Obsah

Kapitola 1

Teoretická informatika

Tato kapitola je především motivační – dovíme se zde, jaký má teoretická informatika význam, jak vznikla a také jaké jsou možnosti jejího praktického použití.

1.1 Vznik a vývoj teoretické informatiky

Vznik teoretické informatiky – tři kořeny:

1. matematika,
2. jazykověda,
3. biologie.

1.1.1 Matematika

Počátek 20. století: rozvoj logiky.

Roku 1936 – zjištění: „Nelze cokoliv jednoznačně určit a vypočítat.“

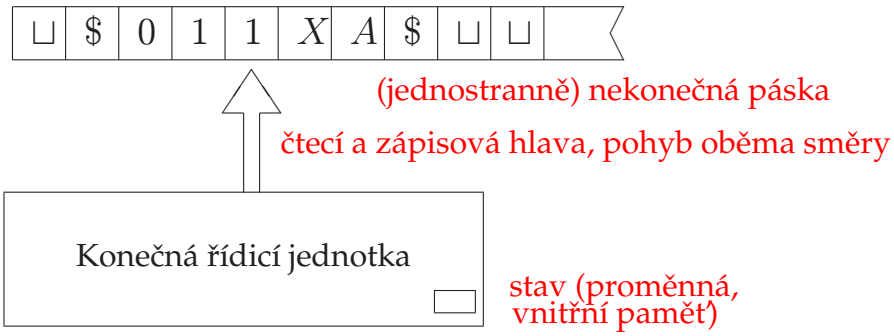
Otázka: „*Co* lze vypočítat?“

$\Longrightarrow$ Turingův stroj a další výpočetní modely

Alan Turing (1912–1954)

Vytvořil Turingův stroj jako matematický model

„Na tomto stroji lze vypočítat právě to, co je vypočitatelné.“



Obrázek 1.1: Turingův stroj

Vlastnosti Turingova stroje:

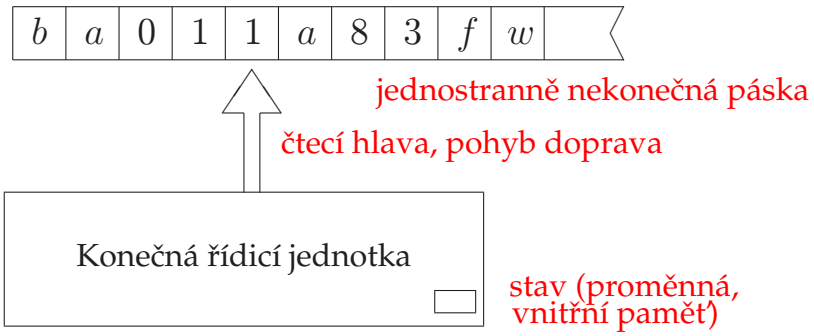
- řídicí jednotka se vždy nachází v některém z předem určených stavů,
- čtecí a zápisová hlava je vždy na některém políčku pásky,
- v každém kroku se stroj řídí podle stavu jednotky a podle obsahu políčka, na které ukazuje hlava,
- podle těchto dvou údajů se rozhodne o akci, která spočívá
  - ve změně stavu jednotky (například ze stavu „načítání“ do stavu „načteno“ nebo ze stavu „pracuji“ do stavu „vypínám“),
  - přepsání obsahu políčka na pásce něčím jiným (nebo může políčko zůstat beze změny), a
  - posun na pásce vpravo, vlevo, a nebo může hlava zůstat na stejném políčku.

Výsledkem činnosti stroje obvykle bývá obsah pásky, důležitou informací může být stav, ve kterém stroj skončil výpočet (je množina koncových stavů).

Další modely: Turingův stroj byl moc složitý pro některé jednodušší výpočty, proto vznikly jednodušší modely – konečný automat a zásobníkový automat.

Vlastnosti konečného automatu:

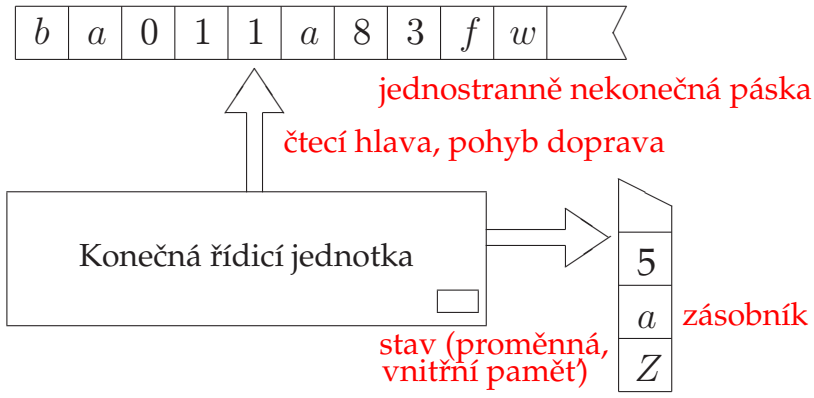
- řídicí jednotka se vždy nachází v některém z předem určených stavů,
- čtecí hlava je vždy na některém políčku pásky,



Obrázek 1.2: Konečný automat

- v každém kroku se stroj řídí podle stavu jednotky a podle obsahu políčka, na které ukazuje hlava,
- podle těchto dvou údajů se rozhodne o akci, která spočívá
  - ve změně stavu jednotky (například ze stavu „načítání“ do stavu „načteno“ nebo ze stavu „pracuji“ do stavu „vypínám“),
  - posunem na pásce o políčko vpravo.

Narozdíl od Turingova stroje se čtecí hlava posouvá v každém kroku o políčko doprava a nemá možnost zapisovat. Výsledkem činnosti automatu je pouze informace o tom, ve kterém stavu stroj skončil, a zda přečetl celý obsah pásky (když nepřečetl a „zasekl se“ – pro daný obsah pole na pásce a momentální stav třeba není definována žádná akce).



Obrázek 1.3: Zásobníkový automat

Vlastnosti zásobníkového automatu:

- řídicí jednotka se vždy nachází v některém z předem určených stavů,
- čtecí hlava je vždy na některém políčku pásky,
- automat má k dispozici zásobník, kde přidává shora a také shora vybírá,
- v každém kroku automat vyjme jeden prvek ze zásobníku, a řídí se podle tohoto vyjmutého symbolu, stavu jednotky a také se může (nemusí) řídit podle obsahu políčka, na které ukazuje hlava,
- podle těchto tří (nebo dvou) údajů se rozhodne o akci, která spočívá
  - ve změně stavu jednotky (například ze stavu „načítání“ do stavu „načteno“ nebo ze stavu „pracuji“ do stavu „vypínám“),
  - posunem na pásce o políčko vpravo, pokud v tomto kroku četl symbol ze vstupní pásky (tj. když čte ze vstupu, zároveň se posune dál),
  - může uložit do zásobníku jakýkoliv počet prvků (i žádný), a to postupně po jednom, ten, který vložil jako poslední, bude hned v dalším kroku vyjmut.

Narozdíl od konečného automatu čtecí hlava nemusí pracovat v každém kroku (buď čte a zároveň se posune, nebo nepracuje vůbec), nemá možnost zapisovat a pohybuje se jen směrem doprava. Výsledkem činnosti je informace o stavu, ve kterém stroj skončil, zda přečetl celý obsah pásky, a případně může být důležité, zda do konce výpočtu stačil vyprázdnit celý zásobník.

1.1.2 Jazykověda

Formální gramatika řeší, jak se slova utvářejí (u matematických kořenů byl řešen problém rozpoznávání již utvořených slov či sekvencí signálů).

Noam Chomskij Zkoumal syntaxi jazyka a schopnost lidí mluvit.

> *„Všechny jazyky jsou utvořeny přibližně stejným způsobem, mají stejný základ.“*

Definice 1.1 (Formální gramatika) *Formální gramatika je soubor obecných pravidel, generujeme větu na základě její struktury (syntaxe).*

Příklad 1.1

$S \to [begin]A[end]$

$A \to P;$

$A \to P; A$

$P \to [vypis]T$

$T \to [pismenko]$

$T \to [pismenko]T$

$S \Rightarrow [begin]A[end] \Rightarrow [begin]P; [end] \Rightarrow [begin]P; P; [end] \Rightarrow$
$\Rightarrow [begin][vypis]T; P; [end] \Rightarrow$
$\Rightarrow [begin][vypis][pismenko]T; P; [end] \Rightarrow \ldots$
$\Rightarrow [begin][vypis][pismenko][pismenko][pismenko];$
$[vypis][pismenko][pismenko][pismenko][pismenko]; [end]$

Základní princip: Věta se skládá ze slov, při skládání částí potřebujeme také pomocná slova („obecné termíny“), za která můžeme dosadit posloupnost skládající se ze slov a pomocných slov – rekurze.

Pomocná slova = *neterminální symboly*, skutečná slova = *terminální symboly*

Typy formálních gramatik:

- Gramatika odpovídající Turingovu stroji: pravidla $\alpha \to \beta$
- Bezkontextová gramatika: pravidla $A \to \beta$
- atd.

1.1.3 Biologie

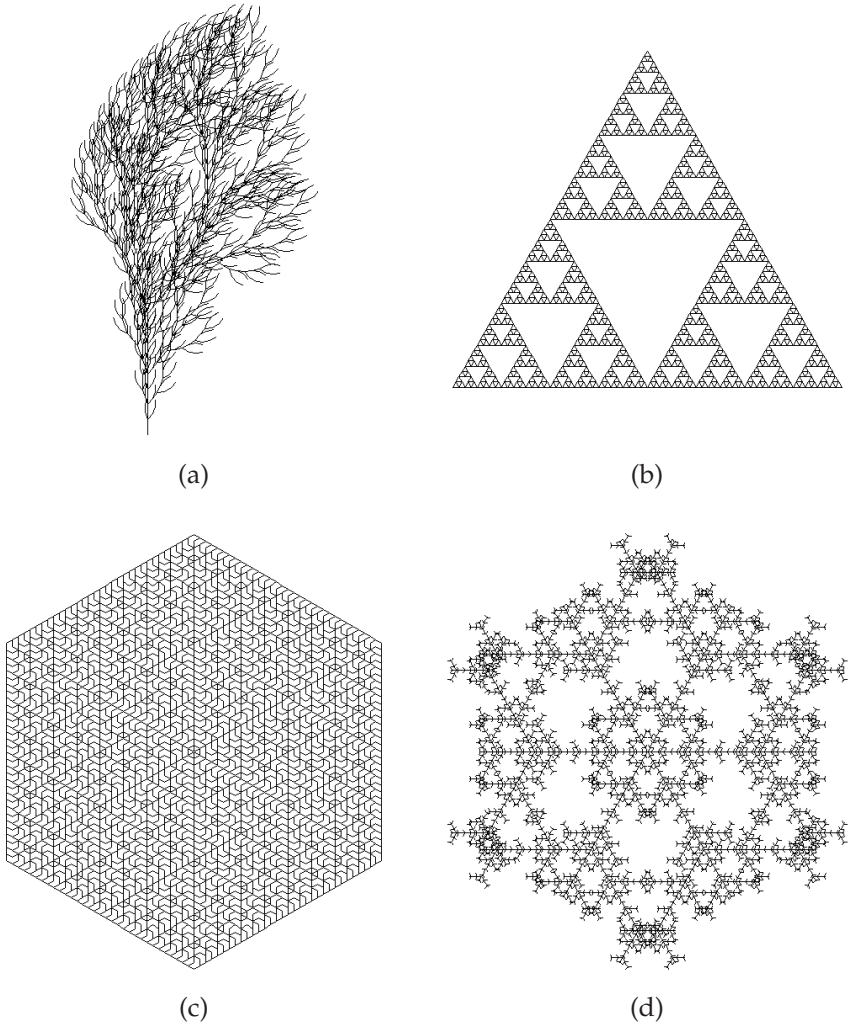
Aristid Lindenmayer. Lindenmayerovy systémy (L-Systémy) – zjistil, že když upraví formální gramatiku a pozmění její chování, dokáže například simulovat růst a vývoj rostliny nebo dělení buněk.

Pravidlo: $b \to bb$

Výpočet: $b \Rightarrow bb \Rightarrow b^4 \Rightarrow b^8 \Rightarrow \ldots$

Jeho žáci pak přišli na možnost grafické interpretace L-Systémů ⇒ různé typy fraktálů. U fraktálů generovaných L-Systémy jde o to, jak poměrně složitý nákres vygenerovat co nejjednodušším řetězcem „obyčejných“ symbolů, které mají význam určité instrukce (vykresli čáru, popojdi bez vykreslení, otoč se doprava, doleva, ulož písmeno do zásobníku, vyjmi písmeno ze zásobníku, apod.).

Uplatňuje se rekurze, tedy totéž pravidlo (nebo tatáž pravidla) se používá pořád dokola tak dlouho, dokud nevznikne dostatečně dlouhá a „složitá“ posloupnost instrukcí.



Obrázek 1.4: Několik fraktálů vygenerovaných pomocí L-Systémů

Například obrázek 1.4c na straně 7 vznikl z řetězce F+F+F+F+F+F tak, že jsme rekurzívně všechny symboly F (i ty nově přidávané) zpracovali pravidlem $\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F[+F+F]F}$.

1.2 Možnosti použití teoretické informatiky

- stavové programování, překladače
- modelování matematických výpočtů
- analýza přirozeného jazyka (kontrola pravopisu, překlady, atd.)
- L-Systémy: biologie, fraktály (malířství, filmy, apod.), fyzika (teorie chaosu, modelování turbulence, studium tornád, atd.)
- porovnávání složitosti různých algoritmů dělajících totéž
- DNA-výpočty
- fyzika – kvantové počítače
- ...

