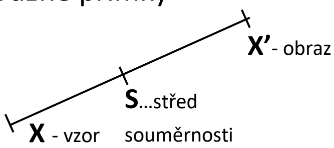
Shodná zobrazení

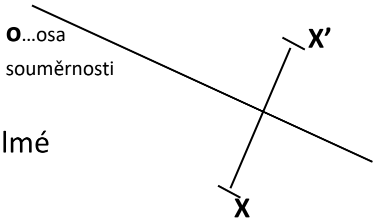
Středová souměrnost – $\boldsymbol{S(s)}$: $\boldsymbol{X \to X'}$

- Je to shodné zobrazení, které přiřazuje:
  1. Každému bodu X ≠ S bod X’ tak, že bod S je středem úsečky XX’,
  2. Bodu S bod S’ = S, bod S je tedy samodružný bod (tj. bod, pro nějž platí: X’ = X)
- jde o přímou shodnost
- je jednoznačně určená středem souměrnosti S nebo dvojicí vzoru a obrazu
- přímky procházející středem souměrnosti jsou samodružné přímky



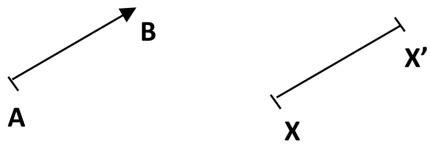
Osová souměrnost - $\boldsymbol{O(o)}$: $\boldsymbol{X \to X'}$

- Je to shodné zobrazení, které přiřazuje
  1. každému bodu X ∉ o bod X’ tak, že přímka XX’ je kolmá k ose souměrnosti o a střed úsečky XX’ leží na o,
  2. každému bodu X ∈ o bod X’ = X, body ležící na ose souměrnosti o jsou tedy samodružné body
- jde o nepřímou shodnost
- je jednoznačně určena osou souměrnosti o nebo dvojicí vzoru a obrazu
- samodružnými přímkami je osa o a všechny přímky na ni kolmé



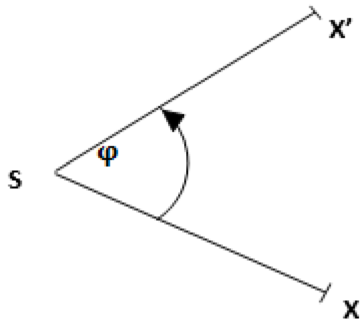
Posunutí (translace) - $\boldsymbol{T_{\overrightarrow{AB}}}$: $\boldsymbol{X \to X'}$

- Je to shodné zobrazení, které každému bodu X přiřazuje bod X’ tak, že orientované úsečky XX’ a AB mají stejnou délku a směr
- jde o přímou shodnost
- je jednoznačně určeno velikostí a směrem posunutí nebo dvojicí vzoru a obrazu
- samodružnými přímkami jsou všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí



Otáčení (rotace) - $\boldsymbol{R(S, \varphi)}$: $\boldsymbol{X \to X'}$

- je to shodné zobrazení, které přiřazuje:
  1. každému bodu X ≠ S bod X’ tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XS X’ má velikost φ,
  2. bodu S bod S’ = S, střed otáčení S je tedy samodružný bod
- je jednoznačně určeno středem S a úhlem otáčení φ
- jde o přímou shodnost
- otáčení nemá samodružné přímky

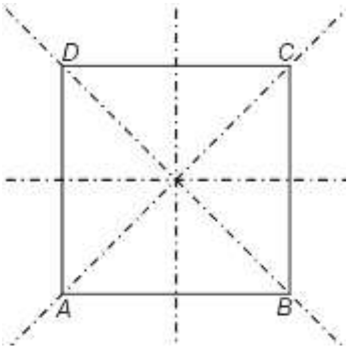


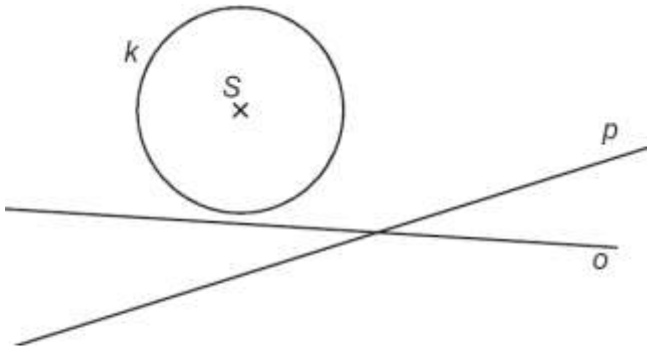
Osová souměrnost

Je dána přímka o. **Osová souměrnost s osou o** je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

