

## 16. Funkce, základní pojmy a vlastnosti

### Teoretická část

- Pojem funkce. Zadání funkce: analyticky (rovnici), výčtem (tabulkou), graficky, slovním popisem.
- Definiční obor funkce, obor hodnot funkce. Graf funkce. Inverzní funkce.
- Základní vlastnosti funkcí: sudost a lichost funkce, monotónnost, funkce omezená shora, funkce omezená zdola, funkce omezená. Extrémy funkce. Periodičnost funkce, základní perioda. Funkce prostá.

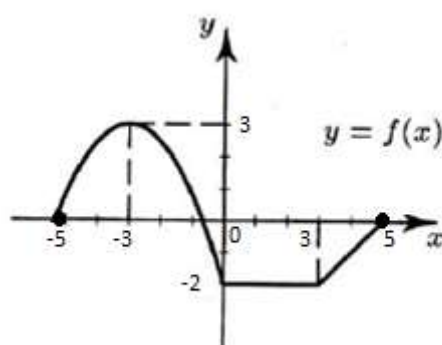
### Praktická část

#### Základní poznatky

1) Sestrojte graf  $V = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq x + 1 \wedge x \in (-3; 2) \wedge y \in \langle 1; 4 \rangle\}$

[pětúhelník ABCDE kromě vrcholů A, C, D, E a kromě stran CD a AE, kde A[-3;1], B[0;1], C[2;3], D[2;4], E[-3;4]]

2) Určete všechny základní vlastnosti funkce zadané graficky:



[  $D(f) = \langle -5; 5 \rangle$ ,  $H(f) = \langle -2; 3 \rangle$ . Není ani sudá, ani lichá. Není monotónní. Lze ale například určit, že na  $\langle -3; 0 \rangle$  je klesající nebo na  $\langle -5; -3 \rangle$  je rostoucí nebo na  $\langle 3; 5 \rangle$  je rostoucí. Na  $\langle -3; 3 \rangle$  je nerostoucí a na  $\langle 0; 5 \rangle$  je neklesající. Je omezená, neboť je současně omezená shora ( $h = 3$ ) i zdola ( $d = -2$ ). Ostré maximum má v bodě -3, minima má ve všech bodech intervalu  $\langle 0; 3 \rangle$ . Periodická není. Prostá není. ]

#### Typové příklady standardní náročnosti

3) Nalezněte inverzní funkci  $f^{-1}$  k funkci  $f$  a obě zakreslete do jednoho obrázku:

a)  $f : y = 3x - 2, x \in \langle -1; 2 \rangle$ .

$$\left[ f^{-1} : y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \langle -5; 4 \rangle \right]$$

b)  $f : y = \frac{1}{2}x^2, x \in \langle 0; \infty \rangle$ .

$$\left[ f^{-1} : y = \sqrt{2x}, x \in \langle 0; \infty \rangle \right]$$

4) Určete definiční obory funkcí

a)  $f_a : y = x^2 + x + 4$

$$[D(f_a) = \mathbb{R}]$$

b)  $f_b : y = \frac{x-1}{x+3}$

$$[D(f_b) = \mathbb{R} - \{-3\}]$$

c)  $f_c : y = \sqrt{\frac{x-3}{3-x}}$

$$[D(f_c) = \emptyset]$$

d)  $f_d : y = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$

$$[D(f_d) = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)]$$

$$e) f_e : y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} \quad [D(f_e) = (3; \infty)]$$

$$f) f_f : y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad [D(f_f) = (-1; 1)]$$

5) Rozhodněte o sudosti či lichosti funkcí:

a)  $f_a : y = x + x^3$  [lichá]

c)  $f_c : y = 3|x| + 1$  [sudá]

b)  $f_b : y = x^2 + 3x - 1$  [ani S, ani L]

d)  $f_d : y = 1 + \sqrt{x}$  [ani S, ani L]

6) Rozhodněte o druhu monotónnosti funkcí, případně jejich monotónnost dokažte:

a)  $f_a : y = 6x + 1$  [rostoucí]

c)  $f_c : y = 3x^2$  [není monotónní]

b)  $f_b : y = -2x - 1$  [klesající]

d)  $f_d : y = 2$  [nerostoucí, neklesající]

7) Zjistěte, zda jsou funkce omezené, případně jejich omezenost dokažte:

a)  $f_a : y = \frac{1}{2}x + 1$  [není omezená]

c)  $f_c : y = -x^2$  [není omezená, je omezená shora]

b)  $f_b : y = -x + 1$  [není omezená]

d)  $f_d : y = -1$  [je omezená]

8) Dokažte, že funkce  $f : y = 2x + 1$  má na intervalu  $\langle -1; 3 \rangle$  v bodě 3 ostré maximum a v -1 ostré minimum.

#### Rozšiřující cvičení

S pojmem funkce úzce souvisí pojmy, na které se definice funkce odvolává. Je dobré promyslet pojmy: uspořádaná dvojice, kartézský součin množin, binární relace a zobrazení. Pak lze funkci definovat jako zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  ...

9) Jsou dány množiny  $A = \langle -1; 2 \rangle$ ,  $B = \{-2, 0, 1\}$ . Sestrojte graf

a)  $A \times B$

b)  $A \times A$

c)  $B \times B$

10) Načrtněte graf funkce  $f$ , víte-li, že platí současně:

- $D(f) = \langle -3; \infty \rangle - \{0\}$
- $f(-3) = -2$
- Průsečíky grafu funkce  $f$  s osou  $x$  jsou v bodech  $P_1[-1; 0]$  a  $P_2[5; 0]$ .
- V intervalu  $\langle -3; 0 \rangle$  je funkce  $f$  rostoucí a není omezená shora.
- V intervalu  $\langle -3; 3 \rangle - \{0\}$  je funkce  $f$  sudá.
- V intervalu  $\langle 3; \infty \rangle$  je funkce  $f$  rostoucí a omezená shora číslem  $h = 4$ .

- a) Z grafu určete obor hodnot funkce  $f$ .
- b) Určete souřadnice průsečíku grafu funkce  $f$  s osou  $y$ .
- c) Je funkce  $f$  omezená zdola v definičním oboru?
- d) Určete maximum funkce  $f$  v definičním oboru.
- e) Určete minimum funkce  $f$  v definičním oboru.
- f) Je funkce  $f$  prostá v definičním oboru?
- g) Určete alespoň jeden interval, ve kterém je funkce  $f$  spojitá.