Kapitola 2

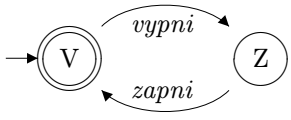
Konečné automaty

Nejdřív se budeme zabývat nejjednodušším typem modelů, které byly zmíněny v kapitole 1.1.1 o matematických kořenech teoretické informatiky, konečnými automaty, a také se podíváme na základy práce s jednoduchými gramatikami, se kterými jsme se už trochu seznámili v kapitole 1.1.2.

2.1 Konečný automat

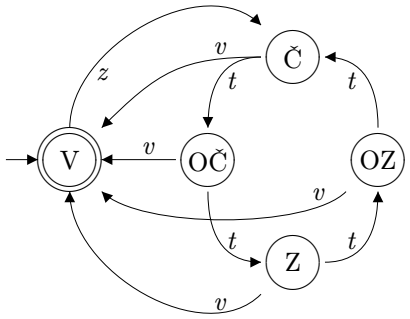
Konečný automat je vždy v některém (vnitřním) stavu, který si můžeme představit jako proměnnou nabývající předem stanovených hodnot. Pracuje jednoduše tak, že na základě informace o svém momentálním stavu a dále podle signálu, který dostal (symbolu na vstupu) se přesune do některého jiného stavu a zároveň se posune na vstupu, tedy očekává další signál (je připraven načíst další symbol z pásky).

Na obrázcích 2.1, 2.2 a 2.3 vidíme několik jednoduchých diagramů (orientovaných grafů) konečných automatů. Diagram přehledně (u jednodušších automatů) zobrazuje *přechody mezi stavy* (šipky) a *signály* (symboly), které jsou při tomto přechodu načítány a zpracovávány (ohodnocení šipek).



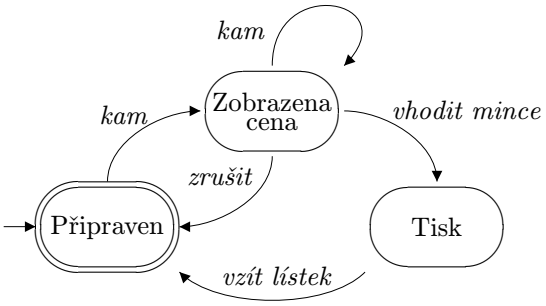
Popis:
V . . . . . vypnuto
Z . . . . . zapnuto

Obrázek 2.1: Elektrický spotřebič jako konečný automat



Popis:
V . . . . . vypnuto
Č, Z . . . . . červená, zelená
OČ . . . . oranžová od červené
OZ . . . . . oranžová od zelené

Obrázek 2.2: Semafor jako konečný automat



Obrázek 2.3: Automat na jízdenky

Definice 2.1 (Konečný automat) *Konečný automat je uspořádaná pětice* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, kde je*

Q*. . . neprázdná konečná množina stavů*
Σ*. . . neprázdná konečná abeceda (množina signálů)*
δ*. . . přechodová funkce, definovaná níže*
q_0*. . . počáteční stav,* $q_0 \in Q$
F*. . . množina koncových stavů,* $F \subseteq Q$*,* $F \neq \emptyset$

Definice 2.2 (Přechodová funkce) *Přechodová funkce* δ *konečného automatu (dále KA)* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *je zobrazení* $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
$\delta(stav, signál) = stav$

Například: $\delta(vypnuto, zapni) = zapnuto$

Potřebujeme vědět:

- ve kterém jsme stavu,
- co ještě zbývá přečíst (zpracovat).

Tyto informace jsou uloženy v konfiguraci automatu, která se postupně mění.

Definice 2.3 (Konfigurace konečného automatu) *Označme Σ^* množinu všech slov, která lze utvořit ze symbolů abecedy Σ. Konfigurace KA je uspořádaná dvojice (q, w), kde $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ (nepřečtená část vstupní pásky).*

- Počáteční konfigurace: (q_0, w_0)
  (jsme v počátečním stavu a w_0 je celé zpracovávané slovo)
- Koncová konfigurace: (q_f, ε), $q_f \in F$
  (ε je prázdné slovo, tj. řetězec s délkou 0, neboli celé slovo již bylo zpracováno)

Definice 2.4 (Přechod mezi konfiguracemi) *Relace přechodu mezi konfiguracemi je definována jako $\vdash$: $(Q, \Sigma^*) \times (Q, \Sigma^*)$, kde platí:*
$(q_i, aw) \vdash (q_j, w) \quad \Leftrightarrow \quad \delta(q_i, a) = q_j$
(relace přechodu mezi konfiguracemi je tedy závislá na funkci přechodu δ).

Definice 2.5 (Výpočet slova v konečném automatu) *Výpočet slova v konečném automatu je posloupnost konfigurací spojených relací přechodu, začínající počáteční konfigurací s daným slovem a končící některou koncovou konfigurací.*

Příklad 2.1

Výpočet slova v konečném automatu – semaforu na obrázku 2.2 na straně 10 může být například takový:
$(V, ztttttv) \vdash (\check{C}, tttttv) \vdash (itshape O\check{C}, ttttv) \vdash (Z, tttv) \vdash (OZ, ttv) \vdash (\check{C}, tv) \vdash (O\check{C}, tv) \vdash (Z, v) \vdash (V, \varepsilon)$

Jiný konečný automat:
$(q_0, abcd) \vdash (q_3, bcd) \vdash (q_1, cd) \vdash (q_3, d) \vdash (q_3, \varepsilon)$
kde všechny přechody mezi konfiguracemi jsou určeny funkcí $\delta : \delta(q_0, a) = q_3$, atd., a q_3 patří do množiny koncových stavů.

Definice 2.6 (Rozpoznání (přijímání) slova konečným automatem) *Konečný automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznává (přijímá) slovo w, pokud existuje posloupnost výpočtu tohoto slova v automatu, tedy pokud se lze z počáteční konfigurace (q_0, w_0) postupným uplatňováním relací přechodu dostat do některé koncové konfigurace.*

Definice 2.7 (Jazyk) *Jazyk L je množina slov nad danou abecedou Σ (některá podmnožina množiny všech slov utvořených z písmen abecedy Σ), tedy $L \subseteq \Sigma^*$.*

Jazyk může obsahovat také prázdné slovo ε.

Definice 2.8 (Jazyk konečného automatu) *Jazyk konečného automatu $\mathcal{A}$ je množina všech slov, která automat přijímá, značíme $L(\mathcal{A})$.*

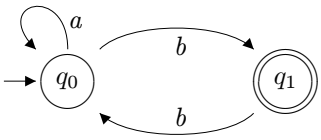
Definice 2.9 (Rozpoznání jazyka automatem) *Automat $\mathcal{A}$ rozpoznává jazyk L_j, pokud přijímá právě slova jazyka L_j (tj. přijímá všechna slova jazyka, ale nepřijímá žádné slovo do jazyka nepatřící).*

Značíme $L_j = L(\mathcal{A})$ (jazyk L_j je rozpoznáván automatem $\mathcal{A}$, je jeho jazykem).

Příklad 2.2

$\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\},\ \{a, b\},\ \delta,\ q_0,\ \{q_1\})$

Diagram:



δ funkce:

$\delta(q_0, a) = q_0$
$\delta(q_0, b) = q_1$
$\delta(q_1, b) = q_0$

Tabulka:

stav\vstup	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
$\leftarrow q_1$	-	q_0

Jeden z možných výpočtů v automatu:

$(q_0, aab) \vdash (q_0, ab) \vdash (q_0, b) \vdash (q_1, \varepsilon)$

Jazyk automatu:

$L(\mathcal{A}) = \{a^*b\} \cdot \{(ba^*b)^i \mid i \geq 0\} \quad = \quad \{(a^*bb)^*a^*b\} \quad = \quad \{a^*(bba^*)^*b\}$

2.2 Nedeterminismus

V základní definici konečného automatu existuje pro každé slovo přijímané automatem právě jedna cesta v diagramu automatu, a tedy výpočet je vždy jednoznačný.

Výhodou tohoto postupu je, že takto vytvořený konečný automat se snadněji programuje, protože v klasickém programování je jednoznačnost nutnou podmínkou.

Někdy je však jednodušší vytvořit automat, který tuto vlastnost nemá, tedy pro některá přijímaná slova může existovat více různých cest v diagramu. Zde si takový automat definujeme a ukážeme si také způsob převedení na původní formu.

Definice 2.10 (Nedeterministický konečný automat) *Nedeterministický konečný automat (NKA) je takový konečný automat* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, kde* $\delta : \ Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$.

Poznámka: $\mathcal{P}(Q)$ je potenční množina množiny Q, je to množina všech jejích podmnožin (včetně prázdné množiny a také samotné množiny Q).

V některých stavech na určitý signál může existovat *více než jedna možnost* jak reagovat, dokonce pro některá slova může v grafu automatu existovat více různých cest od počátečního stavu do některého koncového.

V *deterministickém automatu* (DKA) pro jedno slovo existuje právě jedna cesta v grafu (je automatem rozpoznáváno) nebo žádná cesta.

Definice 2.11 (Jazyk rozpoznávaný NKA) *Jazyk rozpoznávaný NKA je*

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \ \vdash^* \ (q_f, \varepsilon), q_f \in F\}.$$

Poznámka: *Jazyk* rozpoznávaný nedeterministiským konečným automatem je tedy množina všech slov nad abecedou Σ, pro která existuje alespoň jeden výpočet (cesta v grafu automatu) od počátečního do některého (kteréhokoliv) koncového stavu.

Věta 2.1 *Nechť* $\mathcal{A}$ *je nedeterministický KA. Potom existuje deterministický KA* $\mathcal{A}'$ *takový, že* $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ *(tj. rozpoznávají stejný jazyk).*

Důkaz: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nedeterministický (ten máme)
$\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ deterministický (ten chceme vytvořit)

Stavy nového automatu budou odpovídat množinám stavů původního. Pro každou rovnost $\delta(q_i, a) = \{q_j, q_k\}$ stavy (množiny) $\{q_i\}, \{q_j, q_k\}$ budou patřit ke stavům nového automatu.

Postup:

- $Q' = \{M \mid M \subseteq Q\} = \mathcal{P}(Q)$ – nová množina stavů bude množinou všech podmnožin původní množiny stavů,

- $q'_0 = \{q_0\}$ – počáteční stav je jednoprvková množina obsahující původní počáteční stav,
- $M \in F' \Leftrightarrow M \cap F \neq \emptyset$ – koncové stavy jsou všechny, které (coby množiny) obsahují alespoň jeden původní koncový stav,
- $\delta'(M, a) = \{q \mid q \in \delta(p, a), p \in M\}$ – všechny prvky množiny zpracujeme podle původního automatu, pak shrneme výsledky do množiny.

□

Pokud pracujeme s reprezentací δ-funkce ve tvaru tabulky, můžeme jednoduše postupovat tak, že v tabulce původního automatu „uzávorkujeme“ ohodnocení řádků a buňky do množinových závorek a pak pro každou množinu z buněk, kterou není ohodnocen žádný řádek, přidáme řádek tabulky a doplníme obsah buněk na daném řádku.

Jak určit obsah nové buňky: pokud je řádek ohodnocen množinou $\{q_i, q_j, \ldots\}$, pak do buňky sepíšeme obsah buněk na řádcích $\{q_i\}$, $\{q_j\}$, ... v daném sloupci, tedy vlastně sjednocujeme řádky jednotlivých prvků množiny.

Příklad 2.3

$L = \{a, b\}^*bb = \{\{a, b\}^n bb \mid n \geq 0\}$

$\mathcal{A} = \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$
$\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

Nedeterministický:

$\mathcal{A}$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0	q_0, q_1
q_1	-	q_2
$\leftarrow q_2$	-	-

Deterministický:

$\mathcal{A}'$	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\leftarrow \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

Odstraníme nepotřebné stavy:

$\mathcal{A}'$	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

2.3 Totální automat

Obvykle není nutné, aby automat dokázal v každém stavu reagovat na jakýkoliv signál, ale za určitých okolností se tato vlastnost může hodit. Můžeme si představit třeba situaci, kdy programátor chce napsat program dostatečně robustní, který by dokázal reagovat na jakýkoliv vstup, v případě chybného vstupu třeba chybovým hlášením (tedy přechodem do chybového stavu s patřičným ošetřením).

Definice 2.12 (Totální automat) *Totální (úplný) konečný automat je deterministický konečný automat, ve kterém lze ve všech stavech reagovat na kterýkoliv symbol abecedy, tj. přechodová funkce δ je totální:*
$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \; \exists p \in Q : \delta(q,a) = p$ *(ke každému stavu a symbolu abecedy existuje stav, do kterého přejdeme z daného stavu na daný symbol).*

Věta 2.2 *Ke kadému (deterministickému) konečnému automatu $\mathcal{A}$ existuje totální automat $\mathcal{A}'$ takový, že $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.*

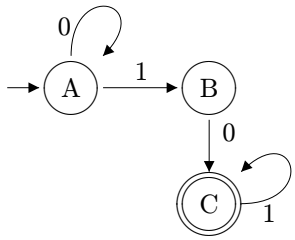
Náznak důkazu – konstrukce:

- převedeme automat na deterministický,
- vytvoříme nový stav $\emptyset$, který bude fungovat jako „odpadkový koš“,
- do tohoto stavu nasměrujeme chybějící přechody,
- přidáme smyčku (přechod začínající a končící ve stejném stavu) u stavu $\emptyset$ pro každý symbol abecedy.