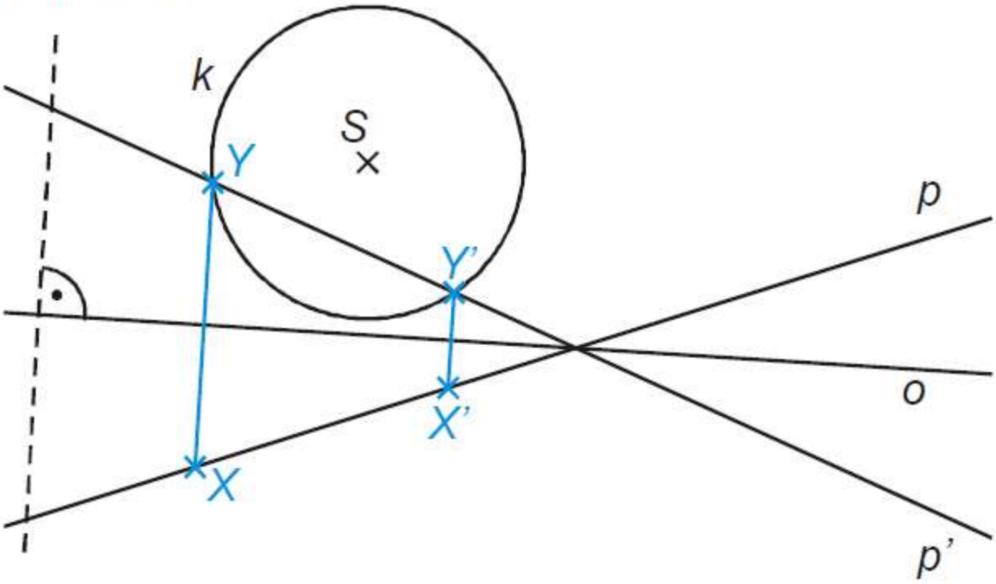
Příklad 1: Jaké jsou osy souměrnosti čtverce?





Příklad 2: Jsou dány dvě různoběžné přímky o, p a kružnice k(S,r). Sestrojte úsečku XY tak, aby byla kolmá k přímce o, bod X ležel na přímce p, bod Y ležel na kružnici k a střed úsečky ležel na přímce o.

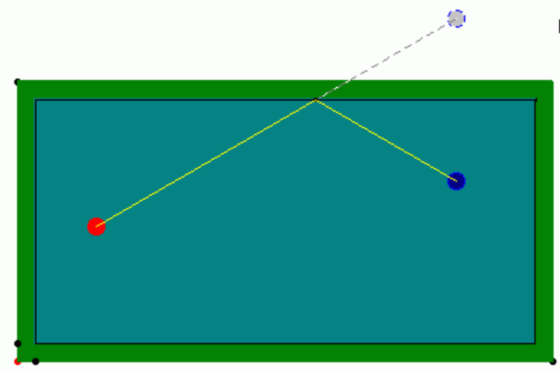
Konstrukce:

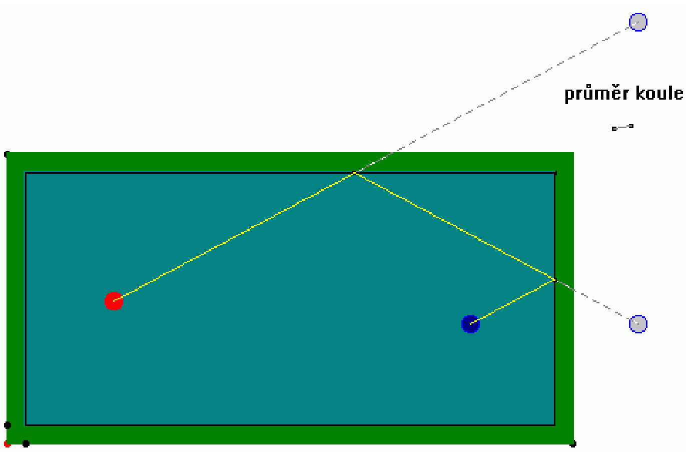


Zápis konstrukce:

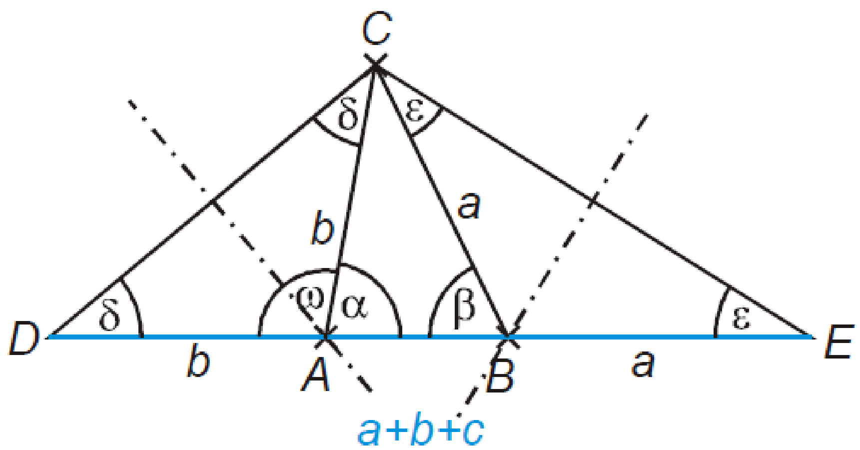
1. p, o, k
2. $p'; O(o): p \to p'$
3. $Y; Y \in p' \cap k$
4. $X; O(o): Y \to X$
5. XY

Příklad 3: Kulečník – úhel dopadu = úhlu odrazu





Příklad 4: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: o=10 cm, α =70°, β=60°.
Řešení:

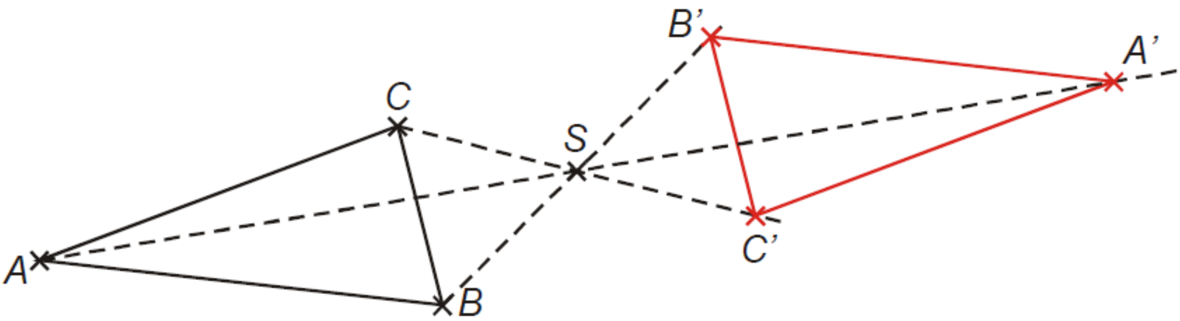


Zápis konstrukce:

1. $DE; |DE| = c = 10\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle EDX; |\sphericalangle EDX| = 35°$
3. $\sphericalangle DEY; |\sphericalangle DEY| = 30°$
4. $C; C \in \mapsto DX \cap \mapsto EY$
5. o_1; osa úsečky DC
6. o_2; osa úsečky EC
7. $A; A \in o_1 \cap DE$
8. $B; B \in o_2 \cap DE$
9. ΔABC

