v příkladu 91. Naše úloha může však mít více řešení než úloha bod-přímka-přímka.

o **Příklad 96.** Apolloniova úloha kružnice-kružnice-kružnice (*kkk*)

Řešení.

Dané kružnice označme k_1, k_2, k_3.

a) Kružnice k_1, k_2 jsou soustředné, kružnice k_3 není s nimi soustředná. Řešení je analogické jako případ přímka-kružnice-kružnice, kružnice k_1, k_2 soustředné, jehož řešení je uvedeno v příkladu 94 a).

b) Všechny tři kružnice k_1, k_2, k_3 mají různé středy S_1, S_2, S_3. Označení kružnic můžeme volit tak, aby pro jejich poloměry platilo $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Použijeme metodu dilatace. Kružnici k_1 zmenšíme pouze na její střed S_1, poloměry zbylých dvou kružnic zmenšíme, resp. zvětšíme, o hodnotu r_1. Úloha tak přejde na úlohu bod-kružnice-kružnice nebo na úlohu bod-bod-kružnice nebo na úlohu bod-bod-bod, které všechny byly již vyřešeny v příkladech výše. Úloha vyžaduje rozsáhlou diskusi (proveďte ji podrobně sami!) závislou na vzájemné poloze kružnic k_1, k_2, k_3 a na hodnotách poloměrů r_1, r_2, r_3. Závěrečné sestrojení hledaných kružnic je analogické jako např. v příkladu 94 b).

---

o **Cvičení 1.** Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 vně sebe a jejich středná s. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a přímky s.

o **Cvičení 2.** Kružnice k_1, k_2, k_3 se vně dotýkají, navíc k_1 je shodná s k_2. Sestrojte všechny kružnice, které se všech tří kružnic dotýkají.

o **Cvičení 3.** Jsou dány soustředné kružnice k_1, k_2 a bod B neležící na žádné z nich. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a procházejí bodem B. Úlohu řešte bez použití kruhové inverze.

o **Cvičení 4.** Úlohu přímka-kružnice-kružnice, přímka p se dotýká aspoň jedné z kružnic k_1, k_2, řešte pomocí kruhové inverze.

o **Cvičení 5.** Úlohu bod-kružnice-kružnice, bod B leží na jedné z kružnic k_1, k_2, řešte pomocí kruhové inverze.

o **Cvičení 6.** Sestrojte všechny kružnice s poloměrem r, které se dotýkají dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2.

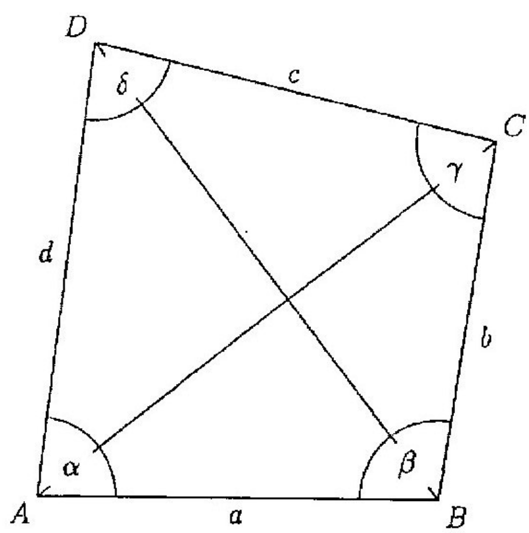
o **Cvičení 7.** Je dán ostrý úhel AVB a bod Q uvnitř úhlu. Sestrojte polokružnici tak, aby procházela bodem Q, dotýkala se přímky VA a její průměr ležel na přímce VB.

o **Cvičení 8.** Do kosočtverce je vepsána kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají dvou sousedních stran kosočtverce a kružnice k.

o **Cvičení 9.** Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který neleží ani na p ani na q. Sestrojte dvě shodné kružnice, které se vzájemně dotýkají, obě procházejí bodem M, jedna se dotýká přímky p a druhá přímky q.

o **Cvičení 10.** Jsou dány rovnoběžky a, b a bod A ležící na přímce a a bod B ležící na přímce b tak, že neleží na společné kolmici k přímkám a, b. Sestrojte dvě kružnice k_1, k_2, pro které platí: kružnice k_1 se dotýká přímky a v bodě A, kružnice k_2 se dotýká přímky b v bodě B, obě kružnice mají vnější dotyk, poloměr kružnice k_1 je dvakrát větší než poloměr kružnice k_2.

27. Čtyřúhelníky



Obr. 169

Čtyřúhelníkem $ABCD$ rozumíme sjednocení trojúhelníků ABC a ACD o společné straně AC, které nemají žádné další společné body. Dále budeme předpokládat, že bod C neleží v trojúhelníku ABD a že bod A nepatří do trojúhelníku CBD. Mluvíme pak o tzv. **konvexním čtyřúhelníku** $ABCD$ (obr. 169). Úsečky AB, BC, CD, DA jsou stranami čtyřúhelníku, jejich délky budeme zpravidla značit $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Úhly čtyřúhelníku rozumíme úhly DAB, ABC, BCD, CDA, budeme je značit α, β, γ, δ. Úsečky AC a BD jsou úhlopříčky čtyřúhelníku, dvojice vrcholů A, C a B, D jsou dvojicemi protějších vrcholů; podobně mluvíme o protějších úhlech α, γ a β, δ, zatímco například A, B jsou sousední vrcholy, α, β sousední úhly. Protože čtyřúhelník $ABCD$ je sjednocením dvou trojúhelníků a součet vnitřních úhlů trojúhelníku je π, je součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku 2π, tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi.$$

Zvláštním případem čtyřúhelníků jsou ty, pro které platí $\alpha + \gamma = \pi$, a tedy také $\beta + \delta = \pi$. Z věty o obvodovém a středovém úhlu totiž plyne, že to jsou právě ty čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici; jsou to ty čtyřúhelníky $ABCD$, jejichž vrcholy A, B, C, D leží na jedné kružnici. Protože každá jejich strana je tětivou této kružnice, říkáme jim též **čtyřúhelníky tětivové**.

o **Příklad 97.** Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: $|AC| = e$, $|BD| = f$, poloměr r kružnice opsané, úhel ω úhlopříček.

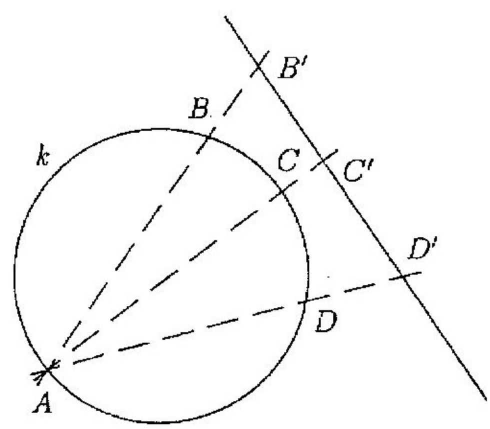
Řešení. Sestrojíme kružnici se středem S a poloměrem r a v ní tětivu AC délky e. Osa o_1 tětivy AC a osa o_2 tětivy BD se protínají v bodě S a svírají též úhel ω. Sestrojíme tedy osy o_1, o_2 a k ose o_2 tětivu BD délky f.

Platí-li v čtyřúhelníku $ABCD$ vztah $\alpha + \delta = \pi$, a tedy také $\beta + \gamma = \pi$, jsou strany AB, CD čtyřúhelníku spolu rovnoběžné. Jsou-li i strany AD, BC spolu rovnoběžné, mluvíme o rovnoběžníku, jinak o lichoběžníku. Obráceně, je-li čtyřúhelník $ABCD$ lichoběžník nebo rovnoběžník, je $\alpha + \delta = \pi$ a zároveň $\beta + \gamma = \pi$, nebo je $\alpha + \beta = \pi$ a zároveň $\gamma + \delta = \pi$ (jsou-li rovnoběžné strany AD a BC).

Které čtyřúhelníky jsou tětivové a zároveň lichoběžníky nebo rovnoběžníky? Jsou to ty, pro které platí zároveň $\alpha + \gamma = \pi$, $\beta + \delta = \pi$, $\alpha + \delta = \pi$ a $\beta + \gamma = \pi$, nebo $\alpha + \gamma = \pi$, $\beta + \delta = \pi$, $\beta + \gamma = \pi$ a $\gamma + \delta = \pi$. V prvním případě pak platí $\gamma = \delta$ a zároveň $\alpha = \beta$ a $\alpha + \gamma = \pi$, v druhém případě je $\beta = \gamma$, $\alpha = \delta$ a opět $\alpha + \gamma = \pi$. Jde tedy vždy o rovnoramenný lichoběžník nebo pravoúhelník. Dosavadní výsledky shrneme do tohoto přehledu (šipka směřuje vždy od množiny k její podmnožině):

$$\begin{tikzcd} & \text{Čtyřúhelníky} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Tětivové čtyřúhelníky} \arrow[d] & & \text{Lichoběžníky a rovnoběžníky} \arrow[dll] \arrow[d] \\ \text{Rovnoramenné lichoběžníky a pravoúhelníky} \arrow[dr] & & \text{Rovnoběžníky} \arrow[dl] \\ & \text{Pravoúhelníky} \arrow[d] & \\ & \text{Čtverce} & \end{tikzcd}$$

Uvedeme ještě jednu charakteristickou vlastnost tětivových čtyřúhelníků. Uvažujme čtyřúhelník $ABCD$ a obrazy B', C', D' bodů B, C, D v kruhové inverzi se středem A a koeficientem třeba rovným jedné. Je-li čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, leží body B, C, D na kružnici k procházející bodem A. Ta se ve zvolené kruhové inverzi zobrazí na přímku, na níž leží body B', C', D' (obr. 170), přičemž bod C' leží mezi body B', D'. A platí to též obráceně – leží-li bod C' na úsečce $B'D'$, leží bod C na kruhovém oblouku BD kružnice, která prochází bodem A, a to tak, že se dvojice bodů A, C a B, D oddělují, takže $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Můžeme tedy říci, že čtyřúhelník $ABCD$ je právě tehdy tětivový, když leží bod C' na úsečce $B'D'$, tedy právě



Obr. 170

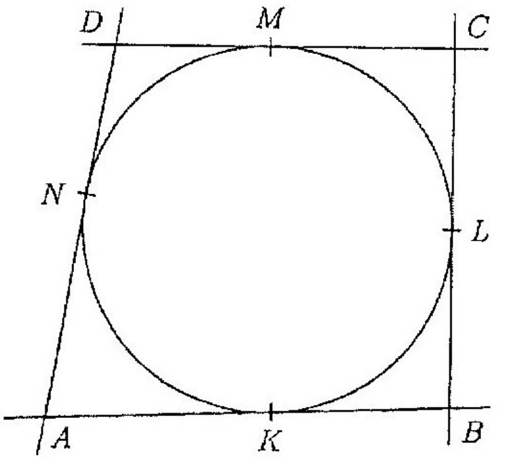
tehdy, platí-li $|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$, jinak je $|B'C'| + |C'D'| > |B'D'|$. Podle cvičení 5 kapitoly 25 je $|B'C'| = \dfrac{|BC|}{|AB|\cdot|AC|}$ a podobně pro $|C'D'|$ a $|B'D'|$. Dosadíme-li tyto vztahy do předcházející rovnosti, resp. nerovnosti, dostaneme tento krásný výsledek:

Věta Ptolemaiova (kolem r. 150 n.l.). Součin délek úhlopříček ve čtyřúhelníku je nejvýše roven součtu součinů délek jeho protějších stran, přičemž rovnost platí právě tehdy, když je čtyřúhelník tětivový.

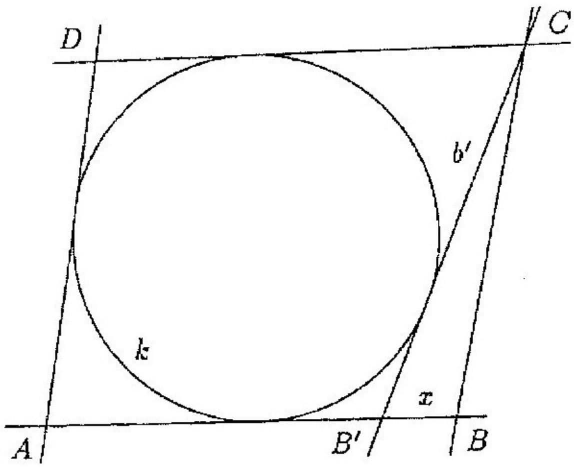
Můžeme se dále zabývat otázkou, kterým čtyřúhelníkům lze vepsat kružnici. Takovým čtyřúhelníkům říkáme **tečnové čtyřúhelníky**, protože každá jejich strana je tečnou kružnice vepsané čtyřúhelníku. Předpokládejme, že čtyřúhelník *ABCD* je tečnový, a označme *K*, *L*, *M*, *N* body dotyku jeho stran a vepsané kružnice (obr. 171). Pak je $|AK| = |AN|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$ a $|DM| = |DN|$, odkud ihned plyne $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, tedy $a + c = b + d$. To je nutná podmínka pro to, aby byl čtyřúhelník tečnový.

Ukážeme, že je to též podmínka postačující. Nechť v čtyřúhelníku *ABCD* platí $a + c = b + d$. Sestrojme v čtyřúhelníku *ABCD* kružnici, která se dotýká polopřímek *AB* a *AD*. Můžeme ještě předpokládat, že jsme ji pomocí vhodné stejnolehlosti se středem v bodě *A* zvětšili tak, že se dotýká ještě jedné další strany čtyřúhelníku, třeba strany *CD*, zatímco přímka *BC* není sečnou této kružnice *k*. Chceme dokázat, že je její tečnou (obr. 172). Veďme bodem *C* další tečnu ke kružnici *k*, různou od tečny *CD*. Její průsečík s přímkou *AB* označme *B'*, délku úsečky *BB'* označme *x* a $b' = |CB'|$. Čtyřúhelník *AB'CD* je tětivový, proto $a - x + c = d + b'$; podle předpokladu je $a + c = b + d$, tedy $x + b' = b$. Pokud by však byly body *B*, *B'* různé, platila by nerovnost $x + b' > b$. Proto body *B*, *B'* splývají a kružnice *k* se dotýká i strany *BC*, čtyřúhelník *ABCD* je tečnový.

Platí tedy: Čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, jestliže součet délek jeho dvou protějších stran se rovná součtu délek zbývajících dvou protějších stran, tj. $a + c = b + d$.



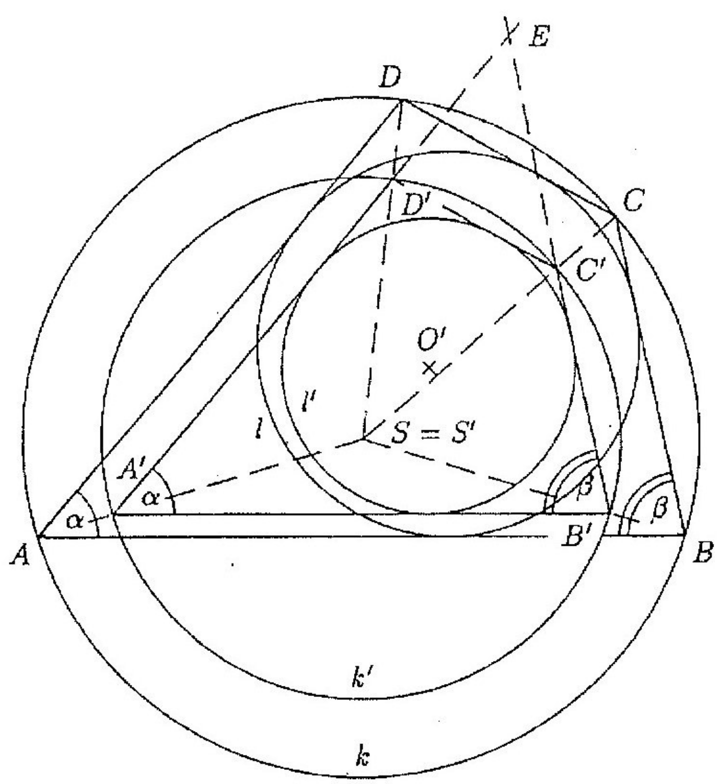
Obr. 171



Obr. 172

o **Příklad 98.** Sestrojte tzv. dvojstředový čtyřúhelník *ABCD*, tj. takový čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, je-li dáno: α, β, $\alpha + \beta < 180°$, poloměr *r* kružnice opsané.

Řešení. Nejprve sestrojíme čtyřúhelník *A'B'C'D'* podobný čtyřúhelníku *ABCD*. Čtyřúhelník *A'B'C'D'* má vepsanou kružnici *l'* se středem *O'* a opsanou kružnici *k'* se středem S' (obr. 173). Čtyřúhelník $A'B'C'D'$ pak zobrazíme stejnolehlostí se středem $S = S'$ na čtyřúhelník $ABCD$ tak, aby poloměr jeho opsané kružnice k byl r. Zaměřme se proto na sestrojení čtyřúhelníku $A'B'C'D'$. Sestrojíme libovolný trojúhelník $A'B'E$, který má úhel α při vrcholu A' a úhel β při vrcholu B'. Tomuto trojúhelníku vepíšeme kružnici l', což je zároveň vepsaná kružnice čtyřúhelníku $A'B'C'D'$. Nyní již jen stačí sestrojit na úsečce $B'E$ bod C' tak, aby součet úhlů při vrcholech A' a C' byl 180°, a na úsečce $A'E$ bod D' tak, aby se úsečka $C'D'$ dotýkala kružnice k'.