Příklad 2.4

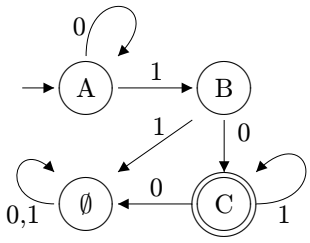
Deterministický:

$\mathcal{A}$	0	1
$\rightarrow$ A	A	B
B	C	-
$\leftarrow$ C	-	C



Zúplnění:

$\mathcal{A}'$	0	1
$\rightarrow$ A	A	B
B	C	$\emptyset$
$\leftarrow$ C	$\emptyset$	C
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



2.4 Odstranění nepotřebných stavů automatu

Definice 2.13 (Nedosažitelný stav) *Nedosažitelný stav je stav q_i takový, že neexistuje posloupnost přechodů*

$$(q_0, w) \vdash^* (q_i, w')$$

tedy nelze se do tohoto stavu dostat z počátečního stavu.

Definice 2.14 (Nadbytečný stav) *Nadbytečný stav je stav q_i takový, že neexistuje žádná posloupnost přechodů*

$$(q_i, w') \vdash^* (q_f, \varepsilon)$$

kde $q_f \in F$ (koncový stav), tedy z tohoto stavu se nelze dostat do žádného koncového stavu.

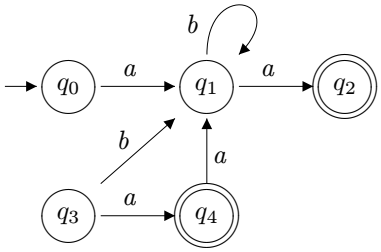
2.4.1 Nedosažitelné stavy

Vytvoříme množinu stavů, ke kterým se dá dostat z počátečního stavu – postupujeme od startovacího symbolu.

Příklad 2.5

Původní automat:

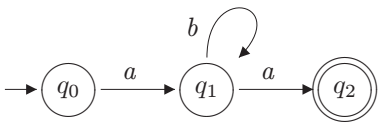
	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	-
q_1	q_2	q_1
$\leftarrow q_2$	-	-
q_3	q_4	q_1
$\leftarrow q_4$	q_1	-



$S_0 = \{q_0\}$, hledáme prvky S_{i-1} na označeních řádků, přidáme obsah buněk řádku
$S_1 = \{q_0, q_1\}$ (z q_0 se dá dostat do q_1)
$S_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$ (z q_0 a q_1 se dá dostat taky do q_2)
$S_3 = \{q_0, q_1, q_2\} = S_2 \ldots$ nová množina stavů

Po úpravě:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	-
q_1	q_2	q_1
$\leftarrow q_2$	-	-



Postup:

- vytvoříme množinu S_0, do ní dáme počáteční stav automatu, $S_0 = \{q_0\}$,
- vytvoříme množinu S_1 tak, že do ní dáme prvky množiny S_0 a dále všechny stavy, do kterých vede přechod ze stavů množiny S_0 (tj. zde přidáme všechny stavy, do kterých se dá dostat přímo z q_0),
- postupně vytváříme množiny S_i tak, že do S_i zařadíme nejdřív obsah množiny S_{i-1} a pak přidáme všechny stavy, do kterých vede přechod z některého stavu z množiny S_{i-1},
- končíme, když už se do množiny nic nedá přidat, tedy $S_i = S_{i-1}$, výsledkem je nová množina stavů.

Vzorec:
$S_0 = \{q_0\}$
$S_i = S_{i-1} \cup \{q \mid \delta(p, a) \ni q, p \in S_{i-1}, a \in \Sigma\}$

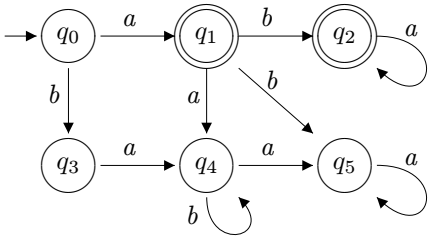
2.4.2 Nadbytečné stavy

Příklad 2.6

Předpokládáme zde, že nedosažitelné stavy jsou již odstraněny.

Původní automat:

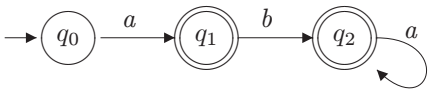
	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_3
$\leftarrow q_1$	q_4	q_2,q_5
$\leftarrow q_2$	q_2	-
q_3	q_4	-
q_4	q_5	q_4
q_5	q_5	-



$E_0 = \{q_1, q_2\}$, hledáme prvky E_{i-1} v buňkách řádků, přidáme označení řádků
$E_1 = \{q_1, q_2, q_0\}$ (z q_0 se dá dostat do q_1)
$E_2 = \{q_1, q_2, q_0\} = E_1$ ... nová množina stavů

Po úpravě:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_3
$\leftarrow q_1$		q_2
$\leftarrow q_2$	q_2	-



Postup:

- odstraníme nedosažitelné stavy,
- vytvoříme množinu E_0, do které zařadíme všechny koncové stavy automatu, tj. $E_0 = F$,
- vytvoříme množinu E_1 tak, že do ní dáme prvky množiny E_0 a dále všechny stavy, ze kterých vede přechod do stavů množiny E_0,
- postupně vytváříme množiny E_i tak, že do E_i zařadíme nejdřív obsah množiny E_{i-1} a pak přidáme všechny stavy, ze kterých vede přechod do některého stavu z množiny E_{i-1},
- končíme, když už se do množiny nic nedá přidat, tedy $E_i = E_{i-1}$, výsledkem je nová množina stavů.

Vzorec:
$E_0 = F$
$E_i = E_{i-1} \cup \{q \mid \delta(q, a) \ni p, p \in E_{i-1}, a \in \Sigma\}$

Kapitola 3

Regulární jazyky

Definice 3.1 (Regulární jazyk) *Regulárními jazyky označujeme všechny jazyky, které jsou rozpoznávané konečnými automaty.*

Jazyk je tedy regulární, pokud lze sestrojit konečný automat, který tento jazyk rozpoznává.

Ve všech dosud uvedených příkladech byly použity jazyky nekonečné, ale k regulárním jazykům patří také konečné jazyky. Dále se stručně podíváme na možnosti konečných jazyků a potom na nekonečné jazyky a jednu z možností, jak zjistit, zda nekonečný jazyk je či není regulární.

3.1 Konečné jazyky

Definice 3.2 (Konečný jazyk) *Konečný jazyk je jazyk, který obsahuje konečně mnoho slov.*

Věta 3.1 *Všechny konečné jazyky jsou regulární.*

Důkaz: Pro konečný jazyk sestrojíme konečný automat jednoduše tak, že pro každé slovo jazyka vytvoříme jednu „větev“ výpočtu (nedeterministický automat). Délka větví automatu bude odpovídat délce jednotlivých slov jazyka. □

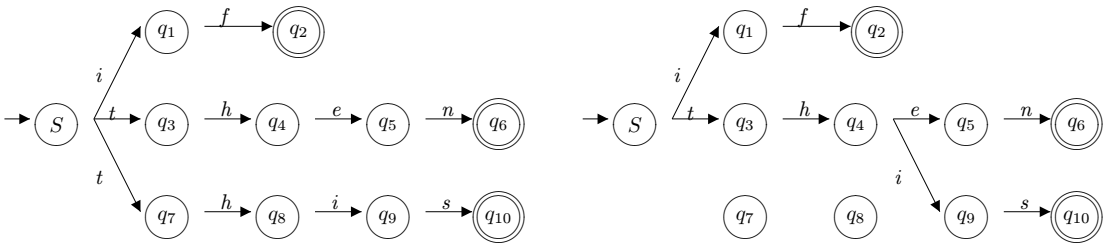
Poznámka: Můžeme mít buď jeden koncový stav společný pro všechna rozpoznávaná slova, a nebo každé slovo bude mít svůj vlastní koncový stav. Toho se využívá například u překladačů, kdy při rozpoznávání konečného množství slov

(klíčových slov) pro každé slovo máme zvláštní koncový stav, a podle toho, ve kterém skončí výpočet, určíme, o jaké slovo šlo.

Příklad 3.1

$L = \{if, then, this\}$

Nedeterministický („otrocký“ postup): Deterministický:



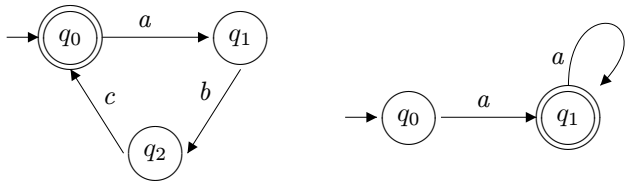
Reprezentace přechodové funkce tabulkou (chceme, aby byl automat deterministický):

$\mathcal{A}'$	i	f	t	h	e	n	s
$\rightarrow S$	A_1		A_2				
A_1		K_1					
A_2				A_3			
A_3	A_5				A_4		
A_4						K_2	
A_5							K_3
$\leftarrow K_1$							
$\leftarrow K_2$							
$\leftarrow K_3$							

3.2 Pumping Lemma pro regulární jazyky a nekonečné jazyky

Motivace. Pumping lemma (pumpovací věta) určuje, že nekonečné regulární jazyky mají jednu konkrétní vlastnost. Proto pokud dokážeme, že daný jazyk tuto vlastnost nemá, můžeme o něm říci, že není regulární.

Abeceda je vždy konečná množina a počet stavů automatu je vždy konečný ⇒ abychom mohli pracovat s dostatečně dlouhými slovy (nekonečného jazyka) s délkou větší než počet stavů automatu, musí být někde smyčka, která způsobí, že se část slova opakuje.



Obrázek 3.1: Ukázky grafů konečných automatů nekonečných jazyků

Věta 3.2 *Nechť L je regulární jazyk. Pak existuje celé číslo $p,\ p > 0$ tak, že každé slovo $w \in L$, $|w| > p$, lze rozdělit na tři části $w = xyz$ tak, že $y \neq \varepsilon$ ($|y| > 0$) a každé slovo ve tvaru $xy^kz,\ \forall k \in \mathcal{N}$ je také slovem tohoto jazyka, tedy $xy^kz \in L$.*

Poznámka: Za číslo p můžeme dosadit počet stavů automatu, pokud máme sestrojený konečný automat.

Příklad 3.2

$L = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Zvolíme $p = 2$. Pro nějaké $i > p$ může být třeba $a^{2i} = (a^2) \cdot (a^{2(i-1)}) \cdot \varepsilon$
(tedy $x = a^2,\ y = a^{2(i-1)},\ z = a^0 = \varepsilon$)

Použijeme číslo $k \geq 0$:

$k = 0 : xy^0z = a^2 \in L$ ..... OK
$k = 1 : xy^1z = a^{2i} \in L$ ..... OK
$k = 2 : xy^2z = a^2 \left(a^{2(i-1)}\right)^2 = a^{2(2i-1)} \in L$ ..... OK
...
$k = p : xy^pz = a^2 + p * 2(i-1) = a^{2(pi-p+1)} \in L$ ..... OK

Poznámka: Pumping lemma se obvykle nepoužívá v základním tvaru, ale spíše pro důkaz, že daný jazyk *není* regulární – větu obrátíme:
Původní: *Když je* jazyk regulární, *pak existuje* p ...
Obrátíme: *Když neexistuje* p ..., *pak* jazyka *není* regulární.

Postup: Hledáme dostatečně dlouhé slovo daného jazyka, pro které neexistuje žádné rozdělení $w = xyz$ takové, že $xy^kz \in L$.

1. zvolíme $w \in L$ dostatečně dlouhé,
2. zvolíme rozdělení na $w = xyz$,
3. zvolíme k,
4. vyrobíme $w_k = xy^kz$,
5. pokud $w_k \in L \quad \Rightarrow$ návrat k bodu 3, pokud to ještě jde,
6. když to není možné (pro všechna k slovo xy^kz patří do jazyka), návrat k bodu 2,
7. když to není možné (všechna rozdělení jsme otestovali a fungují), návrat k bodu 1,
8. jinak: našli jsme slovo w, pro které neexistuje žádné rozdělení xyz splňující uvedené podmínky, a tedy jsme dokázali, že L není regulární jazyk.

Předposlední bod se u regulárního jazyka a také některých jazyků neregulárních provádí do nekonečna, což vyplývá z faktu, že Pumping Lemma je pouze implikace, ne ekvivalence. Tedy věta říká, že každý regulární jazyk má danou vlastnost, ale neříká, že tuto vlastnost nemá žádný neregulární jazyk.

Poznámka: Pumping lemma lze ve skutečnosti použít i v případě, že jazyk je konečný – ve větě stojí „... každé slovo $w \in L, |w| > p$, lze...“, ovšem když zvolíme p opravdu dostatečně dlouhé (delší než kterékoliv slovo jazyka), pak vlastně není co testovat a vlastnosti jazyka větě odpovídají.

3.3 Uzávěrové vlastnosti třídy regulárních jazyků

Definice 3.3 (Uzavřenost třídy jazyků vzhledem k operaci φ) *Daná třída jazyků je uzavřená vzhledem k operaci φ, pokud po uplatnění této operace na jazyky z dané třídy výsledný jazyk patří opět do této třídy.*

Poznámka: Možné operace, které z tohoto hlediska zkoumáme, jsou sjednocení, zřetězení, iterace, pozitivní iterace, průnik, doplněk, zrcadlový obraz (reverze), homomorfismus, substituce.