<u>Středová souměrnost</u>

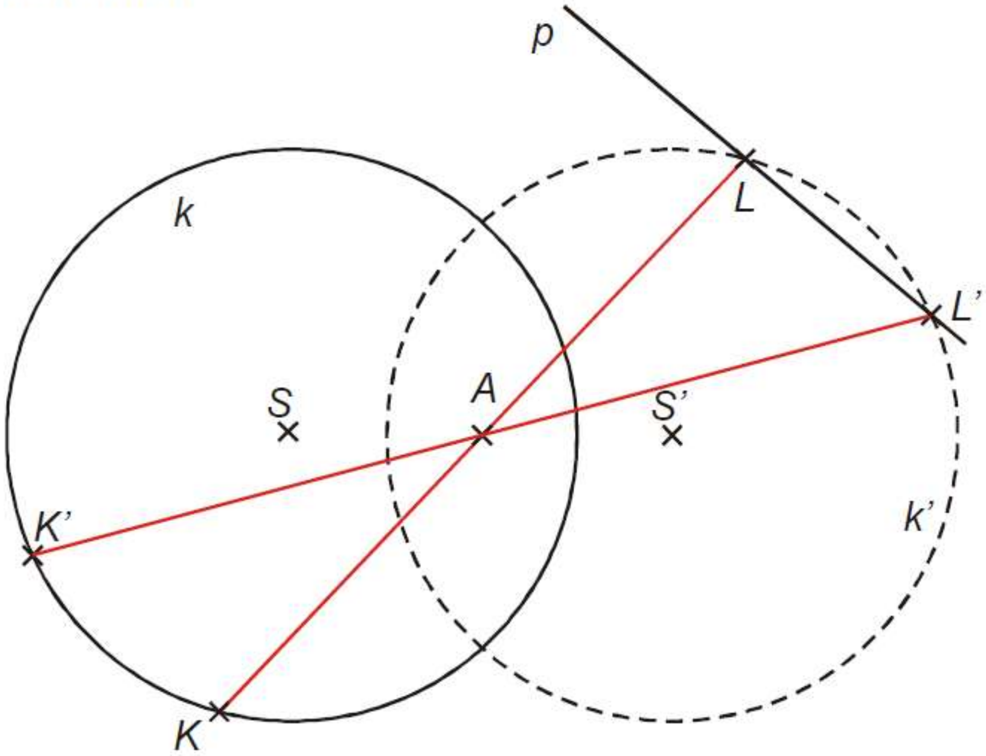
Jsou dány dva různé body X, S. Středová souměrnost $S(S)$ je shodné zobrazení, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'.
2. bodu S bod $S' = S$.



Středová souměrnost je přímá shodnost.

Př. 1: Je dána kružnice $k(S; 3\,\text{cm})$, bod A; $|SA| = 2\,\text{cm}$ a přímka p; $|Ap| = 4\,\text{cm}$, která nemá s kružnicí k žádný společný bod. Najdi všechny úsečky KL; $K \in k$, $L \in p$ takové, aby bod A byl jejich středem.

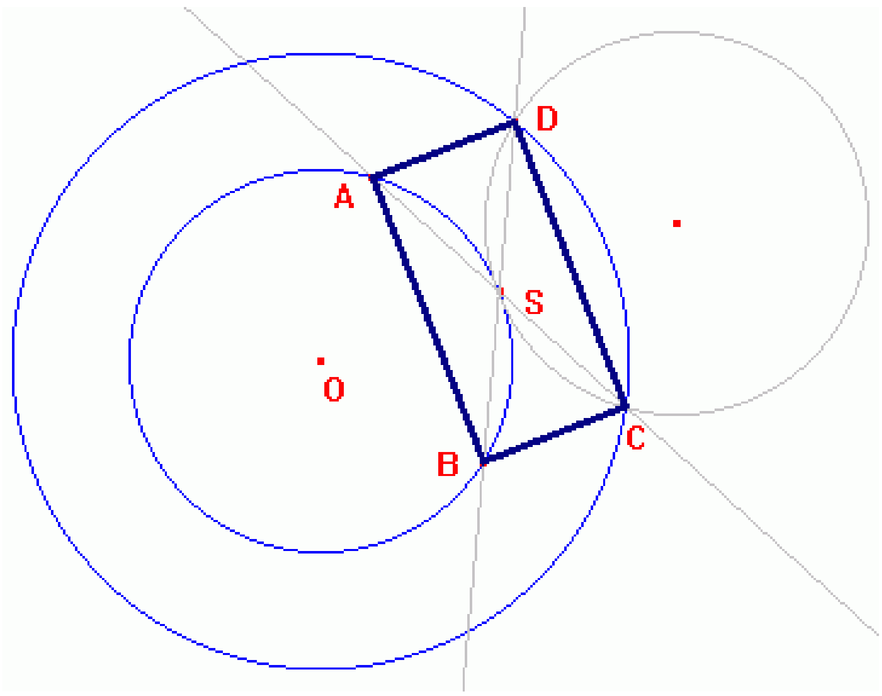
Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $k; k(S, r = 3\,\text{cm})$
2. $A; |SA| = 2\,\text{cm}$
3. $p; |pA| = 4\,\text{cm}$
4. $k'; S(A) > k \rightarrow k'$
5. $L, L'; L \cup L' \in k' \cap p$
6. $K; K \in k \cap \leftrightarrow LA$
7. $K'; K' \in k \cap \leftrightarrow L'A$
8. $K'L'; KL$