Obr. 173

Jestliže v čtyřúhelníku platí, že součet délek dvou sousedních stran se rovná součtu délek zbývajících dvou sousedních stran, nejedná se o čtyřúhelník se speciálním označením. Předpokládáme-li však zároveň, že je to čtyřúhelník tečnový, musí se v něm rovnat délky dvou sousedních stran a současně se rovnají délky zbývajících dvou stran; takový čtyřúhelník se nazývá **deltoid**. Rovnají-li se dvě protější strany a zároveň zbývající dvě protější strany, musí to být rovnoběžník (vyplývá například z kosinové věty). A konečně čtyřúhelník, v němž jsou všechny strany stejně velké, je kosočtverec. Přitom považujeme každý čtverec za zvláštní případ kosočtverce. Z hlediska délek stran můžeme napsat toto schéma podmnožin množiny všech (konvexních) čtyřúhelníků:

Čtyřúhelníky

Tečnové čtyřúhelníky

Rovnoběžníky

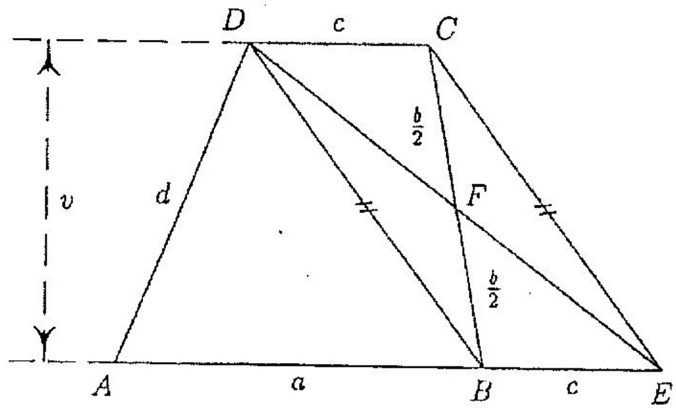
Deltoidy

Kosočtverce

Čtverce

o **Příklad 99.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, je-li dáno: $a + c$, b, d, v (výška lichoběžníku).

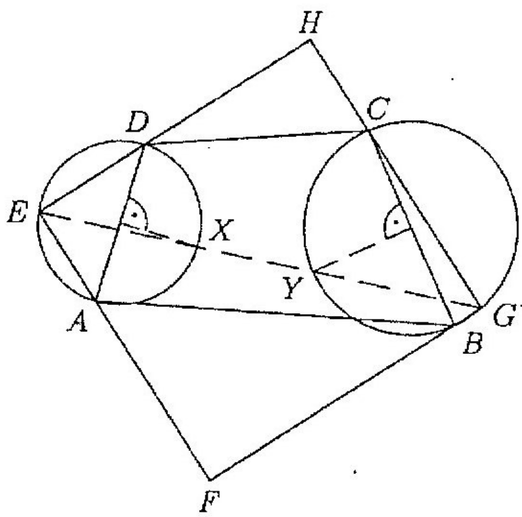
Řešení. Nejprve sestrojíme trojúhelník AED. Čtyřúhelník $BECD$ je rovnoběžník, jeho úhlopříčky se protínají v bodě F (obr. 174). Na úsečce ED sestrojíme bod F a pak již snadno body B, C.



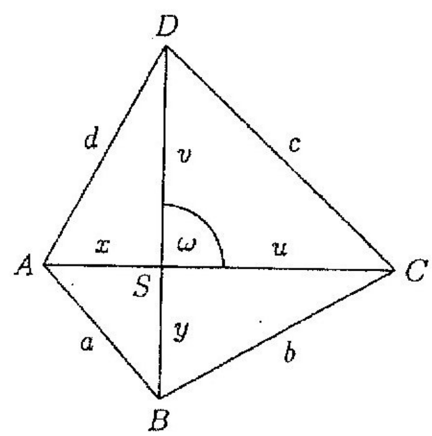
Obr. 174

o **Příklad 100.** Danému čtyřúhelníku $ABCD$ opište čtverec.

Řešení. Čtverec označme $EFGH$. Bod E leží na Thaletově kružnici k_1 nad průměrem AD, bod G leží na Thaletově kružnici k_2 nad průměrem BC. Jelikož je přímka EG osou úhlu AED, musí úhlopříčka EG čtverce procházet bodem X, který dělí na polovinu oblouk kružnice k_1, na němž neleží bod E a který je omezený body A, D – to se sobě rovnají obvodové úhly AEX a DEX (obr. 175). Stejná úvaha platí pro bod Y. Dokončení konstrukce čtverce $EFGH$ je již snadné.



Obr. 175



Obr. 176a

o **Příklad 101.** Dokažte, že úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku o stranách délek a, b, c, d jsou na sebe právě tehdy kolmé, když je $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Řešení. Označme ω úhel úhlopříček, S jejich průsečík a x, y, u, v vzdálenosti bodu S od vrcholů A, B, C, D čtyřúhelníku (obr. 176a). Podle kosinové věty je

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega\,,$$

$$b^2 = y^2 + u^2 + 2yu\cos\omega\,,$$

$$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega\,,$$

$$d^2 = x^2 + v^2 + 2xv\cos\omega\,,$$

takže $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ platí právě tehdy, když

$$(x+u)(y+v)\cos\omega = 0\,,$$

což vzhledem k tomu, že $x + u > 0$, $y + v > 0$, je splněno tehdy a jen tehdy, když jsou úhlopříčky čtyřúhelníku na sebe kolmé. To ovšem znamená, že jakmile má jeden ze čtyřúhelníků se stranami a, b, c, d na sebe kolmé úhlopříčky, pak jsou na sebe kolmé úhlopříčky ve všech čtyřúhelnících s těmito délkami stran.

o **Příklad 102 (*Brahmaguptova věta*).** Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový s délkami stran a, b, c, d a polovičním obvodem $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, je jeho obsah roven

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Řešení. Podle obr. 169 je $\beta+\delta=180°$, což znamená $\cos\delta=-\cos\beta$, $\sin\delta=\sin\beta$. Podle dvakrát použité kosinové věty je $a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2+2cd\cos\beta$, proto

$$2(ab+cd)\cos\beta=a^2+b^2-c^2-d^2. \qquad (1)$$

Pro obsah čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\beta=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta,$$

$$2(ab+cd)\sin\beta=4P. \qquad (2)$$

Rovnosti (1), (2) umocníme na druhou a sečteme. Postupně dostaneme

$$16P^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2,$$

$$16P^2=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2),$$

$$16P^2=\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\cdot\left[-(a-b)^2+(c+d)^2\right],$$

$$16P^2=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b),$$

$$P^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Poznámka. Položíme-li v Brahmaguptově vzorci $d=0$, dostaneme Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku.

o **Příklad 103.** Jestliže je $ABCD$ lichoběžník se základnami AB, CD a délkami stran a, b, c, d, $a > c$, je jeho obsah roven

$$P=\frac{a+c}{a-c}\cdot\sqrt{t(t-a+c)(t-b)(t-d)},\quad \text{kde } t=\frac{1}{2}(a+b-c+d).$$

Řešení. Při důkazu předpokládejme $a > c$. Sestrojme v obr. 174 ještě bod H na straně AB tak, aby byl $HBCD$ rovnoběžník; pak je $|AH| = a - c$. Poloviční obvod trojúhelníku AHD je $t=\frac{1}{2}(a+b-c+d)$, jeho výška i výška lichoběžníku je v. Obsah trojúhelníku vyjádříme dvěma způsoby a dáme do rovnosti:

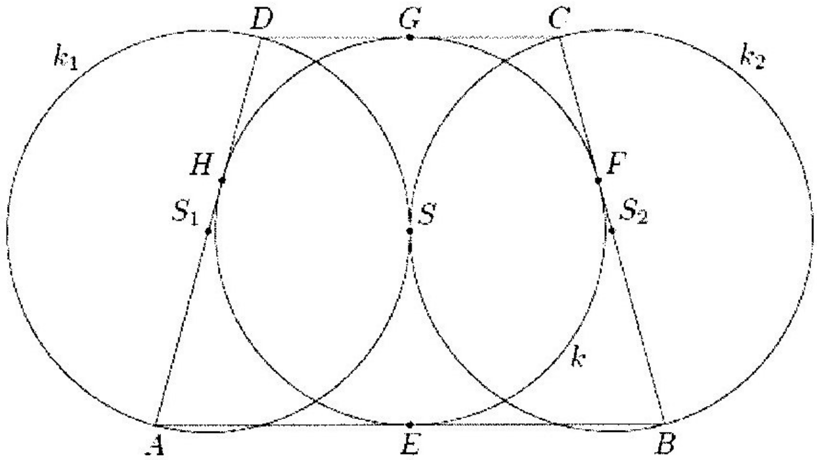
$$\frac{1}{2}\cdot(a-c)v=\sqrt{t(t-a+c)(t-b)(t-d)}$$

Odtud je $v=\dfrac{2\cdot\sqrt{t(t-a+c)(t-b)(t-d)}}{a-c}$, takže obsah lichoběžníku $ABCD$ je

$$P=\frac{1}{2}\cdot(a+c)v=\frac{a+c}{a-c}\cdot\sqrt{t(t-a+c)(t-b)(t-d)}.$$

o **Příklad 104.** Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD je vepsána kružnice k se středem S. Dokažte, že kružnice nad průměry BC a AD se v bodě S dotýkají a že trojúhelníky BSC a ASD jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu S.

Řešení. Je-li $|AB| = a$, $|CD| = c$, $a > c$, a jsou-li E, F, G, H body dotyku kružnice k postupně se stranami AB, BC, CD, DA, je $|BC| = |BF| + |FC| = |BE| + |CG| = \frac{a+c}{2}$ (obr. 176b). Vzdálenost středů S_1, S_2 Thaletových kružnic k_1, k_2 sestrojených nad průměry AD, BC je rovna délce střední příčky lichoběžníku, proto se kružnice k_1, k_2 dotýkají v bodě S. Proto jsou trojúhelníky BSC a ASD pravoúhlé.



Obr. 176b

---

o **Cvičení 1.** Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $a = |AB|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$, $\alpha = |\sphericalangle DAB|$.

o **Cvičení 2.** Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno
a) $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $e = |AC|$,
b) $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle DAB|$, $\gamma = |\sphericalangle BCD|$, ρ (poloměr kružnice vepsané).

o **Cvičení 3.** Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $a - e > 0$, α, kde $a = |AB|$, $e = |AC|$, $\alpha = |\sphericalangle DAB|$.

o **Cvičení 4.** Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, je-li dáno $a = |AB|$, $c = |CD|$, $e = |AC|$.

o **Cvičení 5.** Jsou dány úsečky délek a, b, c, d, přičemž $d > a$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ tak, aby měl délky stran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ a aby úhlopříčka AC půlila úhel DAB.

o **Cvičení 6.** Protínají-li se osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku ve čtyřech různých bodech, jsou tyto body vrcholy tětivového čtyřúhelníku. Dokažte.

o **Cvičení 7.** Dokažte, že součet úhlů, pod kterými vidíme protější strany tečnového čtyřúhelníku ze středu vepsané kružnice, je 180°.

o **Cvičení 8.** Dokažte, že v tečnovém čtyřúhelníku se stranami délek a, b, c, d jsou úhlopříčky právě tehdy na sebe kolmé, když platí $ac = bd$. Čtyřúhelník je v takovém případě deltoid, kosočtverec, nebo čtverec.

o **Cvičení 9.** Nechť pro čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|AC|^2+|BD|^2=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2.$$

Dokažte, že čtyřúhelník je rovnoběžník.

o **Cvičení 10.** Dokažte, že součet druhých mocnin délek úhlopříček lichoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho ramen a dvojnásobného součinu délek jeho základen.

o **Cvičení 11.** Dokažte, že obsah konvexního čtyřúhelníku s úhlopříčkami, které mají délky e, f a svírají úhel φ, je roven $P=\frac{1}{2}ef\sin\varphi$.

o **Cvičení 12.** Dokažte, že součet délek úhlopříček konvexního čtyřúhelníku je menší než jeho obvod a větší než polovina obvodu.

o **Cvičení 13.** Dokažte, že v každém lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD a průsečíkem M jeho úhlopříček jsou obsahy trojúhelníků ADM a BCM stejné.

o **Cvičení 14.** Uvažujme ciferník hodin poloměru r. Jaký je obsah P čtyřúhelníku s vrcholy v číslech 1, 3, 8, 9?

28. Konvexní mnohoúhelníky. Pravidelné mnohoúhelníky

Konvexní mnohoúhelník je mnohoúhelník, který má velikosti všech vnitřních úhlů menší než 180°. (Obecně: Útvar se nazývá konvexní, právě když s každými dvěma jeho body leží v útvaru i úsečka tyto body spojující.)

Označme konvexní n-úhelník $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$.

o **Příklad 105.** Dokažte, že součet velikostí vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2)\cdot 180°$, $n \geq 3$.

Řešení. Uvnitř n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ zvolíme libovolný bod S (obr. 177) a n-úhelník rozdělíme na n trojúhelníků SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Součet velikostí vnitřních úhlů všech těchto trojúhelníků je $n\cdot 180°$. Od tohoto součtu je ale třeba odečíst součet velikostí všech úhlů při vrcholu S, což je 360°.

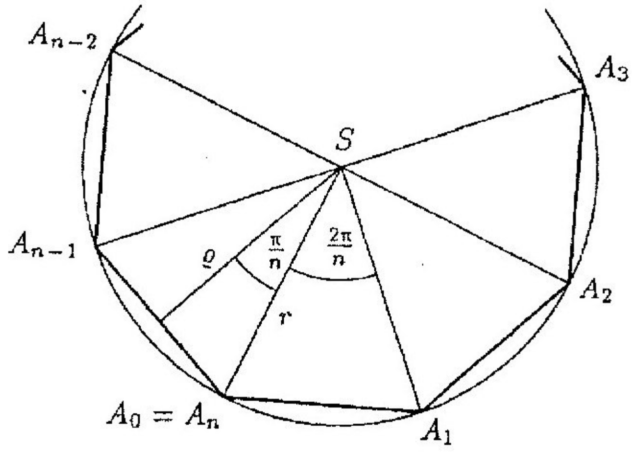
o **Příklad 106.** Dokažte, že v konvexním n-úhelníku počet úhlopříček i stran dohromady je $\frac{n(n-1)}{2}$, počet úhlopříček je $\frac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 3$.

Řešení. Z každého vrcholu n-úhelníku vychází $n-1$ úseček (úhlopříček nebo stran). Každá úsečka je ale počítána dvakrát, odkud dostaneme dokazovaný počet. Počet úhlopříček vycházejících z každého vrcholu je jen $n-3$, z čehož stejnou úvahou dostáváme počet všech úhlopříček.

Jedním zajímavým typem mnohoúhelníků jsou **pravidelné mnohoúhelníky**.

Zvolme přirozené číslo $n \geq 3$ a na kružnici k o poloměru r a středu S body A_0, A_1 tak, aby velikost úhlu A_0SA_1 byla v obloukové míře $\frac{2\pi}{n}$, ve stupních $\frac{360°}{n}$. Sestrojme dále body A_2, A_3, ... tak, aby úhly $A_{i-1}SA_i$ měly tutéž velikost (obr. 177). Pak splyne bod A_n

s bodem A_0 a průnikem všech polorovin $A_{i-1}A_iS$ ($i = 1, 2, ..., n$) je pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$, který je konvexní. Protože všechny jeho vrcholy leží na kružnici k, říkáme, že je mnohoúhelník $A_1A_2...A_n$ kružnici k vepsán. Skládá se z n rovnoramenných trojúhelníků $A_{i-1}A_iS$, každý z nich má při základně úhel velikosti $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ a $|SA_i| = r$, $i = 1, 2, ..., n$. Kružnice o středu S a poloměru $\rho = r\cos\frac{\pi}{n}$ se dotýká všech stran $A_{i-1}A_i$ uvažovaného pravidelného mnohoúhelníku, je to kružnice tomuto n-úhelníku vepsaná. Všechny strany pravidelného n-úhelníku jsou stejně dlouhé, $|A_{i-1}A_i| = 2r\sin\frac{\pi}{n}$ pro $i = 1, 2, ..., n$. Také všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké, $|\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}| = \pi - \frac{2\pi}{n}$, kde i nabývá opět všech hodnot $1, 2, ..., n$ a $A_{n+1} = A_1$.



Obr. 177

Obsah P pravidelného n-úhelníku vepsaného kružnici o poloměru r se rovná n-násobku obsahu výše popsaného rovnoramenného trojúhelníku $A_{i-1}A_iS$, je tedy

$$P = nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Pro obvod l pravidelného n-úhelníku platí

$$l = n \cdot 2r\sin\frac{\pi}{n}.$$

Poměr $\frac{l^2}{P} = 4n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$ nezávisí na r, závisí pouze na n. Dá se ukázat, že tato hodnota s rostoucím n klesá a blíží se hodnotě 4π (tj. poměru druhé mocniny délky kružnice a obsahu kruhu o témže poloměru).

o **Příklad 107.** Pro která přirozená čísla n, $n \geq 3$, lze pokrýt rovinu nepřekrývajícími se pravidelnými n-úhelníky tak, že každé dva n-úhelníky, které mají společný aspoň jeden bod, mají buď jen společnou stranu nebo jen společný vrchol?