3.3.1 Sjednocení

Věta 3.3 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci sjednocení.*

Důkaz: Budeme předpokládat, že některé dva regulární jazyky L_1 a L_2 jsou rozpoznávány automaty
$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$,
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2),\ L_2 = L(\mathcal{A}_2),\quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Vytváříme jazyk $L = L_1 \cup L_2$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$:

- Stav q_0 je nový, tedy musí platit $q_0 \notin Q_1,\ q_0 \notin Q_2$,
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$,
- $F = F_1 \cup F_2$,
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

δ-funkce simuluje cesty v původních automatech (přejímá předpisy δ_1 a δ_2), přidáváme pouze „inicializaci" – přechod z počátečního stavu q_0, další přechody již přejímáme. Ze stavu q_0 přecházíme do těch stavů, do kterých se přechází z původních q_0^1 a q_0^2.

$$\delta(p,a) = \begin{cases} \delta_1(p,a) \mid p \in Q_1, \\ \delta_2(p,a) \mid p \in Q_2, \\ \delta_1(q_0^1,a) \cup \delta_2(q_0^2,a) \mid p = q_0 \end{cases}$$

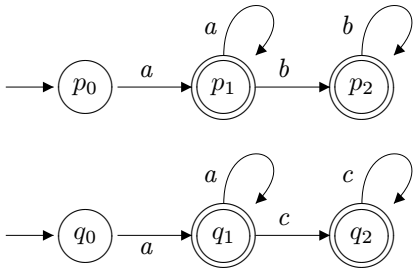
□

Příklad 3.3

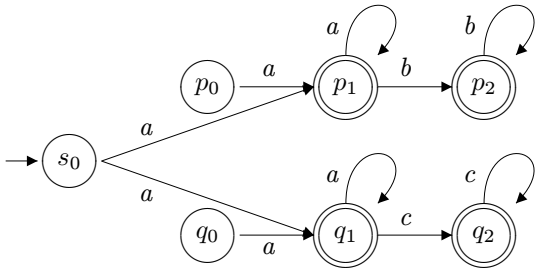
$L_1 = \{a^i b^j \mid i > 0, j \geq 0\}$ $\quad$ $\mathcal{A}_1 = (\{p_0, p_1, p_2\},\ \{a, b\},\ \delta_1, p_0,\ \{p_1, p_2\})$
$L_2 = \{a^i c^j \mid i > 0, j \geq 0\}$ $\quad$ $\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a, c\},\ \delta_2, q_0,\ \{q_1, q_2\})$

$L = L_1 \cup L_2 = \{a^i b^j \mid i > 0, j \geq 0\} \cup \{a^i c^j \mid i > 0, j \geq 0\}$
$\mathcal{A} = (\{s_0, p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2\},\ \{a, b, c\},\ \delta, s_0,\ \{p_1, p_2, q_1, q_2\})$

Původní:



Po sjednocení:

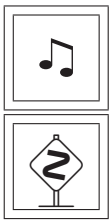


$\mathcal{A}_1$	a	b	c
$\rightarrow p_0$	p_1		
$\leftarrow p_1$	p_1	p_2	
$\leftarrow p_2$		p_2	

$\mathcal{A}_2$	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1		
$\leftarrow q_1$	q_1		q_2
$\leftarrow q_2$			q_2

$\mathcal{A}$	a	b	c
$\rightarrow s_0$	p_1, q_1		
p_0	p_1		
$\leftarrow p_1$	p_1	p_2	
$\leftarrow p_2$		p_2	
q_0	q_1		
$\leftarrow q_1$	q_1		q_2
$\leftarrow q_2$			q_2

3.3.2 Zřetězení



Věta 3.4 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zřetězení.*

Důkaz: Budeme předpokládat, že některé dva regulární jazyky L_1 a L_2 jsou rozpoznávány automaty
$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ a
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2),\ L_2 = L(\mathcal{A}_2), Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Vytváříme jazyk $L = L_1 \cdot L_2$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$.

- $q_0 = q_0^1$,
- $Q = Q_1 \cup Q_2$,
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,
- pokud $\varepsilon \notin L_2$, pak $F = F_2$, jinak $F = F_1 \cup F_2$

$$\delta(p,a) = \begin{cases} \delta_1(p,a) \mid p \in Q_1 - F_1, \\ \delta_2(p,a) \mid p \in Q_2, \\ \delta_1(p,a) \cup \delta_2(q_0^2, a) \mid p \in F_1 \end{cases}$$

□

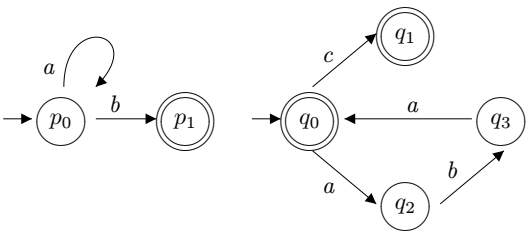
Příklad 3.4

$L_1 = \{a^i b \mid i \geq 0\}$ $\qquad \mathcal{A}_1 = (\{p_0, p_1\},\ \{a, b\},\ \delta_1, p_0,\ \{p_1\})$

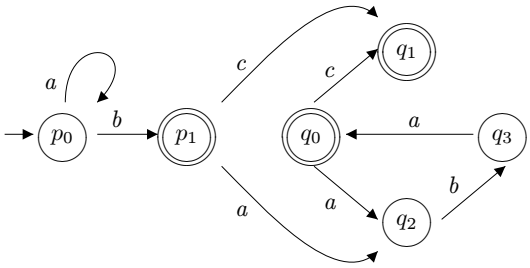
$L_2 = \left\{(aba)^i c^{\{0,1\}} \mid i \geq 0\right\}$ $\qquad \mathcal{A}_2 = (\{q_0, \ldots, q_3\},\ \{a, b, c\},\ \delta_2, q_0,\ \{q_0, q_1\})$

$\mathcal{A} = (\{p_0, p_1, q_0, q_1, q_2, q_3\},\ \{a, b, c\},\ \delta, p_0,\ \{p_1, q_0, q_1\})$

Původní:

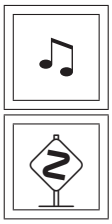


Po zřetězení:



3.3.3 Iterace

Věta 3.5 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci iterace.*



Důkaz: Budeme předpokládat, že některý regulární jazyk L_1 je rozpoznáván automatem
$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$.

Vytváříme jazyk $L = L_1^*$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$.

- $q_0 = q_0^1$,
- $Q = Q_1$,
- $\Sigma = \Sigma_1$,
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$,

$$\delta(p,a) = \begin{cases} \delta_1(p,a) \mid p \notin F_1, \\ \delta_1(p,a) \cup \delta_1(q_0^1, a) \mid p \in F_1 \end{cases}$$

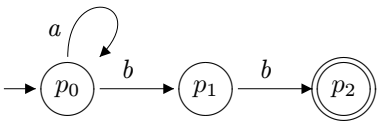
□

Příklad 3.5

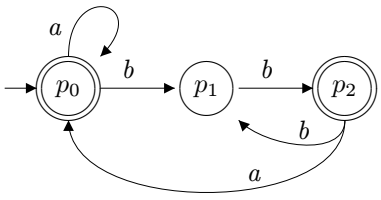
$L_1 = \{a^i bb \mid i \geq 0\}$ $\mathcal{A}_1 = (\{p_0, p_1, p_2\},\ \{a, b\},\ \delta_1, p_0,\ \{p_2\})$

$\mathcal{A} = (\{p_0, p_1, p_2\},\ \{a, b\},\ \delta, p_0,\ \{p_0, p_2\})$

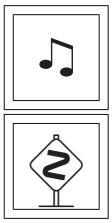
Původní:



Po iteraci:



3.3.4 Pozitivní iterace



Věta 3.6 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci pozitivní iterace.*

Důkaz: Budeme předpokládat, že některý regulární jazyk L_1 je rozpoznáván automatem $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$.

Vytváříme jazyk $L = L_1^+$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$.

- $q_0 = q_0^1$,
- $Q = Q_1$,
- $\Sigma = \Sigma_1$,
- $F = F_1$,

$$\delta(p,a) = \begin{cases} \delta_1(p,a);\ p \notin F_1, \\ \delta_1(p,a) \cup \delta_1(q_0^1, a);\ p \in F_1 \end{cases}$$

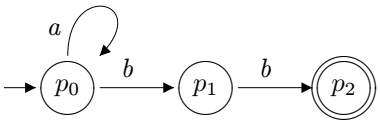
□

Příklad 3.6

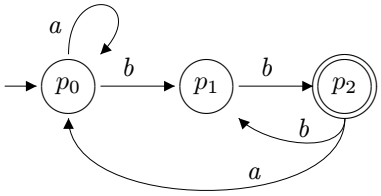
$L_1 = \{a^i bb \mid i \geq 0\}$ $\mathcal{A}_1 = (\{p_0, p_1, p_2\},\ \{a, b\},\ \delta_1, p_0,\ \{p_2\})$

$\mathcal{A} = (\{p_0, p_1, p_2\},\ \{a, b\},\ \delta, p_0,\ \{p_2\})$

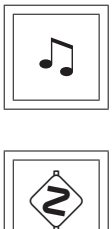
Původní:



Po pozitivní iteraci:



3.3.5 Zrcadlový obraz



Věta 3.7 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zrcadlového obrazu (reverze).*

Důkaz: Budeme předpokládat, že některý regulární jazyk L_1 je rozpoznáván automatem $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$.

Vytváříme jazyk $L = L_1^R$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$.

- *Princip*: obrátíme všechny „cesty“ tak, aby začínaly tam, kde původně končily a naopak.
- q_0 je nově přidán (nelze všechny původní koncové stavy prohlásit za počáteční), nasměrujeme ho tam, odkud původně vedly šipky ke koncovým stavům,
- $Q = Q_1 \cup q_0$,
- $\Sigma = \Sigma_1$,
- $F = \{q_0^1\}$

$$\delta(p,a) = \begin{cases} \{\bar{p} \mid \delta_1(\bar{p},a) \ni p\} & \Big| \; p \neq q_0 \\ \{\bar{p} \mid \delta_1(\bar{p},a) = p\} \cup \{\bar{p} \mid \delta_1(\bar{p},a) = p \ni q_f,\ q_f \in F_1\} & \Big| \; p = q_0 \end{cases}$$ □

Příklad 3.7

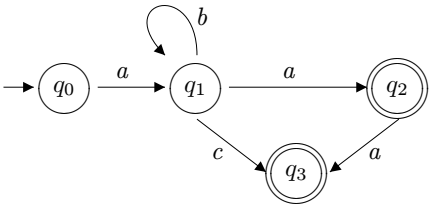
$L_1 = \left\{ab^i a^{\{1,2\}} \mid i \geq 0\right\} \cup \{ab^i c \mid i \geq 0\} = \{ab^i \mid i \geq 0\} \circ \{a, aa, c\}$

$\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\},\ \{a, b, c\},\ \delta_1, q_0,\ \{q_2, q_3\})$

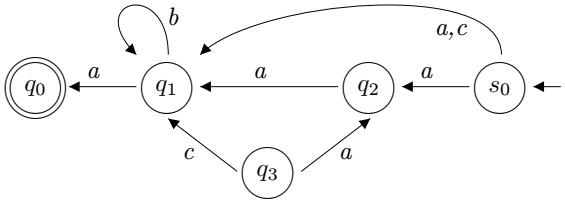
$\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, s_0\},\ \{a, b, c\},\ \delta, s_0,\ \{q_0\})$

$L = L_1^R = \{a, aa, c\} \circ \{b^i a \mid i \geq 0\}$

Původní:



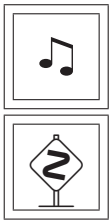
Po zrcadlení:



3.3.6 Průnik

Průnikem dvou jazyků je jazyk obsahující právě ta slova, která jsou v obou zpracovávaných jazycích.

Věta 3.8 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci průniku.*



Důkaz: Budeme předpokládat, že některé dva regulární jazyky L_1 a L_2 jsou rozpoznávány automaty

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ a
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2),\ L_2 = L(\mathcal{A}_2), Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Vytváříme jazyk $L = L_1 \cap L_2$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$.

Do průniku dvou množin (jazyk není nic jiného než množina slov) řadíme právě ty prvky (slova), které jsou v obou množinách zároveň. Když použijeme konečné automaty, spustíme výpočet daného slova na obou automatech zároveň.

Protože podle definice musí automat v každém kroku zpracovat jeden symbol slova, v obou automatech musí být výpočet téhož slova stejně dlouhý (na cestě v grafu je stejný počet stavů), a tyto stavy si tedy mohou vzájemně odpovídat. Proto ve výsledném – simulujícím – automatu budou stavy reprezentovány uspořádanými dvojicemi, kde první prvek dvojice je stav prvního automatu, druhý prvek je stav druhého automatu.

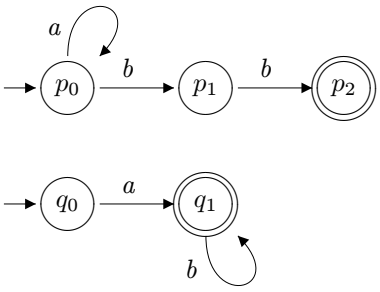
- $Q = \{[q_i, q_j] \mid q_i \in Q_1, q_j \in Q_2\}$,
- $q_0 = [q_0^1, q_0^2]$,
- $F = \{[q_i, q_j] \mid q_i \in F_1, q_j \in F_2\}$,
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (nebo $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, vyjde to nastejno),
- $\delta([q_i, q_j], a) = [\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)],\ a \in \Sigma$

□

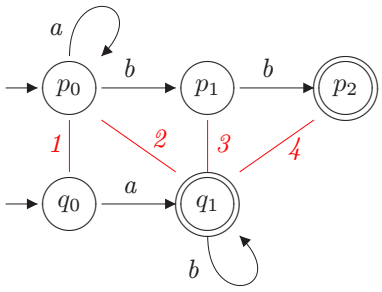
Příklad 3.8

$L_1 = \{a^n bb \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{ab^n \mid n \geq 0\}$

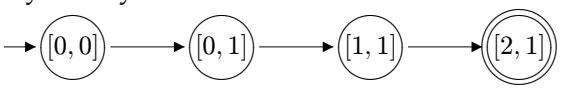
Dva původní automaty:



Pracujeme zároveň v obou automatech:



Výsledný automat:



3.3.7 Homomorfismus

Definice 3.4 (Homomorfismus) *použitý na řetězce znaků s operací zřetězení je jednoznačné zobrazení, které zachovává neutrální prvek (v našem případě prázdný řetězec ε) a také samotnou operaci zřetězení, tedy:*

$h(\varepsilon) = \varepsilon$
$h(a \circ w) = h(a) \circ h(w)$

Zde si pouze ukážeme postup na příkladu, důkaz bude proveden později v jiné kapitole.