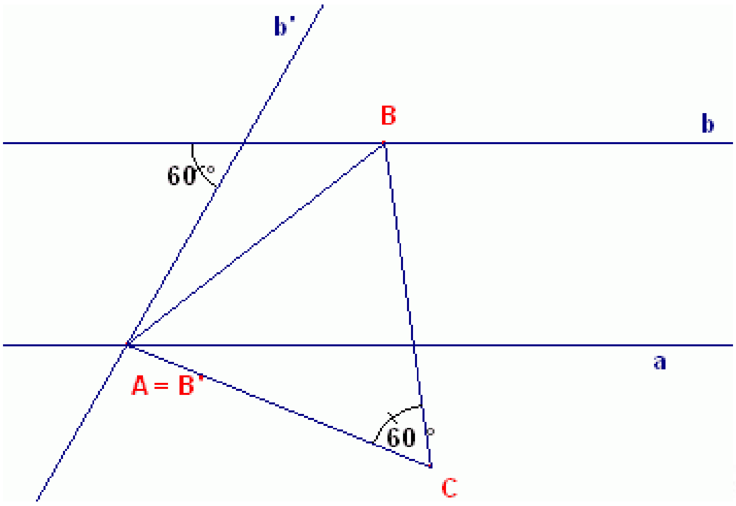
Příklad 2: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O, r_1)$ a $k_2(O, r_2)$, $r_1 > r_2$ a bod S leží na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

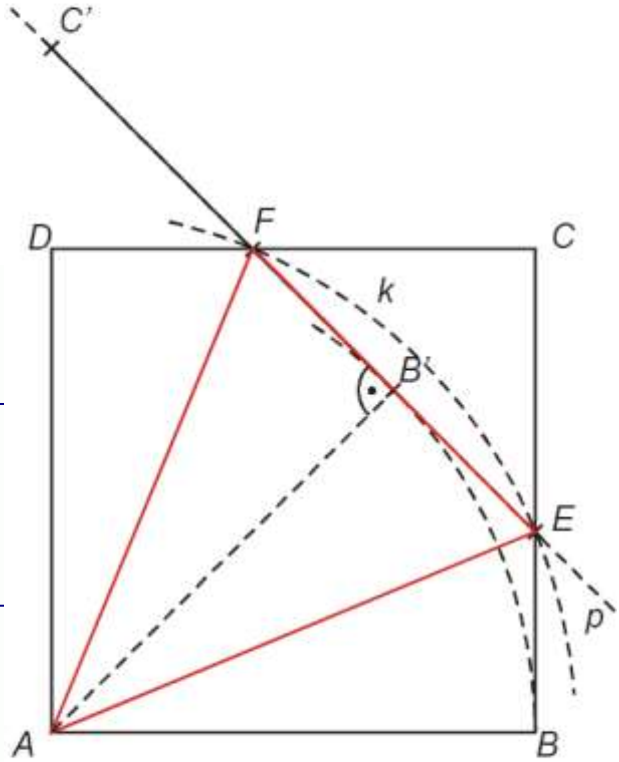


Otočení

Definice:
Je dán orientovaný úhel o velikosti φ a bod S. Otočení (rotace) je shodné zobrazení $R(S;\varphi)$, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ.
2. bodu S bod $S' = S$.