Řešení. Nechť je rovina pokryta požadovanými pravidelnými n-úhelníky s vnitřními úhly o velikosti $\pi - \frac{2\pi}{n}$ a nechť společný vrchol má m těchto n-úhelníků. Součet vnitřních úhlů m pravidelných n-úhelníků ve společném vrcholu je roven $m \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi$, což po úpravě dává rovnost $m = 2 + \frac{4}{n-2}$. Jelikož je číslo m přirozené, musí být i výraz $\frac{4}{n-2}$ přirozené číslo, a proto naší úloze vyhovují jen řešení:

$$n_1 = 3,\ m_1 = 6; \quad n_2 = 4,\ m_2 = 4; \quad n_3 = 6,\ m_3 = 3.$$

To znamená, že rovinu lze pokrýt buď rovnostrannými trojúhelníky nebo čtverci nebo pravidelnými šestiúhelníky. Jistě není složité nakreslit takové pokrytí roviny.

Na začátku jsme předpokládali, že body A_0, A_1 na kružnici jsou již dány a tvoří spolu se středem S kružnice rovnoramenný trojúhelník, velikost jehož úhlu proti základně je $\frac{2\pi}{n}$ (v obloukové míře). Co kdybychom však měli trojúhelník A_0SA_1 daných vlastností sestrojit? Uměli bychom to? Správná odpověď na naši otázku závisí též na tom, které prostředky bychom měli k dispozici a které postupy jsou povoleny. Například při **euklidovských konstrukcích** jsou povoleny tyto postupy: dva body lze spojit přímkou, sestrojit její průsečík s další přímkou, sestrojit kružnici o daném středu a poloměru, sestrojit průsečíky přímky a kružnice nebo průsečíky dvou kružnic. Měli bychom si též uvědomit, že euklidovské řešení se nevyznačují větší přesností než mnohé jiné konstrukce, spíše vynikají jednoduchostí.

Slavný německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855) už ve svých devatenácti letech plně vyřešil otázku, které pravidelné mnohoúhelníky lze sestrojit euklidovskými konstrukcemi. Gauss dokázal, že pravidelný n-úhelník je možno sestrojit euklidovsky právě tehdy, jestliže je číslo n součinem mocniny čísla 2 s celým nezáporným exponentem a navzájem různých prvočísel, která jsou vesměs tvaru $2^{2^k}+1$, kde k je přirozené číslo nebo 0.

Víme tedy, že je možné euklidovskými konstrukcemi sestrojit pravidelný trojúhelník ($k = 0$), pravidelný pětiúhelník ($k = 1$), pravidelný sedmnáctiúhelník ($k = 2$), pravidelný čtyřúhelník (2^2), pravidelný šestiúhelník ($2\cdot\left(2^{2^0}+1\right)$), pravidelný osmiúhelník (2^3), pravidelný desetiúhelník ($2\cdot\left(2^{2^1}+1\right)$), dále pravidelný 15-úhelník nebo 34-úhelník. Naproti tomu nelze euklidovsky sestrojit pravidelný sedmiúhelník, protože 7 – 1 není mocninou dvou, ani pravidelný devítiúhelník, neboť 9 není součinem různých prvočísel tvaru $2^{2^k}+1$. Konstrukce pravidelných n-úhelníků nemá žádný praktický význam, zajímavé jsou však zde vystupující těsné souvislosti mezi geometrií a teorií čísel. Matematici se dlouho domnívali, že každé číslo tvaru $2^{2^k}+1$ (k celé, nezáporné) je prvočíslo. To však platí pro k = 0, 1, 2, 3, 4, ale pro $k = 5$ dostaneme číslo složené.

Ukážeme si ještě euklidovské konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku. Předpokládejme, že $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ je pravidelný desetiúhelník vepsaný kružnici o poloměru r se středem S (obr. 178). Označme $a = |A_1A_3|$, $b = |A_1A_2|$ délky stran pravidelného pěti- a desetiúhelníku a bod B ten bod na úsečce SA_2, který leží na ose úsečky SA_1. Pak je $|\sphericalangle BA_1A_3| = 18°$, a proto jsou body B, A_2 souměrně sdružené podle přímky A_1A_3. Trojúhelník SA_1B je rovnoramenný, rovnoramenné jsou též trojúhelníky A_2BA_1 a A_1A_2S, které jsou navíc podobné. Je tedy $\frac{|A_2B|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_1A_2|}{|SA_1|}$, tj. $\frac{r-b}{b} = \frac{b}{r}$. Vidíme, že bod B dělí úsečku SA_2 v poměru „zlatého řezu" (viz následující kapitola). Vidíme, že mezi b a r platí vztah $b^2 + br - r^2 = 0$, odkud $b = \frac{r}{2}\cdot\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

Je-li dána úsečka délky r, dovedeme euklidovsky sestrojit úsečku délky b, a to například takto (obr. 179): Jeden z kolmých poloměrů SK, SL kružnice o poloměru r rozpůlíme bodem M a délku $|LM|$ naneseme od bodu M na polopřímku opačnou k polopřímce MK. Dostaneme tak bod N. Pak je

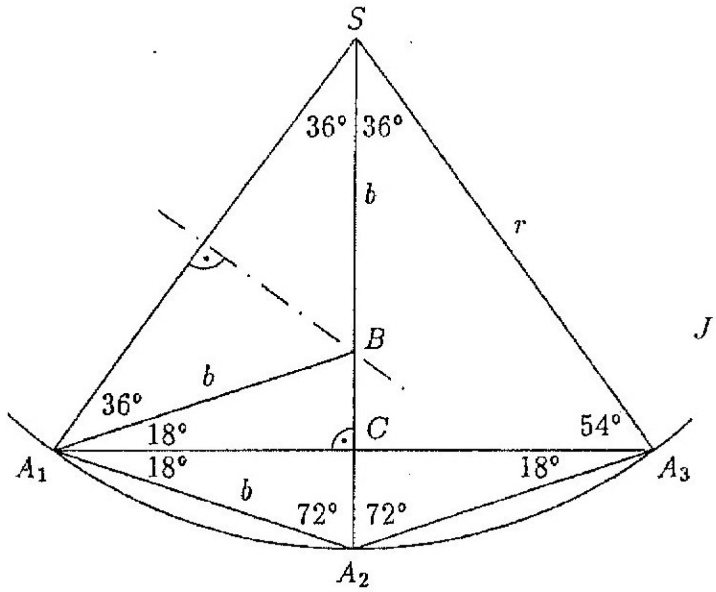
$$|SN| = |MN| - |MS| = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right) = b,$$

takže $|SN|$ je délka strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného kružnici o poloměru $r = |SK|$.

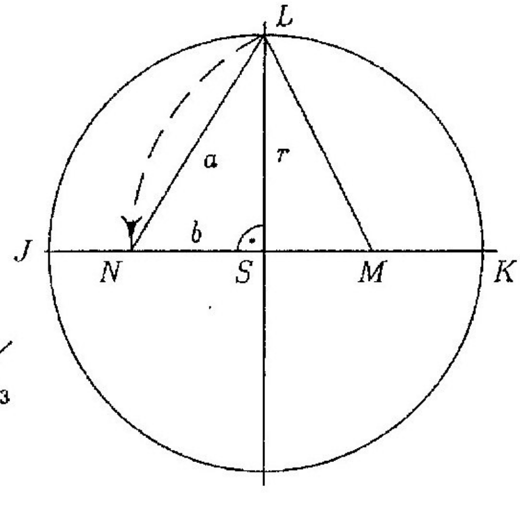
Pro délku a pravidelného pětiúhelníku platí (obr. 178)

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = |A_1C|^2 = |SA_1|^2 - |SC|^2 = r^2 - \left(r - |BC|\right)^2 = r^2 - \left(r - \frac{r-b}{2}\right)^2 = \frac{3r^2 - 2br - b^2}{4},$$

takže je $a^2 = 3r^2 - 2rb - b^2$. Tento poslední výraz se ale rovná výrazu $r^2 + b^2$, protože je $b^2 + br - r^2 = 0$. Je tedy a délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách r, b, takže $a = |LN|$ (obr. 179).

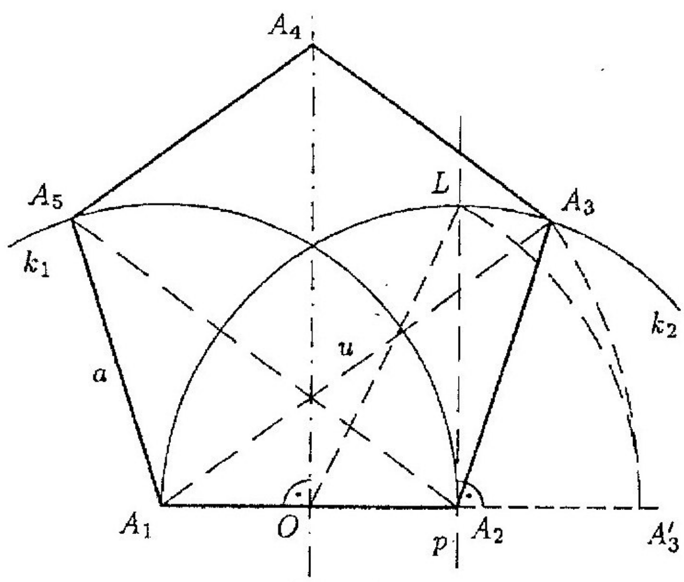


Obr. 178



Obr. 179

o **Příklad 108.** Dokažte správnost následující konstrukce pravidelného pětiúhelníku, je-li dána délka jeho strany $a = |A_1A_2|$ (obr. 180): Sestrojíme kruhové oblouky k_1, k_2, které mají středy v krajních bodech A_1, A_2 dané strany a poloměr roven její délce. V bodě A_2 sestrojíme kolmici p na přímku A_1A_2, její průsečík s obloukem k_2 označíme L. Stranu A_1A_2 rozpůlíme bodem O a na polopřímku OA_2 naneseme délku $|OA'_3| = |OL|$. Úsečka $A_1A'_3$ má délku rovnou délce úhlopříčky u hledaného pětiúhelníku. Další konstrukce pětiúhelníku je zřejmá z obr. 180.



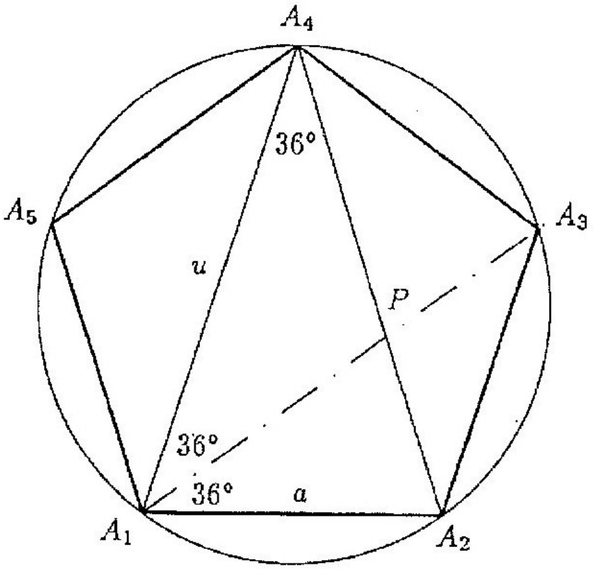
Obr. 180

Řešení. Nechť $A_1A_2A_3A_4A_5$ je hledaný pravidelný pětiúhelník (obr. 181). Bodem A_1 vedeme osu PA_1 úhlu $A_4A_1A_2$. Jelikož $|A_1A_2| = |A_1P| = |A_4P|$, trojúhelníky PA_2A_1 a $A_1A_2A_4$ jsou rovnoramenné a podobné, takže $\dfrac{|PA_2|}{|A_1A_2|} = \dfrac{|A_1A_2|}{|A_1A_4|}$, neboli $\dfrac{u-a}{a} = \dfrac{a}{u}$, tj. $u^2 - au - a^2 = 0$. Odtud $u = \dfrac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)$. Z uvedené konstrukce plyne

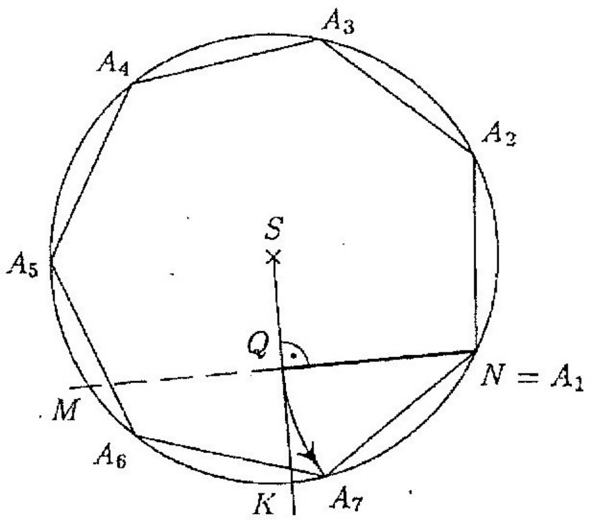
$$|OL| = \sqrt{|OA_2|^2 + |LA_2|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{5},$$

$$|A_1A'_3| = |A_1O| + |OA'_3| = |A_1O| + |OL| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cdot\sqrt{5} = \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right),$$

což souhlasí s výrazem odvozeným pro délku úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku.



Obr. 181



Obr. 182

Ty pravidelné mnohoúhelníky, které nelze sestrojit euklidovsky, se konstruují různými přibližnými metodami, které jsou více či méně přesné a hlavně složité. Jako příklad uvedeme jednu jednoduchou přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníku. V kružnici o poloměru r a středu S, do které má být pravidelný sedmiúhelník vepsán, sestrojíme poloměr SK a označíme Q střed úsečky SK (obr. 182). Bodem Q vedeme tětivu MN kolmou na poloměr SK. Za stranu pravidelného sedmiúhelníku vezmeme úsečku QN.

Nyní ještě spočítáme, jaké chyby jsme se dopustili při této přibližné konstrukci. Délka strany pravidelného sedmiúhelníku má hodnotu $a = 2r\sin\frac{\pi}{7} \doteq 2r\cdot 0{,}433\,92 = 0{,}867\,84\cdot r$ (počítáme na pět desetinných míst). A délka úsečky QN, která je výškou rovnostranného trojúhelníku o straně délky r, je rovna $|QN| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r \doteq 0{,}866\,02\cdot r$. Vidíme, že oba výsledky se od sebe liší jen o necelé $0{,}002\cdot r$, což např. při $r = 10$ cm je 0,2 mm.

---

o **Cvičení 1.** Vyjádřete obvod l a obsah P pravidelného n-úhelníku pomocí n a poloměru ρ kružnice mu vepsané.

o **Cvičení 2.** Určete počet os, podle kterých je pravidelný n-úhelník osově souměrný.

o **Cvičení 3.** V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB zvolte uvnitř strany BC bod K tak, aby byly trojúhelníky ABK a AKC oba rovnoramenné. Kdy má úloha řešení?

o **Cvičení 4.** Odvoďte vztah mezi hodnotami a, b, r, kde a je délka strany pravidelného n-úhelníku vepsaného kružnici o poloměru r a b je délka strany pravidelného $2n$-úhelníku vepsaného téže kružnici.

o **Cvičení 5.** Pro pravidelný mnohoúhelník $A_1A_2...A_n$ dokažte tvrzení $|A_1A_3|^2 = |A_1A_2|^2 + |A_1A_2|\cdot|A_1A_4|$.

o **Cvičení 6.** Vypočtěte obsah n-úhelníku (ne nutně pravidelného), který je opsán kružnici o poloměru ρ) a který má obvod délky $2s$.

o **Cvičení 7.** Vytvořte pokrytí roviny nepřekrývajícími se pravidelnými mnohoúhelníky tak, aby se v jednom bodě stýkaly dva pravidelné n-úhelníky a dva pravidelné m-úhelníky.

o **Cvičení 8.** Určete součet vnějších úhlů n-úhelníku.

o **Cvičení 9.** Určete poměr poloměru ρ kružnice vepsané a poloměru r kružnice opsané pravidelnému n-úhelníku. Pro které n je poloměr kružnice vepsané poloviční než poloměr kružnice opsané?

29. Dělicí poměr

Mějme dánu přímku AB a uvnitř úsečky bod C. Bod C dělí úsečku v poměru $|AC| : |BC|$. Pojem „dělit úsečku v poměru" je základem pojmu **dělicí poměr**, který vyslovíme nejen pro vnitřní body C úsečky AB, ale pro všechny body přímky AB:

Mějme dánu přímku AB a na ní bod C. Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí) je číslo, jehož absolutní hodnota je rovna $\dfrac{|AC|}{|BC|}$ *a které je kladné pro body C ležící vně úsečky A, B, záporné pro body C ležící uvnitř úsečky AB, rovné nule pro C = A a není definované pro C = B. Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B značíme (ABC).*

Problémy s dodefinováním znaménka dělicího poměru se dají odstranit, pokud místo pomocí délek úseček zavedeme dělicí poměr pomocí vektorů:

Mějme dánu přímku AB a na ní bod C. Je-li splněna rovnost vektorů $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$, *nazývá se číslo* λ *dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B a značí se* $\lambda = (ABC)$.