Věta 3.9 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci homomorfismu.*

Naznačení postupu důkazu:
Budeme předpokládat, že některý regulární jazyk L_1 je rozpoznáván automatem $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1),\ L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, a dále že existuje homomorfismus h definovaný pro všechny symboly jazyka Σ_1.

Vytváříme jazyk $L = h(L_1)$ a automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(\mathcal{A})$. Postup si ukážeme na příkladu.

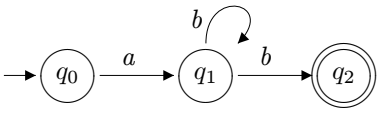
Příklad 3.9

$L_1 = \{ab^i \mid i > 0\}$

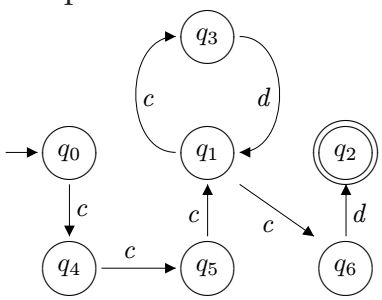
$h(a) = ccc$,
$h(b) = cd$

$h(L_1) = \{c^3(cd)^i \mid i > 0\}$

Původní automat:



Po aplikaci homomorfismu:



Kapitola 4

Regulární výrazy

4.1 Možnosti využití regulárních výrazů

Regulární výrazy se v různých podobách využívají v praxi, zejména při vyhledávání (na internetu nebo třeba hledání souboru v počítači), a nebo tehdy, když chceme něco provést s množinou objektů (souborů, textu v souborech, v databázích, apod.) a potřebujeme tuto množinu nějak specifikovat.

Vyhledávání na internetu (například Google):

`faktoriál pascal OR C++`

– chceme program pro výpočet faktoriálu v Pascalu nebo C++

`mravenec -Ferda`

– chceme stránky o mravencích, ale ne s Ferdou mravencem

Vyhledávání na počítači (Windows, DOS, Unixy):

`*.txt`

– všechny soubory s příponou .txt

`?psa*.*`

– znamená třeba `opsané.doc`, `upsanec.exe`, `xpsa.xls`, atd.

Vyhledávání na počítači (Unixy):

`[a-z]*[0-9]`

– všechny řetězce začínající malým písmenem a končící číslicí

`a[!0-9]*.?`

– vše, co začíná malým a, přímo za ním může být jakýkoliv řetězec, který nezačíná číslicí, pak je tečka a za ní ještě jeden znak

Možnosti použití:

- vyhledávání na internetu,
- vyhledávání souborů nebo čehokoliv dalšího textového na počítači,
- prohledávání souborů na počítači (hledáme řetězec) – ve Windows například `findstr`, v Unixech například `grep`,
- databáze,
- elektronické slovníky (cizojazyčné i výkladové),
- podpora v programovacích jazycích,
- atd.

4.2 Definice

Definice 4.1 (Regulární výraz) *Definujeme pomocnou množinu* $\Phi = \{\emptyset, \varepsilon, +, \circ, *, (,)\}$.

Množina $RV(\Sigma)$ *všech regulárních výrazů nad abecedou* Σ *je nejmenší množina slov taková, že*

- *slova se skládají ze symbolů abecedy* $\Sigma \cup \Phi$, Σ *a* Φ *jsou disjunktní,*
- $\emptyset \in RV(\Sigma)$, $\varepsilon \in RV(\Sigma)$, $a \in RV(\Sigma)$ *pro každé* $a \in \Sigma$,
- *jestliže* $\alpha, \beta \in RV(\Sigma)$, *pak taky*
  $(\alpha + \beta) \in RV(\Sigma)$,
  $(\alpha \cdot \beta) \in RV(\Sigma)$,
  $(\alpha)^* \in RV(\Sigma)$.

Symbol pro zřetězení se obvykle nemusí psát.

Regulární výraz označuje množinu řetězců s danou vlastností, jazyk je také množina řetězců (slov) s danou vlastností $\Rightarrow$ *každý regulární výraz určuje některý jazyk.*

Operace nad jazyky:

$\emptyset$	...	prázdný jazyk
ε	...	$\{\varepsilon\}$ (jazyk obsahující jen slovo s nulovou délkou)
$a,\ a \in \Sigma$	...	$\{a\}$ (jazyk obsahující jen slovo *a* s délkou 1)
$\alpha + \beta$	...	$\{\alpha\} \cup \{\beta\}$ (sjednocení)
$\alpha \cdot \beta$	...	$\{\alpha\} \circ \{\beta\}$ (zřetězení)
$(\alpha)^*$	...	$\{\alpha\}^*$ (iterace)

Sjednocení, zřetězení a iteraci označujeme jako *regulární operace*.

Příklad 4.1

Ukážeme si několik regulárních jazyků a ekvivalentních regulárních výrazů.

$L_1 = \{a^i c(ab)^j \mid i, j \geq 0\}$
$R_1 = a^* c(ab)^*$

$L_2 = \{1^{2i} w \mid i > 0, w \in \{0,1\}^*\}$
$R_2 = (11)(11)^*(0+1)^*$

$L_3 = \{a^i b \mid i > 0\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\}$
$R_3 = aa^*b + b^*a$

$L_4 = \{\varepsilon\} \cup (\{ab^4a^i \mid i \geq 0\} \cup \{b^2a^{2i+1} \mid i \geq 0\}) \circ \{ca^i \mid i \geq 0\}$
$R_4 = \varepsilon + (abbbba^* + bba(aa)^*)ca^*$

4.3 Vztah ke konečným automatům

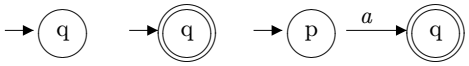
Věta 4.1 *Jazyky určené regulárními výrazy jsou právě regulární jazyky, tedy právě jazyky rozpoznávané konečnými automaty.*

Důkaz: „⇒“ (podle reg. výrazu sestrojíme konečný automat)

Regulární jazyk je konstruován z množin pomocí operátorů sjednocení, zřetězení a iterace. Všechny tyto operátory mají svůj ekvivalent u regulárních výrazů.

Důkaz lze provést matematickou indukcí:

- *báze:* pro regulární výrazy $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}, a \in \Sigma$ dokážeme jednoduše zkonstruovat konečný automat,



- *indukční krok:* předpokládejme, že pro regulární výrazy α a β dokážeme sestrojit konečné automaty (včetně těch v *bázi*),
- již dříve jsme dokázali (pomocí automatů), že třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operacím sjednocení, zřetězení a iterace, tedy použijeme postupy popsané v důkazech těchto operací pro sestrojení konečných automatů reprezentujících reg. výrazy $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ a $(\alpha)^*$.

□

Důkaz: „⇐“ (podle automatu sestrojíme reg. výraz)

Musíme popsat regulárním výrazem všechny cesty vedoucí z počátečního stavu do některého koncového stavu automatu.

Definujeme:

$$R_{ij} = \{w \in \Sigma^* \mid (i, w) \vdash^*_{\mathcal{A}_i} (j, \varepsilon)\}$$

Je to množina všech slov takových, která lze v automatu zpracovat tak, že počáteční stav je i a skončíme ve stavu j.

Jestliže je množina stavů $\{1, 2, \ldots, n\}$, pak jazykem automatu je množina

$$\bigcup_{k \in F} R_{1k}$$

(sjednotíme všechny cesty začínající v počátečním stavu a končící v některém z koncových stavů). □

Pro postupnou konstrukci množin R_{ij} použijeme:

$$R^k_{ij} = \{w \in R_{ij} \mid \text{pokud existuje } m : (i, w) \vdash^+_{\mathcal{A}_i} (m, u) \vdash^+_{\mathcal{A}_i} (j, \varepsilon), \tag{4.1}$$

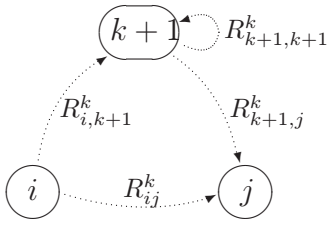
$$w \neq u \neq \varepsilon, \text{ pak } m \leq k\} \tag{4.2}$$

Je to podmnožina množiny R_{ij} taková, že na cestě v automatu, která je zpracováním slova z této množiny, se nacházejí pouze stavy s indexem *menším nebo rovným* číslu k (neplatí pro „krajní stavy“ i a j, ty mohou být i vyšší než k).

Postupujeme dle následujícího vzorce:

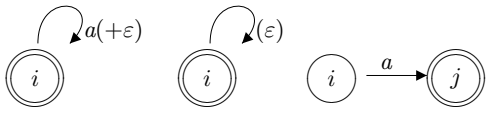
$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} + \left(R_{i,k+1}^{k} \cdot (R_{k+1,k+1}^{k})^{*} \cdot R_{k+1,j}^{k}\right)$$

To je rekurzivní vzorec pro výpočet množin R_{ij}^{k} – nejdřív vezmeme všechna slova, která lze rozpoznat cestou přes stavy $\leq k$, a pak přidáme slova, která jsou zpracovávána cestou obsahující nejméně jednou stav $k+1$ (tedy nejdřív cesta z i do stavu $k+1$, pak případně smyčka přes tento stav a stavy $\leq k$, a potom zpátky ze stavu $k+1$ do j).



Bází rekurze jsou jednoduché automaty, kde zachycujeme přímý přechod ze stavu i do j:

R_{ij}^{0}:



- první případ použijeme, když ve stavu i existuje smyčka přes tento stav: $R_{ii}^{0} = a + \varepsilon$
- druhý případ použijeme pro stav, ve kterém neexistuje smyčka (máme pouze „prázdný přechod“): $R_{ii}^{0} = \varepsilon$
- třetí případ použijeme pro dva různé stavy i a j, mezi kterými vede přímý přechod: $R_{ij}^{0} = a$
- pokud mezi stavy i a j nevede přímý přechod, bude $R_{ij}^{0} = \emptyset$.

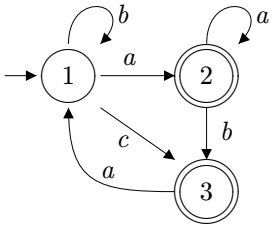
Postup:

- vytvoříme R_{ij}^{0} pomocí definice automatu (z tabulky nebo diagramu),
- podle rekurzívního vzorce vypočteme další množiny R_{ij}^{k} až ke $k = n$,
- platí $R_{ij}^{n} = R_{ij}$, dostaneme pro $i = 1$ a $j \in F$ všechny cesty v automatu vedoucí od počátečního stavu ($i = 1$) do koncových stavů,
- výsledný regulární výraz pro celý automat je $\bigcup_{j \in F} R_{1j}$.

Příklad 4.2

Uvedený postup si ukážeme na automatu se třemi stavy. Upozorňujeme, že složitost postupu narůstá s množstvím stavů geometrickou řadou.

	a	b	c
$\rightarrow 1$	2	1	3
$\leftarrow 2$	2	3	–
$\leftarrow 3$	1	–	–



$R^0_{11} = b + \varepsilon$
$R^0_{12} = a$
$R^0_{13} = c$
$R^0_{21} = \emptyset$
$R^0_{22} = a + \varepsilon$
$R^0_{23} = b$
$R^0_{31} = a$
$R^0_{32} = \emptyset$
$R^0_{33} = \varepsilon$

$R^1_{11} = (b + \varepsilon) + ((b + \varepsilon)(b + \varepsilon)^*(b + \varepsilon)) = b^*$
$R^1_{12} = a + ((b + \varepsilon)(b + \varepsilon)^* a) = b^* a$
$R^1_{13} = c + ((b + \varepsilon)(b + \varepsilon)^* c) = b^* c$
$R^1_{21} = \emptyset + \emptyset = \emptyset$
$R^1_{22} = (a + \varepsilon) + \emptyset = a + \varepsilon$
$R^1_{23} = b + \emptyset = b$
$R^1_{31} = a + (a(b + \varepsilon)^*(b + \varepsilon)) = ab^*$
$R^1_{32} = \emptyset + (a(b + \varepsilon)^* a) = ab^* a$
$R^1_{33} = \varepsilon + (a(b + \varepsilon)^* c) = \varepsilon + ab^* c$

$R^2_{11} = b^* + (b^* a(a + \varepsilon)^* \emptyset) = b^*$
$R^2_{12} = b^* a + (b^* a(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon) = b^* aa^*$
$R^2_{13} = b^* c + (b^* a(a + \varepsilon)^* b) = b^* c + b^* aa^* b$
$R^2_{21} = \emptyset + ((a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^* \emptyset) = \emptyset$
$R^2_{22} = (a + \varepsilon) + ((a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon)) = a^*$
$R^2_{23} = b + ((a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^* b) = a^* b$
$R^2_{31} = ab^* + (ab^* a(a + \varepsilon)^* \emptyset) = ab^*$
$R^2_{32} = ab^* a + (ab^* a(a + \varepsilon)^*(a + \varepsilon)) = ab^* aa^*$
$R^2_{33} = (\varepsilon + ab^* c) + (ab^* a(a + \varepsilon)^* b) = \varepsilon + ab^* c + ab^* aa^* b$

$$R^3_{12} = b^* aa^* + ((b^* c + b^* aa^* b)(\varepsilon + ab^* c + ab^* aa^* b)^* ab^* aa^*) =$$
$$= b^* aa^* + ((b^* c + b^* aa^* b)(ab^* c + ab^* aa^* b)^* ab^* aa^*)$$

$$R^3_{13} = (b^* c + b^* aa^* b) + ((b^* c + b^* aa^* b)(\varepsilon + ab^* c + ab^* aa^* b)^*(\varepsilon + ab^* c + ab^* aa^* b)) =$$
$$= (b^* c + b^* aa^* b) + ((b^* c + b^* aa^* b)(+ab^* c + ab^* aa^* b)^*(\varepsilon + ab^* c + ab^* aa^* b))$$

$R_{12} = R^3_{12},\ R_{13} = R^3_{13}$

$R(\mathcal{A}) = R_{12} + R_{13}$

4.4 Využití vztahu regulárních výrazů k reg. jazykům

4.4.1 Důkazy uzávěrových vlastností regulárních jazyků

Dokážeme uzavřenost třídy regulárních jazyků vzhledem k substituci, a protože homomorfismus je vlastně speciálním případem substituce, tak i uzavřenost třídy regulárních jazyků vzhledem k homomorfismu (zatím jsme si tuto operaci ukázali jen na příkladu).