Příklad 1: Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky *a* a *b* a mimo ně bod *C*. Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby bod *A* ležel na přímce *a* a bod *B* ležel na přímce *b*.





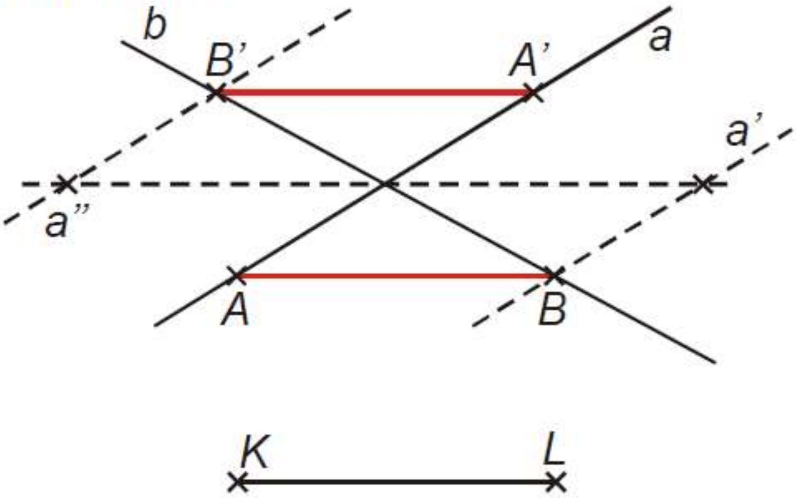
Příklad 2:
Je dán čtverec $ABCD$, $a = 6\,\mathrm{cm}$. Najdi všechny rovnoramenné trojúhelníky AEF se základnou EF, pro které platí $E \in BC$, $F \in CD$, $\alpha = 45°$.

Posunutí

Je dána nenulová orientovaná úsečka $\mathbf{AB}$. Posunutí (translace) je shodné zobrazení $T(\mathbf{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientovaná úsečka $\mathbf{XX'}$ má stejnou délku a stejný směr jako orientovaná úsečka $\mathbf{AB}$.

Příklad 1:
Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka KL. Sestroj všechny úsečky AB rovnoběžné a shodné s úsečkou KL, tak aby platilo $A \in a$, $B \in b$.

Konstrukce:

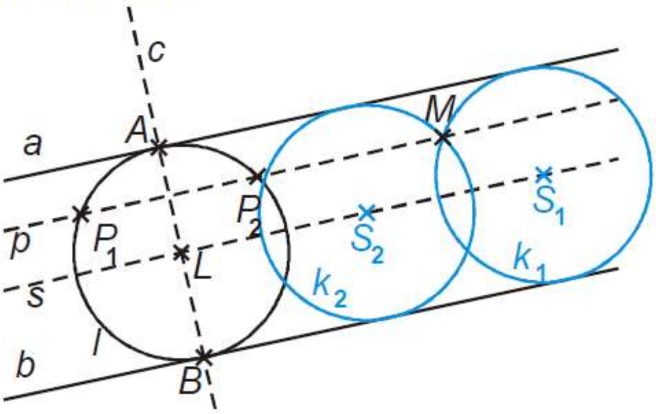


Zápis konstrukce:

1. $KL, a, b; a \nparallel b$
2. $a'; T(\mathbf{KL}): a \to a'$
3. $B; B \in b \cap a'$
4. $A; T(\mathbf{LK}): B \to A$
5. $a''; T(\mathbf{LK}): a \to a''$
6. $B'; B' \in b \cap a''$
7. $A'; T(\mathbf{KL}): B' \to A'$
8. $AB; A'B'$

Př. 2: Jsou dány rovnoběžné přímky a, b a bod M ležící uvnitř pásu, který ohraničují. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b a prochází bodem M. Najdi řešení, které nevyužívá množiny bodů dané vlastnosti.