Podle této definice je $\lambda \in (0;1)$ pro bod C ležící vně úsečky AB za bodem A, $\lambda = 0$ pro $C = A$, $\lambda < 0$ pro bod C ležící uvnitř úsečky AB, neexistující λ pro $C = B$ a $\lambda > 1$ pro bod C ležící vně úsečky AB za bodem B. Dělicí poměr nedosahuje hodnoty $\lambda = 1$ pro žádnou polohu bodu C.

o **Příklad 109.** V trojúhelníku ABC určete dělicí poměr
a) těžiště T vzhledem ke koncovým bodům těžnice AA_0,
b) průsečíku výšek V vzhledem ke koncovým bodům výšky AA_1 pomocí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Řešení.

a) $(AA_0T) = -\dfrac{|AT|}{|A_0T|} = -\dfrac{2}{1} = -2$.

b) Úvahy provedeme pro ostroúhlý trojúhelník ABC, stejné úvahy platí ale pro pravoúhlý i tupoúhlý trojúhelník. Vyjdeme z obr. 56, kde je $|AV| = \dfrac{|AC_1|}{\sin\beta}$, $|AV_1| = |CV|\cos\beta$. Potom je:

$$(AA_1V) = -\frac{|AV|}{|A_1V|} = -\frac{\dfrac{|AC_1|}{\sin\beta}}{|CV|\cos\beta} = -\frac{\dfrac{|AC|\cos\alpha}{\sin\beta}}{\dfrac{|CA_1|}{\sin\beta}\cos\beta} = -\frac{|AC|\cos\alpha}{|CA_1|\cos\beta} = -\frac{|AC|\cos\alpha}{|AC|\cos\gamma\cos\beta} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\beta}$$

Z výsledku je patrné, že dělicí poměr nezávisí na délkách stran trojúhelníku, čili je pro všechny podobné trojúhelníky stejný.

Vraťme se nyní k předchozím kapitolám a podívejme se, kde jsme se tam s dělicím poměrem setkali.

Jedním z takových míst je kapitola 8, kde je zadefinována stejnolehlost vlastností $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, kde λ může být kladné i záporné podle polohy bodů X a X' vzhledem k bodu S, nebo to může být zapsáno vektorově $\overrightarrow{SX'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SX}$. To je vlastně zápis dělicího poměru $(X'XS) = \lambda$.

Dalším místem jsou Menelaova věta a Cèvova věta v kapitole 14. V obou případech se vyskytuje rovnost $\dfrac{|AK|}{|BK|} \cdot \dfrac{|BL|}{|CL|} \cdot \dfrac{|CM|}{|AM|} = 1$ a v každém z nich je ještě připojena nějaká podmínka. Uvedená rovnost s uvedenými podmínkami se dá pro Menelaovu větu přepsat do tvaru

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1$$

a pro Cèvovu větu do tvaru

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1.$$

V kapitole 15 se hovoří o Eulerově přímce, na níž leží body V (průsečík výšek trojúhelníku), T (jeho těžiště), S (střed jeho kružnice opsané). Tam platí $(VTS) = 3$.

Zaveďme ještě jednu veličinu související tentokrát s umístěním čtyř bodů na jedné přímce. Touto veličinou je tzv. **dvojpoměr**:

Mějme dány čtyři různé kolineární body A, B, C, D. Číslo $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ *se nazývá dvojpoměr bodů A, B, C, D (v tomto pořadí).*

Z této definice je např. patrné, že dvojpoměr je kladný, pokud body C, D leží oba uvnitř nebo oba vně úsečky AB, a dvojpoměr je záporný, pokud jeden z bodů C, D leží uvnitř a druhý vně úsečky AB. Říkáme, že se dvojice bodů A, B a dvojice C, D oddělují.

Platí-li pro čtyři kolineární body A, B, C, D vztah $(ABC) = -(ABD)$, neboli vztah $(ABCD) = -1$, nazýváme uspořádanou čtveřici (čtveřinu) bodů (A, B, C, D) **harmonickou čtveřicí (čtveřinou) bodů.** V případě harmonické čtveřice jeden z bodů C, D leží uvnitř a druhý vně úsečky AB, neboli jeden z bodů A, B leží uvnitř a druhý vně úsečky CD.

Graficky se najde ke třem bodům A, B, E čtvrtý harmonický bod F podle obr. 132. Nejprve se zakreslí přímka AB a v bodech A, B se vedou libovolné rovnoběžky. Např. na rovnoběžku procházející bodem B se zakreslí úsečka BC libovolné délky (např. délky 1), její koncový bod C se spojí s bodem E a kde tato přímka protne rovnoběžku jdoucí bodem A, získáme bod. Ten ve středové souměrnosti se středem A převedeme na bod D, který spojíme se získaným bodem C. Tato spojnice protne přímku AB v bodě F, který je tím čtvrtým harmonickým bodem. Pouze ke středu úsečky AB neexistuje čtvrtý harmonický bod.

Ještě se vrátíme k předchozím kapitolám s důrazem na to, kde jsme se setkali s harmonickou čtveřicí.

Kapitola 22 pojednává o stejnolehlosti kružnic. Mají-li dvě kružnice středy O a O', poloměry po řadě r_1 a r_2, vnější střed stejnolehlosti S_1 a vnitřní střed stejnolehlosti S_2 (obr. 121, 122a-d), tvoří body (O, O', S_1, S_2) harmonickou čtveřici, neboť platí

$$(OO'S_1S_2) = \frac{(OO'S_1)}{(OO'S_1)} = \frac{\frac{|OS_1|}{|O'S_1|}}{-\frac{|OS_2|}{|O'S_2|}} = \frac{\frac{r_1}{r_2}}{-\frac{r_1}{r_2}} = -1.$$

Kapitola 23 se věnuje Feuerbachově kružnici, která má střed F, jenž leží na Eulerově přímce (obr. 131). Pro průsečík výšek V trojúhelníku, jeho těžiště T, střed S jeho kružnice opsané a zmiňovaný střed F jeho Feuerbachovy kružnice platí $(VTSF) = -1$. Proto body (V, T, S, F) tvoří harmonickou čtveřici.

Kapitola 23 také pojednává o Apolloniově kružnici určené body A, B a koeficientem k. Tato kružnice protíná přímku AB v bodech E, F (obr. 133) a platí $(ABE) = -k$, $(ABF) = k$. Proto je $(ABEF) = -1$, a tudíž body (A, B, E, F) tvoří harmonickou čtveřici.

Ve Cvičení 8 v kapitole 23 se v trojúhelníku ABM sestrojují osa vnitřního a osa vnějšího úhlu při vrcholu M. Tyto osy protínají přímku AB postupně v bodech E, F. Je tam dokázáno, že body (A, B, E, F) tvoří harmonickou čtveřici.

Nově se ještě věnujme jednomu prakticky dosti často uznávanému a používanému dělicímu poměru, a sice **zlatému řezu**. Toto dělení úsečky hraje významnou (estetickou) roli v umění, v tomto poměru se často volí poměr šířky a výšky obrazu apod.

Zlatým řezem úsečky se rozumí její rozdělení na dvě nestejně dlouhé úsečky, z nichž délka kratší z nich ku délce delší z nich je ve stejném poměru jako délka delší z nich ku délce celé úsečky.

Mějme tedy úsečku AB délky a a nechť ji bod C dělí v poměru zlatého řezu; platí tedy vztah $-(ABC) = (CAB)$ pro dělicí poměry. Označme $|AC| = x$, $x \in (0; a)$. Podle definice zlatého řezu postupně platí

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \qquad \frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}, \qquad x^2 - 3ax + a^2 = 0.$$

Této rovnici a podmínce $x \in (0; a)$ vyhovuje jediné číslo

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot a \doteq 0{,}381\,97 \cdot a.$$

Tuto délku má jedna část úsečky AB, její druhá část má délku

$$a - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a \doteq 0{,}618\,03 \cdot a.$$

Z uvedených částí je kratší ta první, v našem případě je $|AC| < |BC|$.

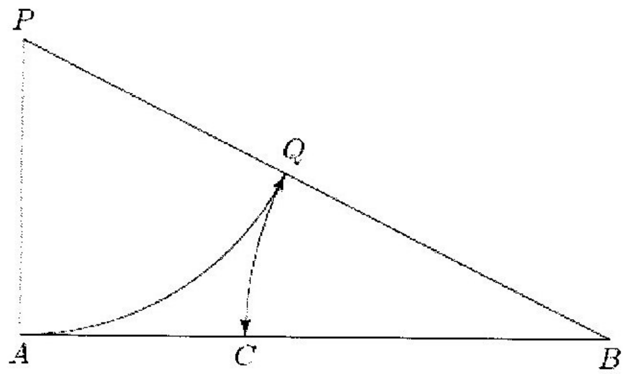
Bod C na úsečce AB získáme provedením algebraické konstrukce výrazu $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} a$. Jedna taková konstrukce je na obr. 183. Tam je $|AB| = 2 \cdot |AP|$, bod Q leží s bodem A na oblouku se středem P a bod C leží s bodem Q na oblouku se středem B. (Správnost konstrukce dokažte sami!)

Jiná konstrukce je na obr. 179, kde je úsečka JS rozdělena bodem N v poměru zlatého řezu.

Číslo

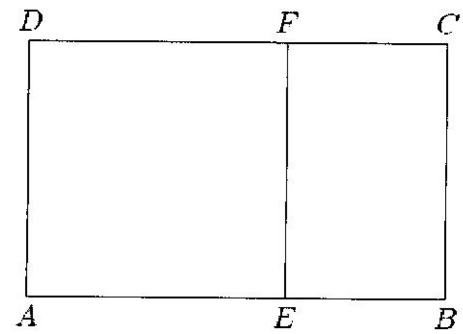
$$\varphi = \frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq 1{,}618\,03$$

se nazývá „zlaté číslo" nebo „zlatý poměr".



Obr. 183

o **Příklad 110.** „Zlatým obdélníkem" nazýváme obdélník, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu, neboli délka ku šířce tohoto obdélníku je „zlaté číslo" φ. Máme-li „zlatý obdélník" $ABCD$, $|AB| > |BC|$, a oddělíme-li od něj čtverec $AEFD$, je zbývající část $EBCF$ také „zlatý obdélník" (obr. 184). Dokažte.



Obr. 184

Řešení. Je $|AB| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$, $|BC| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot a$,

$$|EB| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot a = \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot a,$$

$$\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi,$$ což se mělo dokázat.

o **Příklad 111.** „Zlatý trojúhelník" je rovnoramenný trojúhelník, v němž je poměr délky ramene a základny roven „zlatému číslu" φ. Dokažte, že úhly při základně mají velikosti 72° a úhel při hlavním vrcholu velikost 36°.

Řešení. Toto tvrzení je dokázáno v příkladu 108 (obr. 181), kde je $\frac{u}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$.

o **Příklad 112.** Dokažte, že v pravidelném pětiúhelníku

a) poměr délek úhlopříčky a strany je roven „zlatému číslu" φ,

b) se úhlopříčky protínají v poměru zlatého řezu.

Řešení.

a) Toto je dokázáno v příkladu 111.

b) Toto je dokázáno v textu před příkladem 108 (obr. 178 a obr. 181).

Na závěr uveďme ještě jedno tvrzení, které je známo již od 3. stol.n.l.

o **Příklad 113 (*Pappova věta*).** Jestliže jsou A, C, E tři body na jedné přímce, B, D, F tři body na jiné přímce a jestliže přímky AB, CD, EF protínají po řadě přímky DE, FA, BC v bodech L, M, N, jsou tyto tři body kolineární (obr. 185).

Řešení. Při důkazu se omezíme jen na případ, kdy přímky AB, CD, EF vytvářejí trojúhelník UVW (vyšrafovaný). Aplikujeme-li na pět trojic bodů (D, L, E), (A, M, F), (B, C, N),

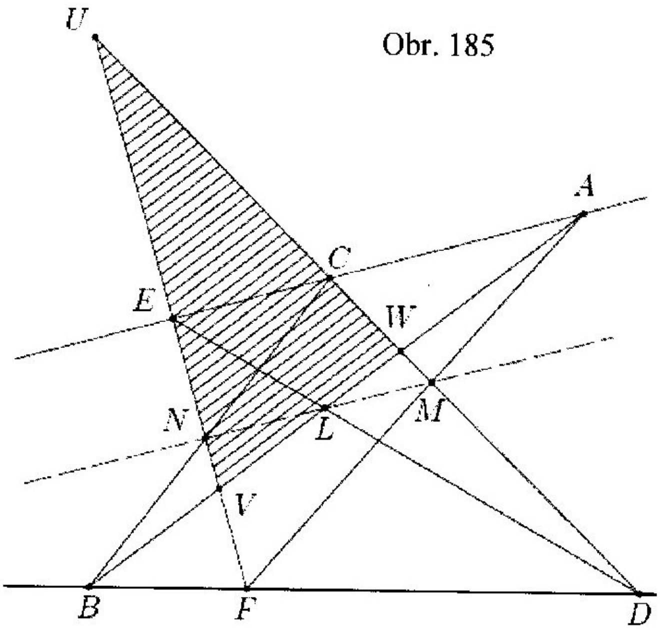
(A, C, E), (B, D, F) Menelaovu větu, dostaneme:

$$(VWL)\cdot(WUD)\cdot(UVE) = 1$$
$$(VWA)\cdot(WUM)\cdot(UVF) = 1$$
$$(VWB)\cdot(WUC)\cdot(UVN) = 1$$
$$(VWA)\cdot(WUC)\cdot(UVE) = 1$$
$$(VWB)\cdot(WUD)\cdot(UVF) = 1$$

Vydělíme-li součin prvních tří rovností součinem dvou zbylých rovností a provedeme krácení, dostaneme

$$(VWL)\cdot(WUM)\cdot(UVN) = 1,$$

což podle Menelaovy věty dokazuje kolinearitu bodů L, M, N.



Obr. 185

---

o **Cvičení 1.** Je-li $(ABC) = \lambda \neq 0$, určete (BAC), (ACB), (CAB), (BCA), (CBA).

o **Cvičení 2.** Rozhodněte, zda pro libovolnou shodnost platí: Jsou-li A', B', C' obrazy kolineárních bodů A, B, C v této shodnosti, platí $(A'B'C') = (ABC)$.

o **Cvičení 3.** Rozhodněte, zda pro libovolnou podobnost platí: Jsou-li A', B', C' obrazy kolineárních bodů A, B, C v této podobnosti, platí $(A'B'C') = (ABC)$.

o **Cvičení 4.** Rozhodněte, zda pro libovolnou shodnost platí: Jsou-li A', B', C', D' obrazy kolineárních bodů A, B, C, D v této shodnosti, platí $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

o **Cvičení 5.** Rozhodněte, zda pro libovolnou podobnost platí: Jsou-li A', B', C', D' obrazy kolineárních bodů A, B, C, D v této podobnosti, platí $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

o **Cvičení 6.** Dokažte, že je-li (A, B, C, D) harmonická čtveřice, jsou harmonické také čtveřice (A, B, D, C), (B, A, C, D), (B, A, D, C), (C, D, A, B), (C, D, B, A), (D, C, A, B), (D, C, B, A).

o **Cvičení 7.** Máme-li lichoběžník $KLMN$ se základnami KL, MN, bod A je průsečík jeho úhlopříček, bod B je průsečík jeho prodloužených ramen a body C, D jsou průsečíky přímky AB se základnami lichoběžníku, dokažte, že $ABCD$ tvoří harmonickou čtveřici.

o **Cvičení 8.** Je dána úsečka AB a uvnitř ní (ne ve středu) bod C. Dokažte, že je správná tato konstrukce čtvrtého harmonického bodu D ve čtveřici (A, B, C, D): Bodem A vedeme libovolnou různoběžku p s přímkou AB; body B, C vedeme vzájemné rovnoběžky, které jsou různoběžné s AB i s p; tyto rovnoběžky protnou přímku p postupně v bodech B', C'; na přímce p sestrojíme bod B'' středově souměrný s bodem B' podle středu C'; bodem C' vedeme rovnoběžku s přímkou $B''B$; průsečík této rovnoběžky s přímkou AB je hledaný bod D. Dále dokažte, že se stejná konstrukce využije při sestrojování bodu C, známe-li polohy bodů A, B, D.

o **Cvičení 9.** Na polopřímce AC sestrojte bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB v poměru zlatého řezu.

o **Cvičení 10.** Dokažte správnost konstrukce bodu C, který dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu: Sestrojíme-li obdélník $ABKL$ tak, aby $|AB| = 3\cdot|AL|$, střed S strany KL, kružnici se středem S a poloměrem $|SK|$, průsečík P (bližší k A) této kružnice se stranou AB, je bod C takový, že platí $|AC| = 3\cdot|AP|$.

o **Cvičení 11.** Je dána úsečka AB s vnitřním bodem C, který ji dělí v poměru zlatého řezu, a je $|AC| < |BC|$. Zobrazíme-li bod C středově souměrně podle bodu B na bod C', pak dělí bod B úsečku AC' v poměru zlatého řezu. Dokažte.

o **Cvičení 12.** Dokažte, že lze „zlatý obdélník" vepsat do čtverce tak, že všechny vrcholy obdélníku dělí strany čtverce ve zlatém poměru.

o **Cvičení 13.** Dokažte, že zlatý obdélník z obr. 184 lze sestrojit tak, že sestrojíme čtverec $AEFD$ a dále oblouk se středem S (ve středu strany AE) a poloměrem $|AF|$. Tento oblouk protne polopřímku AE právě v bodě B.

o **Cvičení 14.** Nechť rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB je zlatý. Sestrojíme osu vnitřního úhlu CAB, která protne rameno BC v bodě E. Dokažte, že trojúhelník ABE je také zlatý.