Definice 4.2 (Substituce) *použitá na řetězce znaků s operací zřetězení je zobrazení, které zachovává neutrální prvek (v našem případě prázdný řetězec ε) a také samotnou operaci zřetězení, tedy:*
$s(\varepsilon) = \varepsilon$
$s(a \circ w) = s(a) \circ s(w)$

Rozdíl oproti homomorfismu:

- homomorfismus přiřazuje každému znaku původní abecedy právě jeden řetězec,
- substituce přiřazuje každému znaku původní abecedy množinu řetětců, v případě regulární substituce jde o množinu, která je reprezentovaná regulárním jazykem,
- homomorfismus je tedy speciální případ substituce.

Věta 4.2 *Třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci* substituce.

Důkaz: Máme jazyk L_1 nad abecedou Σ_1 reprezentovaný regulárním výrazem.

Substituce σ je určena tak, že pro každý prvek abecedy Σ_1, $a \in \Sigma_1$, máme regulární výraz $\sigma(a)$ nad abecedou Δ_a.

Po uplatnění substituce vznikne jazyk $\sigma(L_1)$ nad abecedou

$$\bigcup_{a \in \Sigma_1} \Delta_a$$

tak, že v regulárním výrazu původního jazyka nahradíme všechny symboly abecedy Σ_1 příslušnými regulárními výrazy $\sigma(a)$. □

Příklad 4.3

$L = a^*b + (b^*a)^*$

$\sigma_1(a) = m^*$, $\sigma_1(b) = p^*q + p$
$\Rightarrow \quad \sigma_1(L) = m^*(p^*q + p) + ((p^*q + p)m^*)^*$

$\sigma_2(a) = c$, $\sigma_2(b) = c^*$
$\Rightarrow \quad \sigma_2(L) = c^*c^* + (c^*c)^* = c^*$

$\sigma_3(a) = d^*$, $\sigma_3(b) = d$
$\Rightarrow \quad \sigma_3(L) = d^*d + (d^*d^*)^* = d^*$

$\sigma_4(a) = e^*$, $\sigma_4(b) = f^*$
$\Rightarrow \quad \sigma_4(L) = e^*f^* + (e^*f^*)^* = (e^*f^*)^* = (e + f)^*$

4.4.2 Normovaný automat

Definice 4.3 (Normovaný automat) *Normovaný automat je deterministický automat bez nedosažitelných stavů, jehož stavy jsou označeny jednoznačně (jednoznačným postupem).*

Účel:
O dvou ekvivalentních automatech, které nejsou normované, můžeme říci, že jsou stejné až na označení stavů. Normováním si zjednodušíme porovnávání automatů, protože dva ekvivalentní normované automaty jsou shodné i včetně označení stavů (nemusíme prověřovat různé kombinace uspořádaných dvojic stavů).

Postup: Stavy i automatu uspořádáme podle nejkratších slov z jazyků L_i (budeme indexovat sestupně, „největší“ slovo dostane nejmenší index). Porovnáváme podle délky, stejně dlouhá slova podle abecedy.

- u každého stavu i automatu zjistíme nejkratší slovo příslušného jazyka L_i, je možné, že budeme potřebovat více takových slov,
- seřadíme podle délky sestupně,
- pokud vyjdou dvě stejně dlouhá slova u více stavů, porovnáme je podle abecedy,

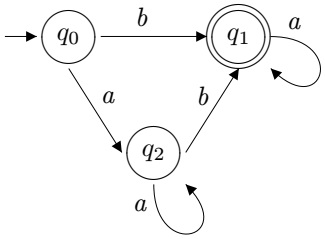
- pokud vyjdou stejná slova u více stavů, použijeme u každého druhé nejkratší slovo (atd. dokud nenajdeme rozdíl, ten najdeme určitě – jsou to různé jazyky),
- seřazené stavy oindexujeme (pojmenujeme) od 1.

Příklad 4.4

Znormujeme automat $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a, b\},\ \delta,\ q_0,\ \{q_1\})$

Původní automat:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_1	
q_2	q_2	q_1



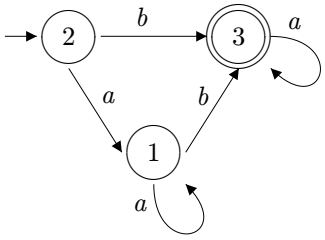
$L(q_0) = ba^* + aa^*b$, nejmenší slova jsou $b, ab, ba, aab, \ldots$
$L(q_1) = a^*$, nejmenší slova jsou $\varepsilon, a, aa, \ldots$
$L(q_2) = a^*b$, nejmenší slova jsou $b, ab, aab, \ldots$

Jak vidíme, nejkratší slovo obsahuje jazyk $L(q_1)$, proto tomuto jazyku přiřadíme nejvyšší index (3).

Zbývající dva jazyky mají první dvě nejmenší slova stejná, až v třetím slově se liší – $ba < aab$ a proto jazyku $L(q_0)$ přiřadíme druhý nejvyšší index (2).

Po znormování:

	a	b
$\rightarrow 2$	1	3
$\leftarrow 3$	3	
2	1	3



Jak si můžeme všimnout na příkladu 4.4 a jak můžeme také zjistit úvahou, koncové stavy většinou mívají přiřazeny nejvyšší indexy a proti směru výpočtu (tedy směrem od koncových k počátečnímu stavu) se indexy obvykle snižují. To však není tak úplně pravidlem – třeba v příkladu 4.4 nemá počáteční stav nejnižší index.

4.4.3 Minimalizace konečného automatu

Minimalizací budeme rozumět především snížení počtu stavů automatu. Tento postup může být užitečný při porovnávání jazyků rozpoznávaných dvěma (napo-

hled) různými automaty, ale také při optimalizaci programů vytvořených stavovým programováním podle konečného automatu.

Definice 4.4 (Ekvivalentní automaty) *Dva konečné automaty $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ jsou ekvivalentní, pokud rozpoznávají tentýž jazyk, tj. $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$.*

Definice 4.5 (Minimální automat) *Konečný automat je minimální, jestliže neexistuje žádný s ním ekvivalentní automat, který má menší počet stavů.*

Věta 4.3 *Ke každému konečnému automatu lze sestrojit ekvivalentní minimální konečný automat.*

Postup:

- vytvoříme ekvivalentní deterministický automat,
- odstraníme nedosažitelné stavy,
- vytvoříme ekvivalentní redukovaný automat,
- vhodně přeznačíme stavy – znormujeme automat.

Využijeme konstrukci podílového automatu (viz podílová grupa apod.).

Redukce stavů automatu

Redukce stavů automatu $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- pro všechny stavy q automatu vytvoříme „pomocné“ automaty $\mathcal{A}_q$ tak, že vezmeme původní automat $\mathcal{A}$ a stav q použijeme jako počáteční, tedy

$$\forall q \in Q: \quad \mathcal{A}_q = (Q, \Sigma, \delta, q, F),$$

  označíme $L_q = L(\mathcal{A}_q)$,
- zavedeme relaci ekvivalence $\sim$ na množině stavů automatu Q, definujeme ji takto: pro jakékoliv dva stavy $p, q \in Q$ platí: $p \sim q \iff L_p = L_q$ (dva stavy jsou ekvivalentní, pokud se rovnají jazyky příslušných pomocných automatů),
- když při postupu ze dvou různých stavů dostáváme totéž, pak jsou tyto stavy zaměnitelné $\Rightarrow$ můžeme je „shrnout“ do jediného stavu, tedy všechny cesty mířící do q přesměrujeme do p a stav q odstraníme,

- toto odstraňování provádíme tak dlouho, dokud v automatu existují ekvivalentní stavy.

Definice 4.6 (Podílový automat) *Nechť $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat bez nedosažitelných stavů.*

Vytvoříme třídy ekvivalence $\sim$ obsahující některý stav $q \in Q$:

$$[q] = \{p \mid p \in Q, p \sim q\}$$

Podílový automat $\mathcal{A}_\sim$ podle ekvivalence $\sim$ je $\mathcal{A}_\sim = \{Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0], F_\sim)$, kde

- $Q_\sim = \{[q] \mid q \in Q\}$,
- $\delta_\sim([q], a) = [\delta(q, a)]$,
- $F_\sim = \{[f] \mid f \in F\}$

Konstrukci podílového automatu použijeme pro redukci stavů původního automatu, proto o takto vytvořeném automatu budeme hovořit také jako o *redukovaném*.

Je poměrně snadné dokázat, že podílový automat je ekvivalentní s původním automatem („shrnujeme“ cesty, které jsou shodné). Na příkladu si ukážeme vytvoření podílového automatu včetně hledání ekvivalentních stavů.

Postup: Vytvoříme automaty $\mathcal{A}_i = (Q, \Sigma, \delta, i, F)$ (jako počáteční stav použijeme $i \in Q$), zajímají nás jazyky $L_i = L(\mathcal{A}_i)$. Ty pak porovnáme a zpracujeme ekvivalentní.

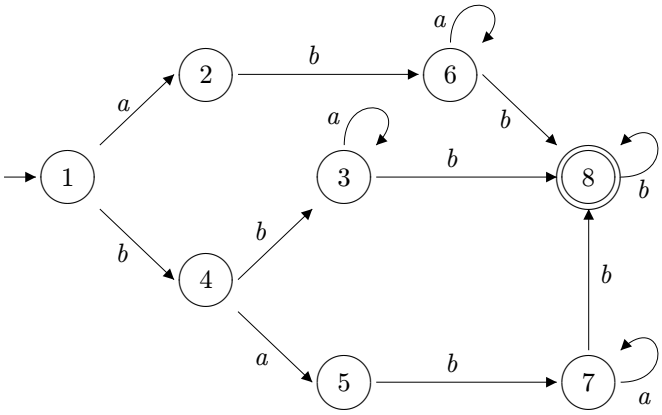
Budeme postupovat následovně:

- vytvoříme množiny R^0_{ij}, rekurzívně vypočteme další množiny R^k_{ij} až ke $k = 8$,
- zjistíme jazyky
$$L(i) = \bigcup_{f \in F} R^8_{if}$$
a porovnáme je, pokud některé dva stavy rozpoznávají stejný jazyk, jeden z nich odstraníme s přesměrováním všech přímých cest vedoucích do tohoto stavu,
- automat převedeme do normálního tvaru (znormujeme).

Příklad 4.5

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, 1, F) = (\{1, 2, \ldots, 8\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{8\})$ deterministický bez nedosažitelných stavů

	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	$\emptyset$	6
3	3	8
4	5	3
5	$\emptyset$	7
6	6	8
7	7	8
$\leftarrow 8$	$\emptyset$	8



Jazyky L_i vytvoříme postupem popsaným výše:

$L_1 = R^8_{18} = bba^*bb^* + aba^*bb^* + baba^*bb^*$

$L_2 = R^8_{28} = ba^*bb^*$

$L_3 = R^8_{38} = a^*bb^*$

$L_4 = R^8_{48} = ba^*bb^* + aba^*bb^*$

$L_5 = R^8_{58} = ba^*bb^* \quad = L_2$

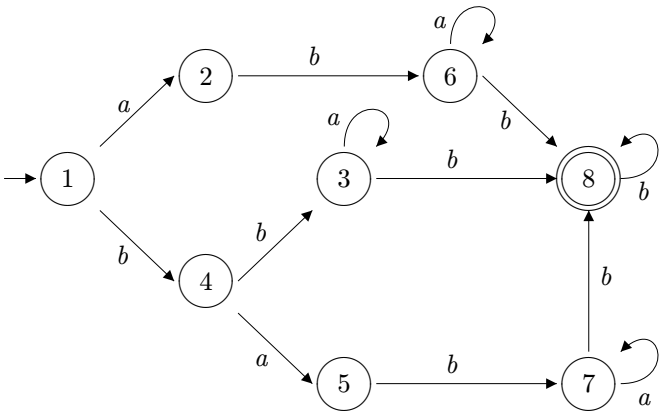
$L_6 = R^8_{68} = a^*bb^* \quad = L_3$

$L_7 = R^8_{78} = a^*bb^* \quad = L_3$

$L_8 = R^8_{88} = b^*$ $\Rightarrow$ zpracujeme stavy 5, 6, 7.