Konstrukce:



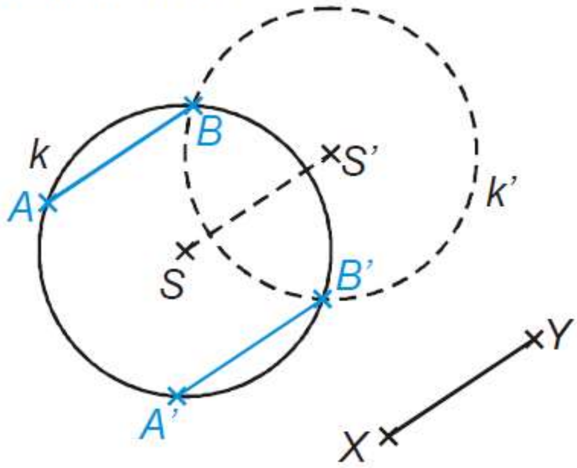
Zápis konstrukce:

1. $M, a, b; a \parallel b$
2. $c; c \perp a$
3. $A; A \in a \cap c; B; B \in b \cap c$
4. $L; |LA| = |LB|$
5. $l(L; |LA|)$
6. $p; p \parallel a; M \in p$
7. $P_1, P_2; \{P_1, P_2\} \in p \cap l$
8. $S_1; T(\mathbf{P_1M}): S \to S_1$, $S_2; T(\mathbf{P_2M}): S \to S_2$
9. $k_1(S_1; |LA|); k_2(S_2; |LA|)$

Příklad 3:

Je dána kružnice $k(S;r)$ a úsečka XY. Sestroj tětivu AB kružnice k shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY. Kdy je úloha řešitelná?

Konstrukce:

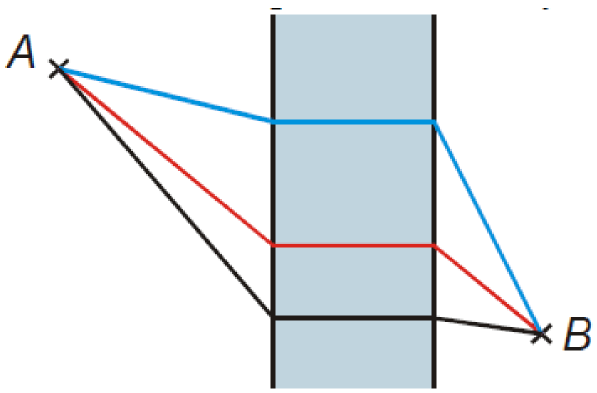


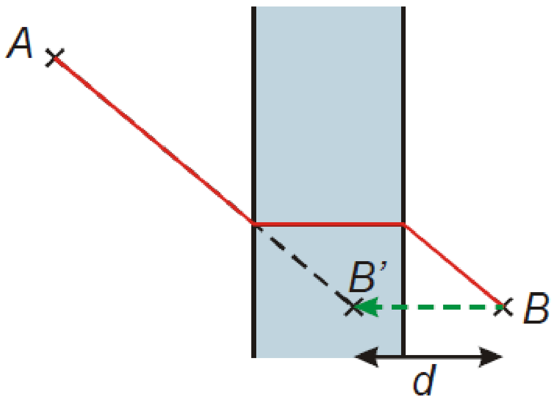
Zápis konstrukce:

1. $XY, k(S;r)$
2. $S'; T(\mathbf{AB}): S \rightarrow S'$
3. $k'(S';r)$
4. $B; B \in k \cap k'$
5. $A; T(\mathbf{BA}): B \rightarrow A$
6. AB

Rozbor: Úloha má 2 řešení, pokud |XY|<2r; 1 řešení, pokud |XY|=2r; žádné řešení pro |XY|>2r.

Př. 4: Vyhledej místo na řece šířky d, ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky, tak aby cesta z obce A do obce B, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší. Předpokládej, že šířka řeky se v odpovídajícím úseku řeky nemění.





Zdroje:

Zobrazení v rovině: http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=2

Geometrie živě (animace): http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/cabri/

Shodná zobrazení na střední škole: www.is.muni.cz/th/98809/prif_b/shodnost.pdf

M. Baráková: Materiály k maturitnímu semináři z matematiky