30. Průměry

Zabývejme se nyní v matematice dosti často používanými pojmy, jako jsou **aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr a kvadratický průměr.**

Ve všech případech uvažujme kladná čísla a, b (z geometrického hlediska to mohou být délky dvou úseček).

Aritmetickým průměrem čísel a, b nazýváme (a označíme $A(a,b)$) číslo

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

Geometrickým průměrem čísel a, b nazýváme (a označíme $G(a,b)$) číslo

$$G(a,b) = \sqrt{ab}.$$

Harmonickým průměrem čísel a, b nazýváme (a označíme $H(a,b)$) číslo

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Kvadratickým průměrem čísel a, b nazýváme (a označíme $Q(a,b)$) číslo

$$Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Pro daná různá čísla a, b jsou hodnoty jednotlivých průměrů různé. Pro jejich hodnoty platí následující věta.

Věta. *Pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí nerovnosti:*

$$Min(a,b) \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le Max(a,b), \text{ tedy}$$

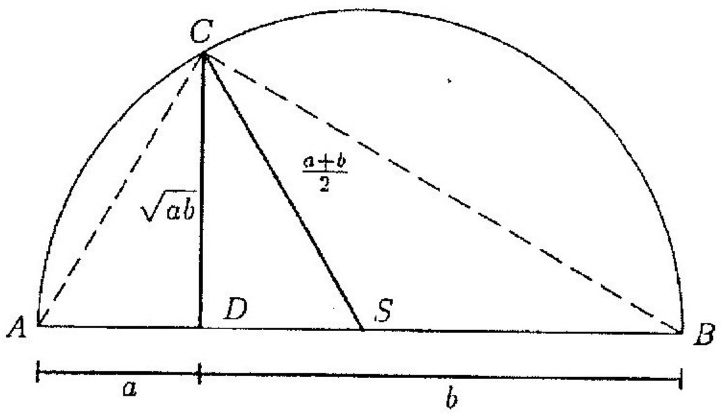
$$Min(a,b) \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le Max(a,b)$$

Rovnosti nastanou, právě když je $a = b$. Dokonce stačí, aby nastala aspoň jedna rovnost, a pak nastanou rovnosti všude a je $a = b$.

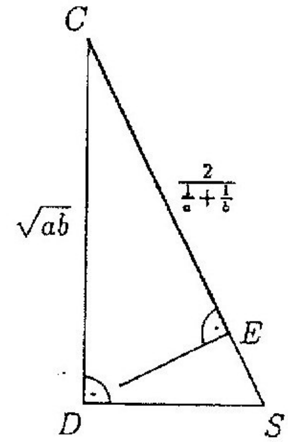
Např. důkaz vztahu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. **AG-nerovnost**) je založen na ekvivalentních úpravách algebraických výrazů (z nichž je také vidět, kdy nastane rovnost):

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \qquad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 \qquad 0 \le (a-b)^2$$

Důkaz dalších jednotlivých nerovností je analogický.



Obr. 186a



Obr. 186b

Geometricky se dají velmi snadno dokázat a také si zapamatovat výše uvedené **nerovnosti mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem** dvou kladných čísel. Sestrojíme úsečku AB délky $a + b$, její střed označíme S a bodem D ji rozdělíme na úsečku délky a a úsečku délky b (obr. 186a). V bodě D vztyčíme kolmici k AB, kterou protneme polokružnicí o středu S a poloměru $\frac{a+b}{2}$, jež leží celá v jedné polorovině ohraničené přímkou AB. Průsečík označíme C a podle Euklidovy věty o výšce je $v^2 = |DC|^2 = ab$, tedy $v = \sqrt{ab}$. Vidíme, že body C, D, S tvoří pravoúhlý trojúhelník, pokud je $a \ne b$. Protože odvěsna je vždy kratší než přepona pravoúhlého trojúhelníku, je zde geometricky dokázána nerovnost $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Na pravé straně této nerovnosti je **aritmetický průměr** hodnot a, b, levá strana je tzv. **geometrický průměr** hodnot a, b. Je-li ovšem $a = b$, splývá bod S s bodem D a je $|CD| = |AD| = |BD|$ a $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} = a$. Můžeme shrnout: pro každá dvě kladná nebo i nezáporná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$$

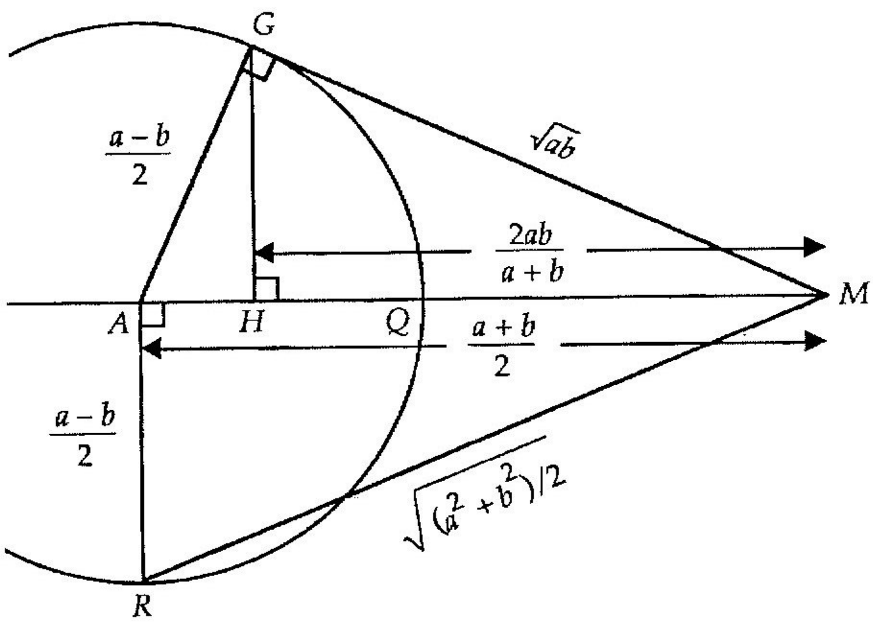
znaménko rovnosti platí jen tehdy, když $a = b$. To je známá nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem dvou nezáporných čísel.

Označme dále E patu kolmice vedené bodem D k přímce CS (obr. 186b). Z Euklidovy věty o odvěsně pro pravoúhlý trojúhelník CDS plyne $|CD|^2 = |CE| \cdot |CS|$, odkud $|CE| = \frac{2ab}{a+b}$, což je tzv. **harmonický průměr** kladných čísel a, b. Je to převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot čísel a, b:

$$\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Opět jsme geometricky ukázali, že harmonický průměr různých kladných čísel a, b je menší než jejich geometrický průměr ($|CE| < |CD|$); pro $a = b$ se harmonický, geometrický a aritmetický průměr čísel a, b sobě rovnají.

Jiné grafické zdůvodnění ostrých (tj. pro $a \neq b$) nerovností mezi všemi čtyřmi zde uvedenými průměry je na obr. 187, kde je $b = |QM|$, $a = |QM| + 2\cdot|AQ|$. Podle tohoto obrázku není obtížné dokázat, že tam uvedené úsečky mají skutečně takové délky.



Obr. 187

S geometrickým průměrem jsme se ale setkali již v kapitole 12. Euklidova věta o výšce $v^2 = c_a c_b$ vlastně říká, že výška v je geometrickým průměrem úseků c_a, c_b na přeponě pravoúhlého trojúhelníku, tj. $v = \sqrt{c_a c_b}$. Analogické tvrzení je obsaženo v Euklidových větách o odvěsně.

V kapitole 24 v obr. 136 pro mocnost bodu A ke kružnici k platí $|AT|^2 = |AC|\cdot|AD|$, neboli $|AT| = \sqrt{|AC|\cdot|AD|}$, což znamená, že délka tečny AT z bodu A ke kružnici k je geometrickým průměrem délek úseků AC, AD.

V kapitole 25 v příkladu 86, který pojednává o zobrazování středu kružnice v kruhové inverzi, jsme se setkali s aritmetickým a harmonickým průměrem.

Nyní uveďme ještě nějaké příklady na využití průměrů v geometrii.

o **Příklad 114.** Určete délku p strany dvou shodných čtverců, které mají stejný součet obsahů jako dva čtverce o délkách stran $a = 10$ cm a $b = 70$ cm.

Řešení. Má platit $2p^2 = a^2 + b^2$, odkud je

$$p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2+70^2}{2}}\ \text{cm} = 50\ \text{cm}.$$

o **Příklad 115.** Ze všech pravoúhelníků o daném obvodu o najděte ten, který má největší možný obsah.

Řešení: Označme a, b délky stran hledaného pravoúhelníku a P jeho obsah. Platí

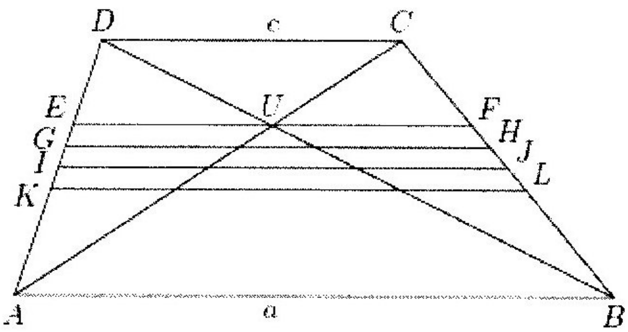
$$\sqrt{P} = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = \frac{o}{4} = \text{konstanta}.$$

Obsah P bude největší, právě když bude $a = b$, tj. když to bude čtverec.

o **Příklad 116.** Je dán lichoběžník $ABCD$ (obr. 188a) se základnami délek $|AB| = a$, $|CD| = c$, $a > c$. Uvažujme příčky IJ, GH, EF, KL s krajními body na ramenech lichoběžníku a rovnoběžné s jeho základnami. Dokažte, že

a) střední příčka IJ lichoběžníku má délku $|IJ| = \frac{a+c}{2}$,

b) příčka GH lichoběžníku, který je touto příčkou rozdělen na dva vzájemně podobné lichoběžníky, má délku $|GH| = \sqrt{ac}$,



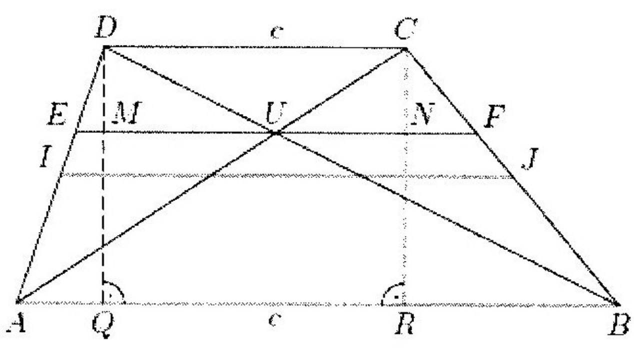
Obr. 188a

c) příčka EF lichoběžníku, která prochází průsečíkem úhlopříček U, má délku $|EF| = \frac{2ac}{a+c}$,

d) příčka KL lichoběžníku, která rozděluje daný lichoběžník na dva lichoběžníky stejného obsahu, má délku $|KL| = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$.

Řešení.

a) Střední příčka lichoběžníku $ABCD$ je složena ze středních příček trojúhelníků AQD a BRC a střední příčky obdélníku $QRCD$ (obr 188b). Proto je $|IJ| = \frac{a-c}{2} + c = \frac{a+c}{2}$. Tento výsledek platí i v případě, kdy bod R nebo bod Q není bodem úsečky AB.



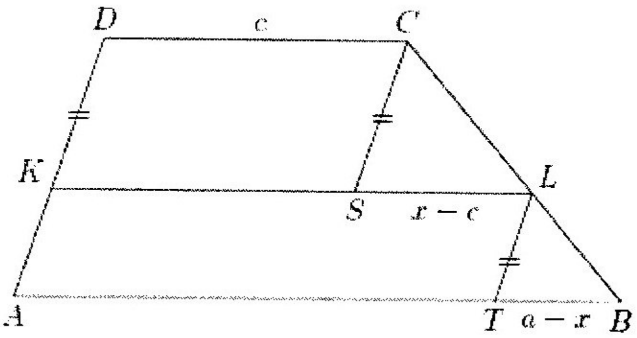
Obr 188b

b) Jsou-li lichoběžníky $ABHG$ a $GHCD$ podobné, platí $\frac{a}{|GH|} = \frac{|GH|}{c}$, odkud je $|GH| = \sqrt{ac}$ (obr. 188a).

c) Je vidět, že $|EU| = |UF|$. Trojúhelníky EUD a ABD jsou podobné; stejně tak trojúhelníky UEA a CDA (obr. 188b). Takže $\frac{|EU|}{a} = \frac{|DM|}{|DQ|}$, $\frac{|EU|}{c} = \frac{|MQ|}{|DQ|}$. Odsud $\frac{|EU|}{a} + \frac{|EU|}{c} = 1$,

$|EU| = \frac{ac}{a+c}$, takže $|EF| = \frac{2ac}{a+c}$.

d) Označme $|KL| = x$ a výšky v_a, v_c lichoběžníků $ABLK$, $KLCB$ (obr. 188c). Pro jejich obsahy platí $\frac{a+x}{2} \cdot v_a = \frac{x+c}{2} \cdot v_c$. Trojúhelníky TBL a SLC jsou podobné, takže platí $\frac{a-x}{v_a} = \frac{x-c}{v_c}$. Vynásobení obou posledních rovností a úpravou dostaneme $|KL| = x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$.



Obr. 188c

Definici uvažovaných průměrů je možné zobecnit pro n, $n \geq 2$, kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

Aritmetickým průměrem čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme (a označíme $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$) číslo

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Geometrickým průměrem čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme (a označíme $G(a_1,a_2,\ldots,a_n)$) číslo

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Harmonickým průměrem čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme (a označíme $H(a_1,a_2,\ldots,a_n)$) číslo

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Kvadratickým průměrem čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme (a označíme $Q(a_1,a_2,\ldots,a_n)$) číslo

$$Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

A platí i obecnější věta:

Věta. *Pro každá kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí nerovnosti:*

$$Min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq$$
$$\leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq Max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Rovnosti nastanou, právě když je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokonce stačí, aby nastala aspoň jedna rovnost, a pak nastanou rovnosti všude a je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

o **Cvičení 1.** Dokažte všechny nerovnosti:

$$Min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq Max(a,b)$$

o **Cvičení 2.** Jestliže v obr. 186a sestrojíme kolmici v bodě S na přímku AB a průsečík této kolmice s obloukem půlkružnice označíme F, je $|DF|$ je kvadratickým průměrem délek a, b. Dokažte.

o **Cvičení 3.** Kosodélník $ABCD$ má rozměry $a = 2$ cm, $b = 8$ cm. Jakou délku strany x má kosočtverec stejného obsahu jako kosodélník, mají-li oba shodné vnitřní úhly?

o **Cvičení 4.** Dokažte, že poměr délky osy pravého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku ABC a harmonického průměru délek jeho odvěsen se pro všechny pravoúhlé trojúhelníky rovná $\sqrt{2}$?

o **Cvičení 5.** Dvě kružnice poloměrů r_1, r_2 mají vnější dotyk v bodě T a společnou vnější tečnu T_1T_2. Označme Q střed úsečky T_1T_2 a P patu kolmice z bodu T na přímku T_1T_2. Vypočtěte délky $|QT|$, $|PT|$.

o **Cvičení 6.** Uvnitř úsečky AB leží bod M tak, že $|AM| = a$, $|BM| = b$. Nad průměry AB, AM, BM jsou sestrojeny půlkružnice, které leží v téže polorovině s hranicí AB. Jaký průměr má kruh, který má stejný obsah, jako je obsah oblasti omezené těmi třemi půlkružnicemi?

o **Cvičení 7.** Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice se středem O. Bodem O je k přímce OC vedena kolmice, která protne stranu AC v bodě U a stranu BC v bodě V. Dokažte, že je $|OU| = \sqrt{|AU| \cdot |BV|}$.

o **Cvičení 8.** Určete délku p strany čtverce, jehož úhlopříčka je shodná s úhlopříčkou obdélníku se stranami délek a, b.

Výsledky cvičení

1. Geometrická zobrazení

1. a) Zobrazení není prosté, definičním oborem je množina všech bodů roviny, obor hodnot obsahuje jeden prvek (bod A).
   b) Zobrazení není prosté, definičním oborem je množina všech bodů roviny, oborem hodnot je množina všech bodů přímky p.
2. a) 27 (variace třetí třídy ze tří prvků s opakováním).
   b) Nevzniknou. Obě složená zobrazení jsou prostá.