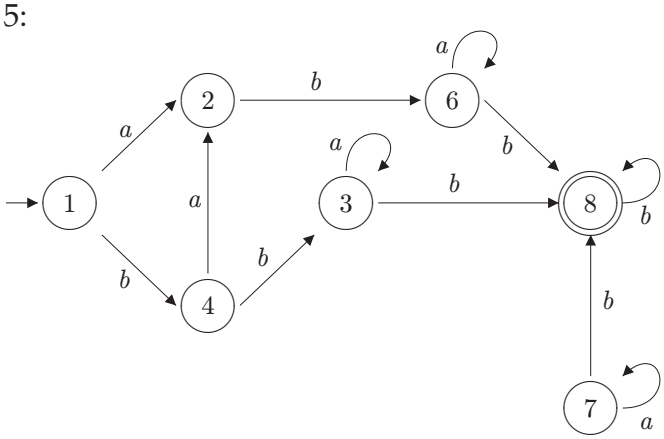
Původní automat:

	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	$\emptyset$	6
3	3	8
4	5	3
5	$\emptyset$	7
6	6	8
7	7	8
$\leftarrow 8$	$\emptyset$	8



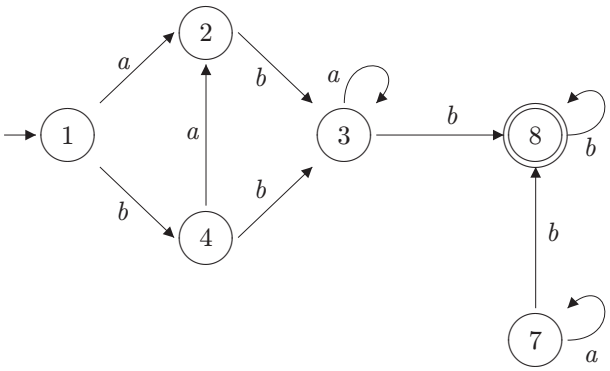
Po odstranění stavu 5:

	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	$\emptyset$	6
3	3	8
4	2	3
6	6	8
7	7	8
$\leftarrow 8$	$\emptyset$	8



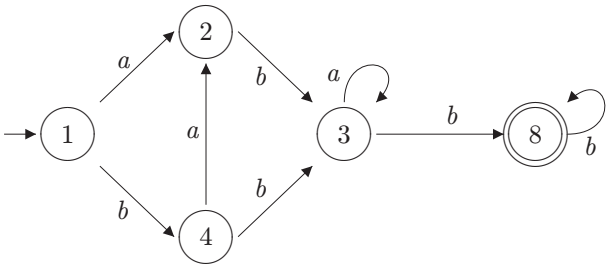
Po odstranění stavu 6:

	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	$\emptyset$	3
3	3	8
4	2	3
7	7	8
$\leftarrow 8$	$\emptyset$	8



Po odstranění stavu 7:

	a	b
$\rightarrow 1$	2	4
2	$\emptyset$	3
3	3	8
4	2	3
$\leftarrow 8$	$\emptyset$	8



Takto vytvořený automat je už sice redukovaný, ale ještě ne minimální. Abychom mohli splnit podmínku snadného porovnávání automatů, musíme náš automat ještě normovat.

Využijeme jazyky dílčích automatů, které jsme zjistili dříve:

$L_1 = R^8_{18} = bba^*bb^* + aba^*bb^* + baba^*bb^*$

$L_2 = R^8_{28} = ba^*bb^*$

$L_3 = R^8_{38} = a^*bb^*$

$L_4 = R^8_{48} = ba^*bb^* + aba^*bb^*$

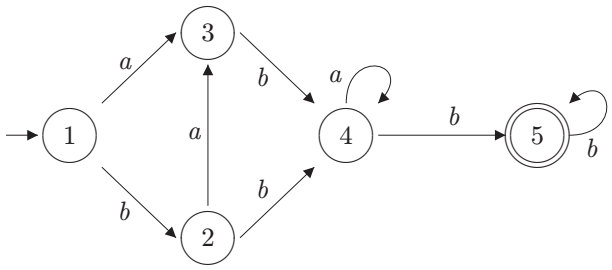
$L_8 = R^8_{88} = b^*$

Z těchto jazyků vybereme nejkratší slova a ta porovnáme:

Stav i	*Nejkratší slovo jazyka* L_i	*Nové označení stavu*
1	abb	1
2	$bb,\ bab, \ldots$	2
3	b	4
4	$bb, abb, \ldots$	3
8	ε	5

Výsledný automat po znormování:

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	$\emptyset$	4
3	2	4
4	4	5
$\leftarrow 5$	$\emptyset$	5



Kapitola 5

Formální gramatiky

Až dosud jsme se zabývali možnostmi zjišťování, zda zadané slovo nebo posloupnost signálů vyhovuje daným podmínkám, tedy zda patří do určitého jazyka. V této kapitole se budeme zabývat možnostmi generování slov vyhovujících daným podmínkám, tedy patřících do určitého jazyka.

5.1 Generování slov jazyka

Definice 5.1 (Základní pojmy formálních gramatik)

- Abeceda *je neprázdná konečná množina, jejíž prvky nazýváme znaky, symboly, signály.*
- Slovo nad abecedou Σ *je konečná posloupnost symbolů abecedy* Σ*, tj.* $w \in \Sigma^*$.
- Jazyk na abecedou Σ *je množina slov* L *nad abecedou* Σ*, tj.* $L \subseteq \Sigma^*$.
- Automat rozpoznává *slovo, tj. dostane již existující slovo na vstup a rozhodne, zda patří do daného jazyka.*
- Gramatika vytváří (generuje) *slova daného jazyka, popisuje strukturu jazyka.*

Použití gramatik při generování slov si nejdřív ukážeme na příkladu.

Příklad 5.1

$L = a^*(bc + cb^*c)$

$S \to aS$ ①

$S \to bA$ ②

$S \to cB$ ③

$A \to c$ ④

$B \to bB$ ⑤

$B \to c$ ⑥

Generujeme slovo $cbbc$: $S \Rightarrow cB \Rightarrow cbB \Rightarrow cbbB \Rightarrow cbbc$ Není co přepisovat ⇒ konec

Úspornější a přehlednější způsob zápisu (shrneme pravidla se stejnou levou stranou na jeden řádek):

$S \to aS \mid bA \mid cB$ ①,②,③

$A \to c$ ④

$B \to bB \mid c$ ⑤,⑥

Definice 5.2 (Formální gramatika) *Formální gramatika je uspořádaná čtveřice (posloupnost)* $G = (N, T, P, S)$*, kde*

- N *je neprázdná konečná množina neterminálních symbolů (neterminální abeceda),*
- T *je neprázdná konečná množina terminálních symbolů (terminální abeceda), platí* $N \cap T = \emptyset$*,*
- P *je neprázdná konečná množina pravidel,* $P \subseteq ((N \cup T)^* N (N \cup T)^*) \times (N \cup T)^*$ *jinak:* $\alpha A \beta \to \gamma$, *kde* $A \in N,\ \alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$
- S *je startovací symbol gramatiky,* $S \in N$*.*

Definice 5.3 (Relace kroku odvození ⇒) *Nechť* $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$ *pro gramatiku* $G = (N, T, P, S)$*.*

Slovo w_2 *lze přímo (v jednom kroku) odvodit ze slova* w_1 *(píšeme* $w_1 \Rightarrow_G w_2$*, obvykle stačí* $\Rightarrow$*), jestliže existuje pravidlo* $(\alpha \to \beta) \in P$*,* $w_1 = x_1 \alpha x_2,\ w_2 = x_1 \beta x_2$ *(podřetězec* α *nahradíme řetězcem* β*).*

Symbol $\Rightarrow^*$ je reflexivním tranzitivním uzávěrem relace $\Rightarrow$, tj. například zápis $w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow w_3 \Rightarrow w_4 \Rightarrow w_5$ lze zkrátit na $w_1 \Rightarrow^* w_5$.

Definice 5.4 (Jazyk) *Jazyk generovaný gramatikou $G = (N, T, P, S)$ je množina*

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Definice 5.5 (Větná forma, věta) Větná forma *gramatiky $G = (N, T, P, S)$ je kterékoliv slovo α takové, že $S \Rightarrow_G^* \alpha$, tedy je to kterékoliv slovo, které lze odvodit ze startovacího symbolu pomocí pravidel gramatiky.*

Věta *gramatiky $G = (N, T, P, S)$ je taková větná forma w, která se skládá pouze z terminálních symbolů, tedy $S \Rightarrow_G^* w,\ w \in T^*$. Můžeme říci, že jazyk generovaný gramatikou je množina všech vět této gramatiky.*

Definice 5.6 (Ekvivalence gramatik) *Gramatiky G_1 a G_2 jsou* ekvivalentní, *pokud generují tentýž jazyk, tedy $L(G_1) = L(G_2)$.*

Definice 5.7 (Derivace) *Derivace slova α délky n v gramatice $G = (N, T, P, S)$ je posloupnost slov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n$ taková, že*

- $\alpha_1 = S$,
- $\alpha_n = \alpha$,
- $\alpha_i \Rightarrow_G \alpha_{i+1}\ \forall i :\ 1 \leq i \leq n-1$.

5.2 Regulární gramatiky

Definice 5.8 (Regulární gramatika) *Regulární gramatika je taková formální gramatika $G = (N, T, P, S)$, kde P je množina pravidel ve tvaru*
$A \to a$ nebo $A \to aB$, kde $A, B \in N,\ a \in T$,
pokud se S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla, může existovat i pravidlo $S \to \varepsilon$.

Věta 5.1 *Jazyky generované regulárními gramatikami jsou právě regulární jazyky.*

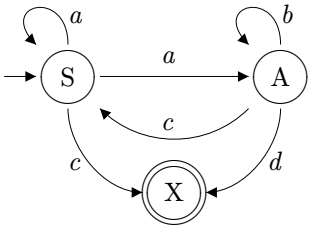
Postup a princip důkazu si nejdřív ukážeme na příkladech.

Příklad 5.2

$G = (\{S, A\},\ \{a, b, c, d\},\ P,\ S)$, kde v P jsou pravidla
$S \to aS \mid aA \mid c$
$A \to bA \mid cS \mid d$

Vytvořený konečný automat:

	a	b	c	d
$\rightarrow S$	S, A		X	
A		A	S	X
$\leftarrow X$				



$L = a^*(ab^*ca^*)^*(c + ab^*d) = a^*ab^*(ca^*ab^*)^*d + a^*(ab^*ca^*)^*c$

Příklad 5.3

$G = (\{S, A, B\},\ \{a, b\},\ P,\ S)$, kde v P jsou pravidla

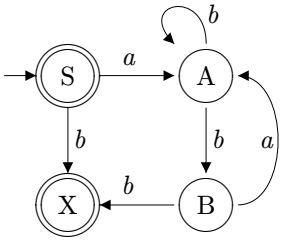
$S \rightarrow aA \mid b \mid \varepsilon$

$A \rightarrow bA \mid bB$

$B \rightarrow aA \mid b$

Vytvořený konečný automat:

	a	b
$\leftrightarrow S$	A	X
A		A, B
B	A	X
$\leftarrow X$		



$L = \varepsilon + b + ab^*b(ab^*b)^*b$

Důkaz: „⇒“ ($G = (N, T, P, S) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$)

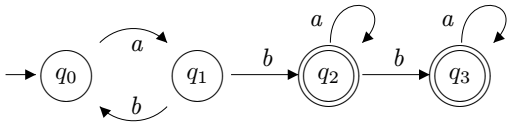
- abeceda $\Sigma = T$, počáteční stav $q_0 = S$,
- stavy $Q = N \cup \{X\}$, musí být $X \notin N$ (X je nově přidaný),
- koncové stavy:
  - pokud $(S \rightarrow \varepsilon) \in P$, pak $F = \{X, S\}$,
  - jinak $F = \{X\}$,
- δ funkce:
  - pro každé pravidlo $(U \rightarrow aV) \in P$ je $\delta(U, a) \ni V$,
  - pro každé pravidlo $(U \rightarrow a) \in P$ je $\delta(U, a) \ni X$.

□

Příklad 5.4

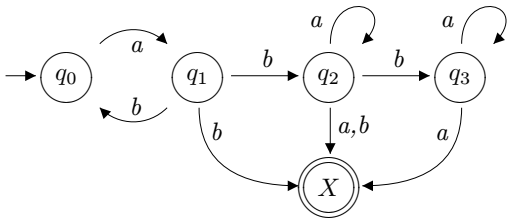
$\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2, q_3\})$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	
q_1		q_0, q_2
$\leftarrow q_2$	q_2	q_3
$\leftarrow q_3$	q_3	



Automat upravíme, abychom mohli použít postup přesně opačný postupu převodu gramatiky na automat:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	
q_1		q_0, q_2, X
q_2	q_2, X	q_3, X
q_3	q_3, X	
$\leftarrow X$		



Výsledná gramatika a její úprava (jen nahradíme neterminály velkými písmeny):

$q_0 \rightarrow aq_1$
$q_1 \rightarrow bq_0 \mid bq_2 \mid b$
$q_2 \rightarrow aq_2 \mid bq_3 \mid a \mid b$
$q_3 \rightarrow aq_3 \mid a$

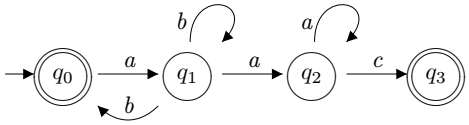
$S \rightarrow aA$
$A \rightarrow bS \mid bB \mid b$
$B \rightarrow aB \mid bC \mid a \mid b$
$C \rightarrow aC \mid a$

$L = (ab)^*aba^* + (ab)^*aba^*ba^* \;=\; (ab)^*aba^* \, (\varepsilon + ba^*)$

Příklad 5.5

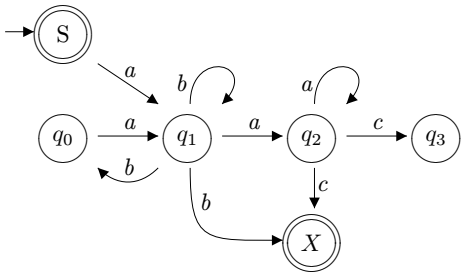
$\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0, q_3\})$

	a	b	c
$\leftrightarrow q_0$	q_1		
q_1	q_2	q_0, q_1	
q_2	q_2		q_3
$\leftarrow q_3$			



Upravíme automat, tentokrát musíme řešit i počáteční stav:

	a	b	c
q_0	q_1		
q_1	q_2	q_0, q_1, X	
q_2	q_2		X
q_3			
$\leftarrow X$			
$\leftrightarrow S$	q_1		



Stav q_3 se stává nadbytečným, neexistuje žádná cesta vedoucí od něho do koncového stavu.