2. Posunutí, otočení

1. Středová souměrnost podle středu čtverce $ABCD$.
2. Posunutí zobrazující bod S na bod U, kde T je střed úsečky SU.
3. Posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$.

3. Osová souměrnost, posunutá osová souměrnost

1. Zobrazte libovolný bod oběma postupy.
2. Při tomto zobrazení splyne bod B' s bodem C.
3. V obou případech jsou obrazy šestiúhelníku totožné; jedná se o otočení kolem bodu A o úhel 60°.
4. V obou případech jsou obrazy šestiúhelníku totožné; jedná se o posunutí o vektor $\overrightarrow{AC}$.

4. Shodná zobrazení

1. Osa souměrnosti posunuté osové souměrnosti je shodná s přímkou p a vektor posunutí je libovolný vektor rovnoběžný s přímkou p.
2. Kružnice se středem B a poloměrem $|BA|$.
3. Čtyři otočení (včetně identity), čtyři osové souměrnosti.
4. Osové souměrnosti, posunutí, otočení, posunuté osové souměrnosti.
5. Identita.
6. Všechny útvary v rovině se rozdělí do tzv. ekvivalentních tříd a každé dva útvary náležející do stejné třídy jsou shodné.

5. Shodnost trojúhelníků

1. Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují v obou odvěsnách, nebo v jedné odvěsně a přeponě, nebo v odvěsně a přilehlém ostrém úhlu, nebo v odvěsně a protilehlém úhlu, nebo v přeponě a v jednom ostrém úhlu.
2. Pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délek 1 a $\sqrt{3}$ a rovnoramenný trojúhelník o základně délky $\sqrt{3}$ a ramenech délky 1.
3. Nechť je např. $|\sphericalangle BAC| \geq |\sphericalangle ABC|$. Označte K, L paty kolmic vedených bodem S ke stranám AC, AB. Ze shodnosti trojúhelníků CKS, DLS vyplývají rovnosti $|AC| = |AK| + |KC| = |AL| + |LD| = |AD| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$. Proto je $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$.
4. Otočte trojúhelník DBC kolem bodu C o úhel 60°.
5. Věta (*usu*): $|AB| = |BC|$, $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BCA| = 45°$, $|\sphericalangle CBQ| = |\sphericalangle PAB|$ (ostré úhly s rameny kolmými).
6. Ekvivalentně platí $|a - b| < c < a + b$, $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$, $-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$,

$\left|c^2-a^2-b^2\right|<2ab$.

7. Označte A_0, B_0, C_0 středy stran BC, AC, AB a T těžiště. Pro trojúhelníky A_0B_0T, B_0C_0T, C_0A_0T platí nerovnosti $\frac{1}{3}\cdot t_a+\frac{1}{3}\cdot t_b>\frac{1}{2}\cdot c$, $\frac{1}{3}\cdot t_b+\frac{1}{3}\cdot t_c>\frac{1}{2}\cdot a$, $\frac{1}{3}\cdot t_c+\frac{1}{3}\cdot t_a>\frac{1}{2}\cdot b$, které sečtěte.

6. Využití shodností v konstrukčních úlohách

1. a) Osová souměrnost s osou v odrazné stěně.
   b) Dvě osové souměrnosti s osami v odrazných stěnách.
   c) Dvě osové souměrnosti s osami v odrazných stěnách.
   d) Tři osové souměrnosti s osami v odrazných stěnách.
2. Posuňte přímku a, aby procházela bodem M (resp. N), a přímku b, aby procházela bodem N (resp. M). Dostanete přímky a', b'. Úsečku MN posuňte o vektor $\overrightarrow{S'S}$, kde S' je průsečík přímek a', b' a S je průsečík přímek a, b.
3. Označme S střed kosočtverce. Zobrazte bod B na bod B' podle osy úhlu BSC a sestrojte nejprve trojúhelník ABB'.
4. Zobrazte přímku t středově souměrně se středem M, bod P je průsečíkem kružnice a zobrazené přímky.
5. Kružnici k_1 posuňte rovnoběžně s přímkou p na kružnici k_1' tak, aby střed kružnice k_1' ležel na kolmici k přímce p vedené ze středu kružnice k_2. Průsečíky kružnic k_1', k_2 určují přímku q.
6. Paty kolmic z bodu M na příslušné strany trojúhelníku označte M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} a posuňte přímku AB do bodu M. Vznikne rovnostranný trojúhelník $A'B'C$, jehož výškou je úsečka délky $|MM_{CA}|+|MM_{BC}|$. Pak posuňte přímku $B'C$ do bodu M.
7. a) Posuňte úhlopříčku BD o vektor $\overrightarrow{DC}$ na úsečku EC a sestrojte nejprve trojúhelník ACE.
   b) Posuňte stranu AD o vektor $\overrightarrow{DC}$ na úsečku EC a sestrojte nejprve trojúhelník EBC.
8. a) Na polopřímce BC sestrojte bod D tak, že $|BD|=a+b$ a sestrojte trojúhelník ABD. Průsečík osy úsečky AD a úsečky BD je bod C.
   b) Sestrojte trojúhelník DEC, kde $|DE|=a+b+e$, $|\sphericalangle EDC|=\frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle DEC|=\frac{\beta}{2}$. Bod A je průsečíkem osy úsečky DC a přímky DE. Analogicky se sestrojí bod B.
9. Strany obdélníku jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce. Bod M musí být různý od středu strany AB.
10. Sestrojte body $R[-8;0]$, $S[8;0]$. Bod Q_1 je průsečíkem osy úsečky RA s osou x; analogicky se sestrojí bod Q_2.
11. Středovou souměrností se středem S zobrazte bod A na bod A'. Jedna strana čtverce leží na přímce BA'.
12. Otočte kružnici k_2 o úhel $\pm 60°$ na kružnice k_2', k_2''. Průsečíkem kružnic k_1, k_2', resp. k_1, k_2'', je bod B_1, resp. B_2.

7. Skládání shodných zobrazení

1. V prvém případě jde o osovou souměrnost s osou BT, ve druhém případě o osovou souměrnost s osou CT.
2. Otočení kolem těžiště trojúhelníku o úhel 120°.
3. Posunutá osová souměrnost s osou BE a vektorem $\overrightarrow{ES}$.
5. Otočení nebo posunutí (v obou případech včetně identity).
6. a) i b) Při lichém počtu osových souměrností je výsledkem nepřímá shodnost, při sudém

počtu přímá shodnost.
7. Přímá shodnost.

8. Stejnolehlost

1. Každý bod takové přímky leží podle definice stejnolehlosti opět na této přímce.
2. Přímky procházející středem stejnolehlosti (pokud to není identita).
3. Obraz přímky AB je rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem K.
4. Dvě stejnolehlosti s koeficienty $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. Posunutí o dvojnásobnou vzdálenost středů středových souměrností.
6. Není. Vytvořte si protipříklad.
7. (obr. 52a): Zobrazte bod S_1 na S_1''. Platí $\overrightarrow{S_2S_1''} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$. Hledaný vektor posunutí je $\overrightarrow{S_1S_1''} = \overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2S_1''} = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$.
8. (obr. 52b): Zobrazte bod S_1 na S_1''. Platí $\overrightarrow{S_2S_1''} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$, $\overrightarrow{SS_1''} = \lambda_1\lambda_2 \cdot \overrightarrow{SS_1}$. Potom platí $\overrightarrow{S_1S} = \overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2S_1''} + \overrightarrow{S_1''S} = \overrightarrow{S_1S_2} - \lambda_2 \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + \lambda_1\lambda_2 \cdot \overrightarrow{S_1S}$, $(1 - \lambda_1\lambda_2) \cdot \overrightarrow{S_1S} = (1 - \lambda_2) \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$, $\overrightarrow{S_1S} = \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1\lambda_2} \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$.

9. Podobná zobrazení

1. Takové podobnosti jsou dvě, střed čtverce se zobrazí buď do bodu B, nebo do bodu D.
2. Jen když je trojúhelník rovnostranný.
3. Např. lze jeden čtverec otočit tak, aby strany obou čtverců byly rovnoběžné. Pak lze použít stejnolehlost.
4. V poměru k^2.
5. Koeficientem podobnosti je číslo $\sqrt{2}$ a platí $|BE| = \sqrt{2} \cdot |AE|$, $|DE| = \sqrt{2} \cdot |BE|$, $|CE| = \sqrt{2} \cdot |SE|$.
6. Při hledání zobrazení se postupuje jako v příkladu 28.
7. Výsledné zobrazení je stejnolehlost s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem S, který leží na polopřímce AB za bodem B a platí $|AB| = |BS|$. Bod S je onen jediný samodružný bod.
8. Nejprve trojúhelník ACD zobrazíme osově souměrně podle osy úhlu BAC a tento obraz převedeme stejnolehlostí se středem v bodě A na trojúhelník ABC. Samodružný je bod A.

10. Podobnost trojúhelníků

1. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, právě když se shodují v úhlu proti základně, nebo v úhlu při základně, nebo v poměru délek ramena a základny.
2. Je $|BL| : |BA| = |BK| : |BC| = 1 : \sqrt{3}$, $|\sphericalangle LBK| = |\sphericalangle ABC|$.
3. Právě když je trojúhelník ABC buď pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, nebo rovnoramenný se základnou AB a K je pata výšky.
4. Je $|UV| = |MN| - 2 \cdot |MV| = \frac{a+c}{2} - 2 \cdot \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$.
5. Všechny čtyři uvažované trojúhelníky s obsahy P, P_1, P_2, P_3 jsou vzájemně podobné. Strana AB je rovnoběžkami se stranami AC, BC rozdělena na tři části délek p, q, r. Využijete-li

výsledku cvičení 4 předchozí kapitoly, platí rovnosti $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{p}{p+q+r}$, $\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{q}{p+q+r}$, $\frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{r}{p+q+r}$. Tyto tři rovnosti sečtěte.

6. Nechť P je střed AB, Q střed BC, R střed CD, S střed DA, U střed AC, V střed BD. Čtyřúhelník $VQUS$ je rovnoběžník, neboť VQ je střední příčka v trojúhelníku BCD a US je střední příčka v trojúhelníku ACD; úhlopříčky rovnoběžníku $VQUS$ se protínají v bodě X. Stejná úvaha platí pro rovnoběžník $PVRU$.
7. Podle obr. 56 jsou trojúhelníky AVB_1 a BVA_1 podobné, proto platí $\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|B_1V|}{|A_1V|}$, odkud $|AV| \cdot |A_1V| = |BV| \cdot |B_1V|$. Podobně se dokáže $|AV| \cdot |A_1V| = |CV| \cdot |C_1V|$.

11. Využití podobností v konstrukčních úlohách

1. Sestrojte nejprve libovolný trojúhelník $A'B'C'$ s úhly α, β, který je podobný s trojúhelníkem ABC.
2. Využijte stejnolehlosti se středem A a s koeficienty 3 a –3.
3. Jednu z přímek p_1, p_2, p_3 posuňte tak, aby protnula v různých bodech dvě ze stran daného trojúhelníku, a do těchto dvou bodů posuňte zbylé dvě přímky, aby všechny tři omezovaly trojúhelník. Pak použijte stejnolehlost se středem v jednom vrcholu daného trojúhelníku.
4. Střed stejnolehlosti (průsečík přímek AM, BN) spojte se středem úsečky BM.
5. Otočte kružnici k_1 kolem bodu A o 90°, resp. o –90°, a tento obraz zobrazte ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Průsečík takto zobrazené kružnice k_1 a kružnice k_2 je bod D.
6. Postup jako v příkladu 40 opakujte dvakrát.

12. Euklidovy věty. Pythagorova věta

1. Přepište výrazy do tvaru $\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 1}$, $\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$, $\sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5}$ a použijte Euklidovu větu (o výšce nebo o odvěsně). Výrazy přepište také do tvaru $\sqrt{7} = \sqrt{4^2 - 3^2}$, $\sqrt{10} = \sqrt{1^2 + 3^2}$, $\sqrt{15} = \sqrt{4^2 - 1^2}$ a použijte Pythagorovu větu.
2. Ověřte platnost rovnosti $c^2 = a^2 + b^2$.
3. Součtem a rozdílem prvních dvou rovností získáme $\sqrt{2}u = \sqrt{c+a}$, $\sqrt{2}v = \sqrt{c-a}$.
4. Vrchol rovnostranného trojúhelníku dělí stranu čtverce na délky y a $a - y$. Dvěma způsoby pak vyjádřete pomocí Pythagorovy věty délku x rovnostranného trojúhelníku. Je $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)a$, $x = 2a\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)a$.
5. Střed základny AB označte S. Dvěma způsoby vyjádřete obsah trojúhelníku ABC: $\frac{|AB| \cdot v_c}{2} = \frac{|AC| \cdot v_a}{2}$. Použijte Pythagorovu větu pro trojúhelník ASC: $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + v_c^2 = |AC|^2$. Je $|AB| = \frac{2v_a v_c}{\sqrt{4v_c^2 - v_a^2}}$.
6. Použijte Euklidovy věty pro trojúhelník SMT_1. Vzdálenost tětivy od bodu S je $\frac{r^2}{d}$. Pak

je $|T_1T_2| = \frac{2r}{d} \cdot \sqrt{d^2 - r^2}$.

7. a) Pravý úhel je při vrcholu C. Označte A_0 střed strany BC a B_0 střed strany AC. Pro trojúhelníky BB_0C a AA_0C platí $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, $t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Odtud je $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{13}$.

   b) Pravý úhel je při vrcholu A. Analogicky je $a = 20$, $b = 8\sqrt{5}$, $c = 4\sqrt{5}$.

   c) Pravý úhel je při vrcholu B. Úloha nemá řešení.

8. Pro obsah trojúhelníku platí $\frac{ab}{2} = \frac{cv_c}{2}$. Odsud je $a^2b^2 = c^2v_c^2 = \left(a^2 + b^2\right)v_c^2$. Odsud vydělením výrazem $a^2b^2v_c^2$ již plyne dokazovaný vztah.

9. Nechť např. úhel při vrcholu C je větší nebo roven 60°. Označte D patu kolmice na stranu AB z vrcholu C. Platí $v_c^2 = |CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}b^2$ a též platí $v_c^2 = |BC|^2 - |BD|^2 = a^2 - \left(c - \frac{b}{2}\right)^2$. Porovnáním obou výrazů získáte dokazovaný vztah. Rychlejší důkaz je možné provést pomocí kosinové věty (viz kapitola 17).

13. Konstrukční úlohy řešené pomocí výpočtu

1. Sestrojte postupně úsečky délek:

   a) $u = \frac{a \cdot c}{d}$, $v = \sqrt{a \cdot b}$, $w = \sqrt{d \cdot e}$, $x = \frac{u \cdot v}{w}$

   b) $u = \sqrt{b^2 + c^2}$, $v = \sqrt{a^2 - d^2}$, $x = \sqrt{u^2 + v^2}$

   c) nejprve rozložte výraz $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$, pak konstruujte $u = \sqrt{a \cdot b}$, $v = \sqrt{a^2 + b^2}$, $w = \sqrt{v^2 - u^2}$, $y = \frac{a + b}{a - b}$, $x = \sqrt{y \cdot w}$

   d) $u = \sqrt{6 \cdot 1}$, $v = \frac{a \cdot u}{1}$, $w = c \cdot \sqrt{2}$, $y = \sqrt{b \cdot w}$, $x = v + y$

2. Platí $m^2 = \frac{a + c}{2} \cdot v$, kde v je výška lichoběžníku. Odsud $v = \frac{2m \cdot m}{a + c}$, neboli $\frac{v}{m} = \frac{2m}{a + c}$.

3. Platí $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (o - c)^2 = o^2 - 2oc + c^2$ a $a^2 + b^2 = c^2$, odkud $2ab = o^2 - 2oc$. Dále pro obsah trojúhelníku platí $2v_c c = 2ab = o^2 - 2oc$, odkud $c = \frac{o^2}{2v_c + 2o}$, což sestrojte stejnolehlostí.

4. Postupně platí $c^2 = (c - m)^2 + (c - n)^2$, $c^2 - 2(m + n)c + m^2 + n^2 = 0$, $c_{12} = m + n \pm \sqrt{2mn}$. Vyhovuje pouze $c = m + n + \sqrt{2mn}$, neboť $c < a + b = (c - m) + (c - n)$, odkud $c > m + n$. Sestrojte c, pak a, b.

5. Označte D patu výšky z bodu C. Předpokládejte $|AD| \geq |BD|$. Rovnoběžka s přímkou CD protne stranu AB v bodě P, stranu AC v bodě Q. Trojúhelníky APQ, ADC jsou podobné, proto $|AP| = k \cdot |AD|$, $|PQ| = k \cdot |CD|$. Má platit $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(k \cdot |AD|\right) \cdot \left(k \cdot |CD|\right) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$, odkud

$2k^2|AD|=|AB|$, $k=\sqrt{\dfrac{|AB|}{2\cdot|AD|}}$ Takže je $|AP|=\sqrt{\dfrac{|AB|}{2\cdot|AD|}}\cdot|AD|=\sqrt{\dfrac{|AB|\cdot|AD|}{2}}$.

14. Věta Menelaova a věta Cèvova

1. Menelaova věta pro trojúhelník ABC a přímku KL, $|AM|:|AC|=3:2$.
2. Nejprve Menelaova věta pro trojúhelník ABL a přímku KC, odkud $|AT|:|LT|=4:1$. Potom Menelaova věta pro trojúhelník ALC a přímku BN, odkud $|AN|:|CN|=3:1$, takže $|AN|:|AC|=3:4$.
3. Užijte Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímky C_2A_1, A_2B_1 a B_2C_1, dále dvakrát Cèvovu větu pro trojúhelník ABC a přímky AA_1, BB_1, CC_1. Těchto pět rovností spolu vynásobte a obdržíte Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímku $A_2B_2C_2$.
4. Označte středy stran AB, BC, CA jako body C_0, A_0, B_0 a sestavte Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímku DE, což je zároveň díky podobnosti trojúhelníků Menelaova věta pro trojúhelník $A_0B_0C_0$ a přímku PQR.

15. Těžnice, osy stran, osy úhlů a výšky v trojúhelníku

1. Prochází-li Eulerova přímka vrcholem A, splývá buď s vrcholem A průsečík výšek V a trojúhelník je pravoúhlý, nebo je Eulerova přímka AV výškou i těžnicí a trojúhelník je rovnoramenný.
2. Označme P, Q paty kolmic vedených body B, C k přímce AM a K její průsečík s přímkou BC. Pak je K středem úsečky BC právě tehdy, když je $|BP|=|CQ|$, a to je právě tehdy, když obsahy trojúhelníků BKM a CKM jsou stejné, což je právě tehdy, když obsahy trojúhelníků ABM a ACM jsou stejné.
3. Rovnají-li se obsahy trojúhelníků ABM a ACM a současně obsahy trojúhelníků BCM a BAM, rovnají se obsahy trojúhelníků CBM a CAM.
4. Neleží. Např. v pravoúhlém trojúhelníku s jedním vnitřním úhlem 30°.
5. Trojúhelníky KMT a ACV jsou vzájemně podobné s koeficientem podobnosti $\dfrac{1}{2}$ (obr. 87).

16. Goniometrické funkce

1. 3,11; 11,59.
2. 6,07; 10,86.
3. $a^2-b^2=\left[v_c^2+(a\cos\beta)^2\right]-\left[v_c^2+(b\cos\alpha)^2\right]=(a\cos\beta+b\cos\alpha)(a\cos\beta-b\cos\alpha)=$ $=c\cdot(a\cos\beta-b\cos\alpha)$.

17. Věta sinová a kosinová

1. $P=\sqrt{\dfrac{3a}{2}\cdot\left(\dfrac{3a}{2}-a\right)^3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$.
2. Od Heronova vzorce lze dosazením za s dojít ke vztahu $4a^2b^2=16P^2+\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$ (viz odvozování Heronova vzorce), kam dosaďte $P=\dfrac{ab}{2}$.
3. Užijte kosinovou větu pro strany BC a AC v trojúhelnících ADC, BDC.
4. a) Platí $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$, analogicky platí rovnosti pro b, c. Všechny rovnosti sečtěte.

   b) Sestrojte výšku BB_1. V trojúhelníku BCB_0 platí $\operatorname{cotg}\gamma=\dfrac{b-\cos\alpha}{c\sin\alpha}$.

5. Platí $P=\frac{1}{2}\cdot bc\sin\alpha$, $b+c=28$, $b<28$, $c<28$. Odsud je $b\doteq 15{,}4$, $c\doteq 12{,}6$. Z kosinové věty je $a\doteq 14{,}2$. Dále z kosinové věty je $\beta\doteq 69{,}9°$, takže $\gamma\doteq 50{,}1°$.
6. Důkaz pro ostroúhlý trojúhelník: Paty výšek z vrcholů A, B, C označte postupně L, M, K. Platí $\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}\cdot\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}\cdot\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}=1$.
7. Nechť úsečky AL, BM, CK představují osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Použijte Cèvovu větu na trojúhelník ABC a osy úhlů a přidejte sinovou větu:

$$\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=\frac{|CK|\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}}{|CK|\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}}\cdot\frac{|AL|\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}}{|AL|\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}}\cdot\frac{|BM|\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\gamma}}{|BM|\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}}=1$$

8. Nechť v trojúhelníku ABC je CC_0 těžnice a CC_1 výška. Trojúhelníky C_0CC_1, BCC_1 jsou shodné. Přímka CC_0 je osou úhlu ACC_1, proto je $|AC|:|CC_1|=|AC_0|:|C_0C_1|=2:1$, odkud $|\sphericalangle ACC_1|=60°$.
9. Je $\frac{c_1}{c_2}=\frac{b}{a}$, $c_1+c_2=c$, odkud $c_1=\frac{bc}{a+b}$, $c_2=\frac{ac}{a+b}$.
10. Pro délku těžnice platí: $a^2\cdot\frac{c}{2}+b^2\cdot\frac{c}{2}=c\left[t_c^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$, odkud $t_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$.

Pro délku osy úhlu s užitím výsledku cvičení 9 platí:

$$a^2\cdot\frac{bc}{a+b}+b^2\cdot\frac{ac}{a+b}=c\left[u^2+\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{ac}{a+b}\right],\ u=\frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}}{a+b}=\frac{2\cdot\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}.$$

18. Kružnice

1. Bod X leží na přeponě AB, neboť $|\sphericalangle AXC|+|\sphericalangle BXC|=90°+90°$.
2. Platí. Bod X leží na přímce AB.
3. a) Kružnice s průměrem SM.
   b) Kružnice s průměrem SM bez bodu M.
   c) Oblouk kružnice s průměrem SM ležící uvnitř kružnice k.
4. Nad průměrem SC sestrojte Thaletovu kružnici; její průsečík(y) s tětivou AB tvoří střed tětivy MN.
5. Nad průměrem PQ sestrojte Thaletovu kružnici; její průsečík(y) s kružnicí k je (jsou) vrcholem C.
6. Dvě kružnice s poloměrem $\frac{|SA|}{2}$ dotýkající se přímky AB v bodě S.

19. Věta o obvodovém a středovém úhlu

1. Musí být $|\sphericalangle AXB|=|\sphericalangle BXC|=|\sphericalangle CXA|=120°$. K tomu ale musí být všechny vnitřní trojúhelníku ABC menší než $120°$.
2. Označte K patu kolmice ze středu S kružnice k na přímku AB. Ramena úhlů DAB a ASK jsou na sebe kolmá, proto se úsekový úhel rovná polovině středového úhlu ASB.

3. Ke straně AB sestrojte oblouk s obvodovým úhlem 60°, ke straně BC oblouk s obvodovým úhlem 45°.
4. a) Sestrojte nejprve trojúhelník ABD, kde D je pata výšky z vrcholu A.
   b) Sestrojte nejprve trojúhelník BCD, kde D je pata výšky z vrcholu C, pak oblouk nad stranou BC s obvodovým úhlem α.
   c) Sestrojte nejprve trojúhelník BCD, kde D je pata výšky z vrcholu B.
   d) Ke straně AB sestrojte oblouk s obvodovým úhlem γ a rovnoběžku se stranou AB ve vzdálenosti v_c.
   e) Sestrojte trojúhelník ASE, kde S je střed strany BC, E je pata výšky na stranu BC. Dále sestrojte trojúhelník ABD, kde $|AD| = 2t_a$, $|\sphericalangle ABD| = 180° - \alpha$, bod B leží na přímce SE. Bod C je středově souměrný s bodem B podle bodu S.
   f) Označme D, E paty výšek z vrcholů A, C. Sestrojte nejprve trojúhelník ADC; bod E leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC.
5. 30°, 45°, 105°.
6. Postupně se rovnají velikosti úhlů $AC'A'$, ABA', $BA'B'$, BCB', $CB'C'$, $CA'C'$.
7. 60°, 45°, 75°.

20. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

1. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \dfrac{s(s-a)}{bc}$, $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}$.
2. Paty kolmic z bodu R na strany trojúhelníku leží na Simsonově přímce. Tyto paty se stejnolehlostí se středem R a koeficientem 2 zobrazí na body R_1, R_2, R_3.
3. Je dán trojúhelník ABC a trojúhelník $A_0B_0C_0$, jehož vrcholy jsou středy stran trojúhelníku ABC. Oba trojúhelníky mají stejnou Eulerovu přímku, neboť mají totožná těžiště $T = T_0$ a průsečík výšek V_0 je totožný se středem kružnice opsané S. Z polohy bodů na Eulerově přímce a z faktu, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC je dvojnásobný než poloměr kružnice opsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$, plyne, že se kružnice dotýkají v průsečíku výšek V, což je vrchol s pravým úhlem.
4. Bod V' je průsečíkem kružnice opsané trojúhelníku a přímky CV, přímka AB je osou úsečky VV'.
5. a) Body C jsou průnikem kružnice opsané trojúhelníku a oblouku s obvodovým úhlem γ s tětivou AB. Tímto průnikem může být celý oblouk nad stranou AB, pak má úloha nekonečně mnoho řešení, nebo je průnikem prázdná množina a úloha nemá řešení. Je to dáno tím, že prvky c, γ, r jsou vzájemné závislé vztahem $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$.
   b) Sestrojte nejprve trojúhelník BCD, kde D je pata výšky z bodu B, pak sestrojte střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a tečnu k této kružnici z bodu B.
   c) Sestrojte nejprve trojúhelník ABO, kde O je střed kružnice vepsané; tento trojúhelník má úhly $\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\beta}{2}$ a výšku ρ.
   d) Sestrojte nejprve trojúhelník ABD, kde D je pata výšky z bodu A.
   e) Sestrojte nejprve trojúhelník ADC, kde D je pata výšky z bodu A.
   f) Sestrojte nejprve trojúhelník BCO, kde O je střed kružnice vepsané a platí $|\sphericalangle BOC| = 180° - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.
6. Viz cvičení 5f. Středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABX leží na obloucích kružnice sestrojených nad stranou AB s obvodovými úhly o velikostech $90° + \dfrac{|\sphericalangle AXB|}{2}$ (zvlášť pro

menší a větší oblouk kružnice).

7. Sestrojte střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC ležící na Eulerově přímce, přímku AB kolmou na úsečku VC_1, střed strany AB, vrchol C.
8. Sestrojte osy vnějších úhlů při vrcholech B, C trojúhelníku ABC.
9. Platí $|XU| = |AU| - |AX| = |AW| - |AZ| = |ZW|$.

   Předpokládejme, že $|BY| \le |YC|$ (případ $|BY| > |YC|$ se dokazuje stejně). Pak postupně je $|XB| + |BU| = |ZC| + |CW|$, $|BY| + |BV| = |CY| + |CV|$, $|BY| + |BY| + |YV| = |CV| + |VY| + |CV|$, $|BY| = |CV|$.

   Také je $|YV| = |BC| - 2 \cdot |BY| = a - 2 \cdot (s - b) = b - c = |AC| - |AB|$.

   Dále je $|BC| = |BY| + |YV| + |VC| = |BY| + |YV| + |BY| = |BY| + |BV| = |XB| + |BU| = |XU|$.

   Je-li O střed kružnice vepsané a O_a střed kružnice vně připsané, jsou trojúhelníky AXO, AUO_a podobné, takže $\rho_a = \rho \cdot \dfrac{|AX| + |XU|}{|AX|} = \rho \cdot \dfrac{(s-a)+a}{s-a} = \rho \cdot \dfrac{s}{s-a} = \dfrac{(s-b)(s-c)}{\rho}$.
10. Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ABO_a, ACO_a a rozdílu obsahu trojúhelníku BCO_a, proto je $P = \rho_a(s - a)$.

    Platí (viz cvičení 9) $\rho_a = \rho \cdot \dfrac{s}{s-a} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \cdot \dfrac{s}{s-a} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.
11. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je podle označení v příkladu 62 průměr kružnice vepsané roven $2 \cdot (s - c)$ a průměr kružnice opsané roven c. Součet těchto hodnot je $2s - c = a + b$.
12. Úhel UCV je pravý, přímka UV tedy prochází středem kružnice k. Podle příkladu 60 protíná osa vnitřního úhlu oblouk AB v jeho středu. Přímka UV je tudíž osou strany AB.
13. Dle kapitoly 17 je $\dfrac{1}{v_a} + \dfrac{1}{v_b} + \dfrac{1}{v_c} = \dfrac{a+b+c}{2 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}} = \dfrac{1}{\rho}$.

21. Délka oblouku kružnice, obsah výseče a úseče

1. $P = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 + 3 \cdot \left(\dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot |AB|^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 \right) = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot |AB|^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB|^2 = 18\left(\pi - \sqrt{3}\right) \text{cm}^2$.
2. Označte postupně K, L, M, N průsečík oblouků se středy C, D, průsečík oblouků se středy A, D, průsečík oblouků se středy A, B, průsečík oblouků se středy C, B. Trojúhelník ABM je rovnostranný. Obsah oblasti ABM se dvěma hraničními oblouky je $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 10^2 \text{ cm}^2$.

   Obsah „čočky“ s vrcholy B, D je $\left(\dfrac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 10^2 \text{ cm}^2$. Obsah oblasti ABK se dvěma hraničními oblouky je $\dfrac{25\left(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi\right)}{3} \text{cm}^2$. Obsah oblasti KBL je $\dfrac{25\left(6\sqrt{3} - 12 + \pi\right)}{3} \text{cm}^2$, obsah „čtverce“ $KLMN$ je $\dfrac{25\left(4\pi + 12 - 12\sqrt{3}\right)}{3} \text{cm}^2$.
3. $P = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{ab}{2} = \dfrac{ab}{2}$.
4. $\Delta r = \dfrac{l + 1\,\text{m}}{2\pi} - \dfrac{l}{2\pi} = \dfrac{1\,\text{m}}{2\pi} \doteq 15{,}9 \text{ cm}$. Změna nezávisí na poloměru původní kružnice.

22. Vzájemná poloha dvou kružnic, stejnolehlost kružnic

1. Kružnice odpovídající kružnici k ve stejnolehlosti se středem ve středu úsečky AB a koeficientem $\frac{1}{3}$, bez jejích průsečíků s přímkou AB.
2. Je $r_1 + r_2 = \sqrt{a^2+b^2}$, $r_2 + r_3 = a$, $r_3 + r_1 = b$, odkud $r_1 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+b-a}{2}$, $r_2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a-b}{2}$, $r_3 = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.
3. Úloha je vyřešena dále v příkladu 91.
4. Thaletova kružnice nad průměrem AB vyjma bodů A, B.

23. Feuerbachova a Apolloniova kružnice

1. Je-li trojúhelník rovnostranný.
2. Procházejí průsečíkem výšek trojúhelníku, neboť tento se zobrazí podle stran trojúhelníku na kružnici trojúhelníku opsanou.
3. Veďte rovnoběžky body A, B a na rovnoběžce procházející bodem B sestrojte body B_1, B_2, aby $|BB_1| = |BB_2| = 1$. Přímka EB_1 protne rovnoběžku procházející bodem A v bodě K, přímky AB, KB_2 se protnou v bodě F. Úsečka EF je průměrem Apolloniovy kružnice.
4. Apollonoivy kružnice s koeficienty k a $\frac{1}{k}$ jsou osově souměrně sdružené podle osy úsečky AB.
5. a) Sestrojte Apolloniovu kružnici určenou body A, B a koeficientem $b : a$.
   b) Sestrojte Apolloniovu kružnici určenou bodem B, středem úsečky AB a koeficientem $4 : 3$.
   c) Těžiště trojúhelníku leží na Apolloniově kružnici určené body A, C a koeficientem $\frac{2}{3}\cdot t_a : \frac{2}{3}\cdot t_c = t_a : t_c = 2$.
6. Osa obou tětiv prochází středem S kružnice k, proto společný bod obou tětiv leží na Apolloniově kružnici určené body A, B a koeficientem $|SA| : |SB|$.
7. Hledaný bod je průsečíkem kružnic sestrojených nad průměry, jejichž koncové body tvoří vždy vnitřní a vnější střed stejnolehlosti libovolné dvojice daných kružnic.
8. Jelikož přímky CE, CF jsou osy úhlů přímek AC, BC, leží bod C na Apolloniově kružnici sestrojené nad průměrem EF a určené body A, B, odkud plyne dokazovaná rovnost.

24. Mocnost bodu ke kružnici

1. Bod X leží též na kružnici se středem S_2 a poloměrem $r = 12$.
2. Jestliže body C, D, C', D' neleží v přímce, leží některé tři z nich na kružnici; řekněme C, D, C'. Přímka AC' protne tuto kružnici v dalším bodě D'' (v případě tečny D'' splyne s C'). Z mocnosti bodu A k této kružnici plyne $|AC|\cdot|AD| = |AC'|\cdot|AD''|$. Z této a dané rovnosti plyne $|AD'| = |AD''|$, z čehož $D' = D''$, tedy bod D' leží také na uvažované kružnici.
3. Důkaz stejný jako ve cvičení 2.
4. Označte $|AX| = x$. Platí $x\cdot 2x = |AS|^2 - r^2$, odkud vyjádřete x a sestrojte kružnici se středem A a poloměrem x.
5. Označte $u^2 = bc$. Sestrojte u jako délku tečny ze společného bodu úseček délek b, c ke kružnici o průměru $|b - c|$. Stejně vyjádřete $x^2 = (a - u)(a + u)$.
6. Bod X leží též na chordále kružnic k_1, k_2.

7. Středy kružnic jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku s výškou velikosti 4 na základnu. Je-li délka tečného úseku z potenčního bodu ke kružnicím x, platí $(4-x)^2 = x^2 + 2^2$, odkud $x = \frac{3}{2}$.

25. Kruhová inverze

3. Zvolte za střed kruhové inverze např. bod T_{12}. V této kruhové inverzi se kružnice k_1, k_2 zobrazí na dvě rovnoběžky k_1', k_2' a kružnice k_3, k_4 se zobrazí na kružnice k_3', k_4', které leží v pásu ohraničeném přímkami k_1', k_2' a přitom se k_4' dotýká k_1' a k_3' se dotýká k_2' a k_4' se dotýká k_3'. Ze stejnolehlosti kružnic k_3', k_4' vyplývá, že body dotyku dvojic útvarů k_1', k_4' a k_2', k_3' a k_3', k_4' leží v přímce, která se v kruhové inverzi zobrazí na kružnici, která prochází též bodem T_{12}.
4. Označme S střed a r poloměr kružnice k a dále XY tětivu kružnice l tak, aby přímka XY procházela bodem S. Kružnice l je samodružná, právě když $|SX|\cdot|SY| = r^2$, což je zároveň mocnost bodu S ke kružnici l, a to platí, právě když je přímka SA (resp. SB) tečnou ke kružnici l.
5. Dále uvedený postup lze použít i pro $\varphi = 0$. Platí $|XY|^2 = |SX|^2 + |SY|^2 - 2\cdot|SX|\cdot|SY|\cdot\cos\varphi$. Stejně vyjádřete $|X'Y'|^2$ a z jedné rovnosti dosaďte $\cos\varphi$ do druhé rovnosti a uvědomte si, že $|SX|\cdot|S'X'| = |SY|\cdot|S'Y'| = |\lambda|$.

26. Apolloniovy úlohy

1. Sestrojte kružnici, která prochází středy kružnic k_1, k_2 a která se dotýká přímky s' rovnoběžné s přímkou s; vzdálenost přímek s, s' je rovna poloměru kružnice k_1.
2. Středy kružnic k_1, k_2 označte S_1, S_2, body dotyku hledaných kružnic s kružnicí k_3 označte K, L a dále označte bod X na polopřímce KL a bod Y na polopřímce LK tak, aby $|KX| = r_1$, $|LY| = r_1$, kde r_1 je poloměr kružnice k_1. Sestrojte kružnice procházející body S_1, S_2, X a S_1, S_2, Y.
3. Označme S střed kružnic k_1, k_2 a r_1, r_2, $r_1 < r_2$, jejich poloměry. Středy hledaných kružnic leží jednak na kružnici se středem S a poloměrem $\frac{r_1 + r_2}{2}$ a na kružnici se středem B a poloměrem $\frac{r_2 - r_1}{2}$, jednak na kružnici se středem S a poloměrem $\frac{r_2 - r_1}{2}$ a na kružnici se středem B a poloměrem $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Bod B je vnitřním bodem mezikruží.
4. Nechť se např. přímka p dotýká kružnice k_1 v bodě T. Za střed kruhové inverze volte bod T a kružnici samodruhých bodů nejlépe tak, aby kružnice k_2 zůstala samodružná. Obrazy kružnice k_1 a přímky p jsou rovnoběžky k_1', p'. Sestrojte jednak kružnice dotýkající se přímek k_1', p' a kružnice k_2 (pokud existují), jednak rovnoběžky s přímkou p dotýkající se kružnice k_2. Tyto sestrojené kružnice a rovnoběžky s p zobrazte ve zvolené kruhové inverzi.
5. Nechť bod T leží na kružnici k_1. V bodě T sestrojte tečnu p ke k_1, čímž úloha přejde na úlohu ze cvičení 4.
6. Sestrojte soustředné kružnice s kružnicemi k_1, k_2 a poloměry jednak menšími, jednak většími o hodnotu r, než mají kružnice k_1, k_2.
7. Sestrojte polopřímku VA' osově souměrnou podle přímky VB. Nyní jde o úlohu bod-přímka-přímka (bod Q, přímky VA, VA').
8. Úloha přímka-přímka-kružnice. Úloha má 4 řešení.
9. Středovou souměrností se středem M zobrazte přímky p, q na přímky p', q'. Nyní jde

o úlohu bod-přímka-přímka (bod M, přímky p, q', resp. q, p').

10. Bod S dotyku kružnic k_1, k_2 je středem stejnolehlosti těchto kružnic, proto $|AS| = 2\cdot|SB|$; S leží na úsečce AB.

27. Čtyřúhelníky

1. Sestrojte nejprve trojúhelník ABD, jemu opište kružnici.
2. a) Sestrojte nejprve trojúhelník ABC a pak využijte rovnosti $a + c = b + d$.
   b) Sestrojte postupně úhel α, kružnici vepsanou, stranu AB, úhel γ.
3. Bod E je otočený bod C na stranu AB kolem bodu A. V trojúhelníku EBC známe $|\sphericalangle EBC| = 180° - \alpha$, $|EB| = a - e$, $|\sphericalangle BEC| = 90° + \frac{\alpha}{4}$.
4. Bod E je kolmý průmět bodu C na přímku AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník AEC, kde $|AE| = \frac{a+c}{2}$.
5. Bod E je souměrně sdružený k bodu B podle přímky AC. Sestrojte nejprve trojúhelník DCE, jehož strany mají délku b, c, $d - a$.
6. Součet protilehlých úhlů vzniklého čtyřúhelníku je roven $\left(180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \left(180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}\right) = 180°$.
7. Viz předchozí cvičení 6.
8. V tečnovém čtyřúhelníku je $a + c = b + d$. Tedy $ac = bd$ právě tehdy, když $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Dál viz řešený příklad 101.
   Jiné řešení: Tedy $ac = bd$, právě když $a = b$, $c = d$, nebo $a = d$, $b = c$. V tom případě je čtyřúhelník deltoid, nebo kosočtverec, nebo čtverec.
9. Označte M střed úhlopříčky BD. Užijte kosinové věty na trojúhelníky ABM, BCM, CDM, DAM a předpokladu tvrzení. Dostanete
   $$0 = \left(|AM| - |CM|\right)^2 + 2\cdot|AM|\cdot|CM|\cdot\left[1 + \cos(\sphericalangle AMC)\right].$$
   Proto leží body A, M, C na přímce a úhlopříčky se půlí; jde o rovnoběžník.
10. Označte $|AC| = e$, $|BD| = f$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| = \varphi$, $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB| = \psi$. Pak je $e\cos\varphi + f\cos\psi = a + c$. Použijte kosinové věty pro trojúhelníky ABC, BCD, CDA, DAB: $b^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos\varphi$, $d^2 = a^2 + f^2 - 2af\cos\psi$, $d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos\varphi$, $b^2 = c^2 + f^2 - 2cf\cos\psi$; tyto čtyři rovnosti sečtěte.
11. Je-li M průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$, platí pro jeho obsah:
    $$P = \frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot|BM|\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot|BM|\cdot|CM|\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot|CM|\cdot|DM|\cdot\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot|DM|\cdot|AM|\cdot\sin\varphi$$
    $$P = \frac{1}{2}\cdot\left(|AM| + |CM|\right)\cdot\left(|BM| + |DM|\right)\cdot\sin\varphi$$
12. Jsou-li ve čtyřúhelníku $ABCD$ délky $|AC| = e$, $|BD| = f$, platí trojúhelníkové nerovnosti $a + b > e$, $c + d > e$, $b + c > f$, $a + d > f$. Sečtením všech čtyř nerovností dostaneme první z dokazovaných nerovností.
    Je-li S průsečík úhlopříček a označíte-li $|AS| = e_1$, $|CS| = e_2$, $|BS| = f_1$, $|DS| = f_2$, platí trojúhelníkové nerovnosti $e_1 + f_1 > a$, $e_2 + f_1 > b$, $e_2 + f_2 > c$, $e_1 + f_2 > d$. Sečtením všech čtyř nerovností dostaneme druhou z dokazovaných nerovností.
13. Obsahy trojúhelníků ABD, ABC jsou stejné. Od těchto obsahů se odečte obsah trojúhelníku ABM.
14. Je-li S střed ciferníku, vyjádřete obsahy čtyřúhelníků $1S3$, $3S8$, $8S9$, $9S1$ a sečtěte je. Do-

stanete $P=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 150°+\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$.

28. Pravidelné mnohoúhelníky

1. $l=2n\rho\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$, $P=n\rho^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$.
2. n (rozlište n sudé, liché).
3. Uvažujte jednak, že rovnoramenný trojúhelník ABK má hlavní vrchol A, pak úhel při vrcholu C má velikost 36°, jednak, že rovnoramenný trojúhelník ABK má hlavní vrchol B, pak úhel při vrcholu C má velikost $\frac{180°}{7}$.
4. Platí $b=2r\sin\frac{\pi}{2n}$, $a=2r\sin\frac{\pi}{n}=2r\cdot 2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}$, $r\cos\frac{\pi}{2n}=\sqrt{r^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Dosazením z první a třetí rovnosti do druhé rovnosti dostaneme $a^2r^2=b^2\left(4r^2-b^2\right)$.
5. Dokazovanou rovnost můžeme přepsat na tvar $|A_1A_3|\cdot|A_2A_4|=|A_1A_2|\cdot|A_3A_4|+|A_2A_3|\cdot|A_1A_4|$, což je Ptolemaiova věta pro čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$.
6. $P=\frac{a_1\rho}{2}+\frac{a_2\rho}{2}+\ldots+\frac{a_n\rho}{2}=\rho s$, kde $s=\frac{1}{2}\cdot\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$.
7. Ve společném vrcholu platí $2\cdot\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)+2\cdot\left(\pi-\frac{2\pi}{m}\right)=2\pi$, odkud $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Tato rovnice dává řešení $n_1=4$, $m_1=4$, nebo $n_2=3$, $m_2=6$ (ve druhém případě existují dvě možná pokrytí roviny).
8. Součet je roven $n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=360°$.
9. Je $\frac{\rho}{r}=\frac{r\cos\frac{\pi}{n}}{r}=\cos\frac{\pi}{n}$. Pro $n=3$ je $r=2\rho$.

29. Dělicí poměr

1. Předpoklad je $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{BC}$.

   Z předpokladu plyne $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{\lambda}\cdot\overrightarrow{AC}$, proto je $(BAC)=\frac{1}{\lambda}$.

   Pomocí předpokladu dostaneme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\lambda\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{CB}$, proto je $(ACB)=1-\lambda$, $(CAB)=\frac{1}{1-\lambda}$.

   Podobně je $(BCA)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $(CBA)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$.
2. Platí.
3. Platí.
4. Platí.
5. Platí.
6. Je-li $(ABCD)=-1$, tj. $(ABC)=\lambda$ a $(ABD)=-\lambda$, je $(ABDC)=\frac{(ABD)}{(ABC)}=\frac{-\lambda}{\lambda}=-1$.

   Podle cvičení 1 je $(BAC)=\frac{1}{\lambda}$, $(BAD)=-\frac{1}{\lambda}$, proto je $(BACD)=-1$.

Analogicky se postupuje pro ostatní čtveřice.

7. Trojúhelníky KLA, MNA jsou podobné, stejně tak trojúhelníky KLB, NMB. Proto je $(ABCD)=\dfrac{(ABC)}{(ABD)}=\dfrac{|AC|}{|BC|}\cdot\left(-\dfrac{|BD|}{|AD|}\right)=-\dfrac{|AC|}{|AD|}\cdot\dfrac{|BD|}{|BC|}=-\dfrac{|KL|}{|MN|}\cdot\dfrac{|MN|}{|KL|}=-1$.

8. Trojúhelníky ACC', ABB' jsou podobné, stejně tak jsou podobné trojúhelníky ABB'', ADC'. Takže je $(ABCD)=\dfrac{(ABC)}{(ABD)}=-\dfrac{|AC|}{|BC|}\cdot\dfrac{|BD|}{|AD|}=-\dfrac{|AC'|}{|B'C'|}\cdot\dfrac{|B''C'|}{|AC'|}=-1$.

9. Je-li úsečka AC kratší částí úsečky AB a platí-li $|AC|=x$, $|AB|=a$, použijeme ke konstrukci vztahu $\dfrac{a}{x}=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$. Je-li úsečka AC delší částí úsečky AB a platí-li $|AC|=a-x$, $|AB|=a$, použijeme ke konstrukci vztahu $\dfrac{a}{a-x}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$.

10. Je-li T střed úsečky AB, $|AB|=a$, je $|AP|=\dfrac{|AB|}{2}-|PT|=\dfrac{a}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{3}\right)^2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\cdot a$.

11. Je-li $|AB|=a$, je $|BC'|=|BC|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a$.

12. Strana obdélníku je přeponou a úseky na stranách čtverce jsou odvěsnami rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, takže mají-li strany obdélníku délky $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot a$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a$, mají úseky na stranách čtverce délky $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot a$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a$.

13. Je $|AE|=|EF|=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot a$, $|SB|=|SF|=\sqrt{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\cdot a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5}\cdot a$.

14. Řešení je patrné z obr. 178.

30. Průměry

1. Dokážeme nerovnost $Min(a,b)\le\dfrac{2ab}{a+b}$. Předpokládejme, že $a\le b$. Pak $Min(a,b)=a$ a z nerovnosti $a\le b$ postupně plyne $a+b\le 2b$, $1\le\dfrac{2b}{a+b}$, $a\le\dfrac{2ab}{a+b}$.

   Ostatní nerovnosti dokážete podobně jako tuto, případně jako tu v textu.

2. $|DF|=\sqrt{|DS|^2+|SF|^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Obsah kosodélníku je $ab\sin\alpha$, obsah kosočtverce je $x^2\sin\alpha$, odkud $x=\sqrt{ab}=4$ cm.

4. Osu pravého úhlu označme CD. Vyznačte čtverec s úhlopříčkou CD. Má-li čtverec délku strany x, platí $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{b-x}{x}$, odkud $x=\dfrac{ab}{a+b}$, $|CD|=\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

5. Při $r_1=r_2$ je $|QT|=|PT|=r_1$. Dále nechť např. $r_1>r_2$. Označme S_1, S_2 středy kružnic. Platí $|QT|=\dfrac{|T_1T_2|}{2}=\dfrac{\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}}{2}=\sqrt{r_1r_2}$. Dále $\dfrac{|PT|}{|QT|}=\dfrac{|T_1T_2|}{|S_1S_2|}$, odkud $|PT|=\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$.

6. Je-li d průměr kruhu, je $\frac{\pi(a+b)^2}{2}-\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\pi b^2}{2}=\pi d^2$, odkud $d=\sqrt{ab}$.
7. Trojúhelníky AUO a OVB jsou podobné podle věty (*uu*), proto je $|AU|:|OU|=|OV|:|BV|$.
8. Má platit $p\sqrt{2}=\sqrt{a^2+b^2}$, odkud je $p=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Použitá a doporučená literatura

Bartsch, H.J.: *Matematické vzorce*. Mladá fronta, Praha, 2002.

Boček, L., *Základy planimetrie*.SPN, Praha, 1985.

Boček, L., Zhouf, J.: *Máte rádi kružnice?* Prometheus, Praha, 1995.

Calda, E., *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 2. díl*. Prometheus, Praha, 1997.

Horák, S.: *Kružnice*. 16. sv. ŠMM, Mladá fronta, Praha, 1966.

Kadleček, J.: *Geometrie v rovině a prostoru pro střední školy*. Prometheus, Praha, 1996.

Konforovič, A.G.: *Významné matematické úlohy*. SPN, Praha, 1989.

Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha, 1989.

Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii*. MÚ AV ČR, Praha, 1996.

Kuřina, F.: *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.

Molnár, J.: *Planimetrie*. UP, Olomouc, 2001.

Novotná, J. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky (nejen) pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Scientia, Praha, 2000.

Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha, 1991.

Polák, J.: *Středoškolská matematika v úlohách II*. Prometheus, Praha, 1999.

Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*. Prometheus, Praha, 1993.

Šedivý, J.: *O podobnosti v geometrii*. 7. svazek ŠMM, Mladá fronta, Praha, 1967.

Šedivý, J.: *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*. 46. svazek ŠMM, Mladá fronta, Praha, 1980.

Šofr, B.: *Euklidovské geometrické konštrukcie*. ALFA, Bratislava, 1976.

Švrček, J., Vanžura, J.: *Geometrie trojúhelníka*. Polytechnická knižnice, SNTL, Praha, 1988.

Švrček, J.: *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Karolinum, Praha, 2004.

Vejsada, F., Talafous, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia*. SPN, Praha, 1969.

Autoři: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Lektorovali: doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
RNDr. Marie Kynterová
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

Vydává: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Rok vydání: 2009

Formát: A4

Počet stran: 148

Sazba: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Ilustrace: Vít Novák
RNDr. Miloslav Závodný

1. vydání

Publikace neprošla jazykovou úpravou ve vydavatelství.

ISBN 978-80-7290-404-4