Výsledná gramatika a převedení neterminálů na velká písmena:

$S \to aq_1 \mid \varepsilon$ $\qquad$ $S \to aB \mid \varepsilon$

$q_0 \to aq_1$ $\qquad$ $A \to aB$

$q_1 \to aq_2 \mid bq_0 \mid bq_1 \mid b$ $\qquad$ $B \to aC \mid bA \mid bB \mid b$

$q_2 \to aq_2 \mid c$ $\qquad$ $C \to aC \mid c$

$L = \varepsilon + (ab^*b)^*ab^*(b + aa^*c)$

Důkaz: „⇐“ ($\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \longrightarrow \quad G = (N, T, P, S)$)

- upravíme automat – upravený je $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$
  - $F' = \{X\}$,
  - duplikujeme přímé přechody vedoucí do původních koncových stavů, vytvořené přesměrujeme do X,
  - pokud $q_0 \in F$, vytvoříme nový počáteční stav S, $F' = \{X, S\}$, $q_0' = S$, $\forall a \in \Sigma : \delta'(S, a) = \delta(q_0, a)$,
- $T = \Sigma,\ N = Q' - \{X\}$, startovací symbol je q_0',
- pravidla P:
  - pro všechny přechody $\delta(q_i, a) \ni q_j \quad (q_i \to aq_j) \in P$, pokud $q_j \notin F'$,
  - jinak $(q_i \to a) \in P$,
  - jestliže $S \in F'$, pak $(S \to \varepsilon) \in P$.

□

5.3 Chomského hierarchie gramatik

Po jazykovědci Noamu Chomském je pojmenována hierarchie základních typů formálních gramatik. Gramatiky v této hierarchii mají jedno společné – *sekvenční* způsob generování slova. To znamená, že v každém kroku odvození je použito právě jedno pravidlo na právě jednom místě v přepisovaném slově.

V hierarchii najdeme čtyři typy gramatik označených čísly 0, 1, 2, 3. *Třídy* (tedy množiny) *jazyků* generované těmito gramatikami označujeme $\mathcal{L}(0), \mathcal{L}(1), \mathcal{L}(2), \mathcal{L}(3)$. Mimo hierarchii, ale v těsné vazbě na ni, existují další typy gramatik, na které se také podíváme.

5.3.1 Gramatiky v Chomského hierarchii

Chomského hierarchie zahrnuje tedy čtyři typy gramatik. U každého typu si uvedeme případný slovní název a dále označení, které se kromě $\mathcal{L}(\textit{číslo})$ používá pro označení související třídy jazyků, tvar pravidel a ekvivalentní stroj, který rozpoznává stejnou třídu jazyků.

Definice 5.9 (Gramatiky Chomského hierarchie)

1. Gramatiky typu 0 *(rekurzívně vyčíslitelné, RE – Recursively Enumerable)*
   - *žádné zvláštní podmínky na tvar pravidel (jen na levé straně musí být alespoň jeden neterminál):*

     $$(N \cup T)^* N (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$$

     jiný zápis: $\alpha A \beta \to \gamma, \quad A \in N, \alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$
   - *ekvivalentní stroj: Turingův stroj (TS)*
2. Gramatiky typu 1 *(nezkracující, monotónní)*
   - *pro pravidla musí navíc kromě podmínek gramatik typu 0 platit:*

     $$\alpha \to \beta, \quad |\alpha| \leq |\beta|, \quad \alpha, \beta \in (N \cup T)^*$$

   - *může existovat pravidlo $S \to \varepsilon$, pokud se S nenachází na pravé straně žádného pravidla*

- *gramatiky se nazývají nezkracující, protože generované slovo se po jednotlivých krocích buď prodlužuje, nebo se jeho délka nemění, ale nezkracuje se*
- *ekvivalentní stroj: lineárně ohraničený automat (LOA, LBA – Linearly Bounded Automaton)*

3. Gramatiky typu 2 *(bezkontextové, CF – Context-free)*

   - *pravidla ve tvaru*
   $$A \to \alpha, \quad A \in N, \alpha \in (N \cup T)^*$$
   - *ekvivalentní stroj: zásobníkový automat (ZA)*

4. Gramatiky typu 3 *(regulární, REG – Regular)*

   - *pravidla ve tvaru*
   $$A \to aB,\ A \to a, \quad A, B \in N, a \in T$$
   - *může existovat pravidlo $S \to \varepsilon$, pokud se S nenachází na pravé straně žádného pravidla*
   - *ekvivalentní stroj: konečný automat (KA)*

Věta 5.2 *Mezi třídami jazyků generovaných gramatikami v Chomského hierarchii jsou tyto vztahy:*

$$\mathcal{L}(3) \subset \mathcal{L}(2) \subset \mathcal{L}(1) \subset \mathcal{L}(0)$$

Pro korektní důkaz tohoto tvrzení ještě nemáme dostatek znalostí, proto si jen uvedeme jazyky, které lze použít v důkazu prvních dvou inkluzí:

$L_{CF} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \quad \in (\mathcal{L}(2) - \mathcal{L}(3))$

$L_{MON} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \quad \in (\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(2))$

5.3.2 Související typy gramatik

Dále v textu budeme také pracovat s těmito typy gramatik:

1. *Kontextové gramatiky* (CS – Context Sensitive)

   - pravidla ve tvaru
   $$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \quad \gamma \neq \varepsilon, A \in N, \alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$$

- může existovat pravidlo $S \to \varepsilon$, pokud se S nenachází na pravé straně žádného pravidla
- tato třída jazyků je ekvivalentní třídě jazyků typu 1 (nezkracujícím) – $CS \cong \mathcal{L}(1)$

2. *Lineární gramatiky* (LIN – Linear)

   - pravidla ve tvaru

   $$A \to \alpha B \beta,\ A \to \alpha, \quad A, B \in N, \alpha, \beta \in T^*$$

   - speciální případy lineárních gramatik:
     - pravolineární ($RLIN$) $A \to \beta B,\ A \to \beta$, stejně definované jako regulární
     - levolineární ($LLIN$) $A \to B\beta,\ A \to \beta$
   - LIN je speciální případ CF (bezkontextových) gramatik, dá se dokázat, že $LIN \subset LIN$
     $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}^+ \quad \in (CF - LIN)$
   - $RLIN = LLIN = REG$, dá se dokázat, že $REG \subset LIN$
     $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \quad \in (LIN - REG)$

3. *Gramatiky generující konečné jazyky* (FIN – Finite languages)

   - konečné jazyky lze generovat regulárními gramatikami:
     $S \to$ první slovo | druhé slovo | třetí slovo | ...
   - platí $FIN \subset REG$
     $L = a^* \quad \in (REG - FIN)$

5.4 Operace nad slovy a jazyky

Následující definice se budou týkat jazyků L_1 a L_2 nad abecedou Σ, případně slov w_1 a w_2 nad touto abecedou.

Definice 5.10 (Operace zřetězení) Operace zřetězení slov *je definována následovně: nechť* $w_1 = a_1 a_2 \ldots a_n$, $w_2 = b_1 b_2 \ldots b_m$. *Jejich zřetězením je slovo* $w = w_1 \cdot w_2 = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$ *o délce* $n + m$.

Operace zřetězení jazyků *je definována následovně: Zřetězením jazyků L_1 a L_2 je jazyk*

$$L = L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

Definice 5.11 (Operace sjednocení jazyků) *Sjednocením jazyků L_1 a L_2 je jazyk*

$$L = L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$$

Definice 5.12 (Operace průniku jazyků) *Průnikem jazyků L_1 a L_2 je jazyk*

$$L = L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \& w \in L_2\}$$

Definice 5.13 (Operace komplementu (doplňku) jazyka) *Komplementem jazyka L_1 v abecedě Σ je jazyk*

$$L = \overline{L_1} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L_1\}$$

Definice 5.14 (Operace uzávěru jazyka) *(iterace, nekonečné sjednocení) uzávěrem jazyka L_1 je jazyk*

$$L = L_1^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^i, \text{ kde } L_1^i = \underbrace{L_1 \cdot L_1 \cdot \ldots \cdot L_1}_{\text{celkem i}\times}$$

Definice 5.15 (Operace bez ε-nového uzávěru jazyka) *Je definována podobně:*

$$L = L_1^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_1^i, \text{ kde } L_1^i = \underbrace{L_1 \cdot L_1 \cdot \ldots \cdot L_1}_{\text{celkem i}\times}$$

(rozdíl je v indexu pod sumou, zde je $i > 0$)

Definice 5.16 (Operace zrcadlového obrazu) Operace zrcadlového obrazu slova *je definována následovně: nechť $w_1 = a_1 a_2 \ldots a_n$. Jeho zrcadlovým obrazem je slovo $w = w_1^R = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$.*

Operace zrcadlového obrazu jazyka *je definována následovně: Zrcadlovým obrazem jazyka L_1 je jazyk*

$$L = L_1^R = \{w^R \mid w \in L_1\}$$

Kapitola 6

Bezkontextové jazyky

V této kapitole se budeme zabývat jazyky odpovídajícími třídě jazyků $\mathcal{L}(2)$ (resp. CF) v Chomského hierarchii, tedy bezkontextovým gramatikám.

6.1 Bezkontextové gramatiky

Definice 6.1 (Bezkontextová gramatika) *Bezkontextová gramatika je gramatika, jejíž pravidla jsou ve tvaru $A \to \alpha$, kde $A \in N, \alpha \in (N \cup T)^*$*

Příklad 6.1

$L_1 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

$G_1 = (\{S\}, \{a,b\}, P, S)$, kde množina P obsahuje pravidla $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

Derivace:

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abbSbba \Rightarrow abbbba$

Příklad 6.2

$L_2 = (a^n b^m c^n \mid m, n > 0\}$

$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde množina P obsahuje pravidla

$S \to aSc \mid aAc$

$A \to bA \mid b$

Derivace:

$S \Rightarrow aSc \Rightarrow aaAcc \Rightarrow aabAcc \Rightarrow aabbAcc \Rightarrow aabbbcc$

Příklad 6.3

$L_3 = \{0^n 1^m \mid 1 \leq n \leq m\}$
$G_3 = (\{A\}, \{0,1\}, P, A)$, kde množina P obsahuje pravidla
$A \rightarrow 0A1 \mid A1 \mid 01$

Derivace:
$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 0A11 \Rightarrow 00111$

Příklad 6.4

$L_4 =$ jazyk matematických výrazů obsahujících

- celá čísla
- operátory $+, *$ (bez ohledu na prioritu)
- závorky

$G_4 = (\{E\}, \{n, +, *,), (\}, P, E)$, kde množina P obsahuje pravidla
$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid n$

Derivace:
$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow n + E * E \Rightarrow n + (E) * E \Rightarrow$
$\Rightarrow n + (E) * n \Rightarrow n + (n) * n$

Definice 6.2 (Derivační strom) *Derivační strom některé derivace v bezkontextové gramatice $G = (N, T, P, S)$ je uspořádaný kořenový strom (tj. souvislý acyklický graf), jehož uzly jsou ohodnoceny symboly z množiny $N \cup T \cup \{\varepsilon\}$ a platí:*

- *všechny uzly kromě kořene mají jednoho předchůdce, kořen nemá žádného,*
- *pokud je některý uzel ohodnocen symbolem A, jeho následníci po řadě symboly a_1, a_2, $\ldots$ a_n, pak v množině pravidel P gramatiky existuje pravidlo $A \rightarrow a_1 a_2 \ldots a_n$,*
- *jestliže uzel ohodnocený symbolem A má jediného následníka ohodnoceného symbolem ε, pak v P existuje pravidlo $A \rightarrow \varepsilon$,*
- *kořen stromu je ohodnocen S, listy jsou ohodnoceny symboly $\in T \cup \{\varepsilon\}$, ostatní symboly $\in N$.*

V každém kroku vytváření derivačního stromu tvoří listy větnou formu v gramatice.

Příklad 6.5

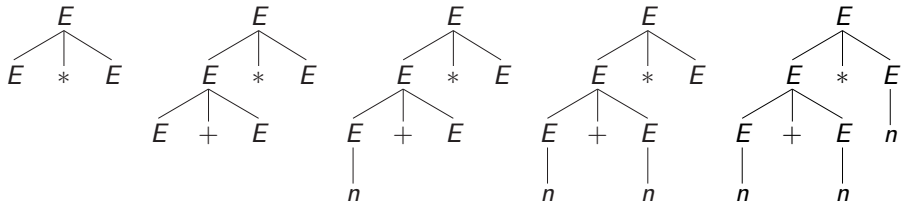
Pravidla:

$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid n$

Derivace:

$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow n + E * E \Rightarrow n + n * E \Rightarrow n + n * n$

Budeme postupně vytvářet derivační strom této derivace:



Obrázek 6.1: Postupné vytvoření derivačního stromu

6.2 Vlastnosti bezkontextových gramatik

Zde se podíváme především na některé speciální tvary bezkontextových gramatik (u každého tvaru si uvedeme i vztah k obecné definici).

Tyto speciální tvary mají smysl především tehdy, když navrhneme gramatiku pro určitý účel a potřebujeme, aby měla určité vlastnosti – převedeme do některého speciálního tvaru, který tyto vlastnosti má (například z důvodu snadnější programovatelnosti, třeba u syntaktické analýzy překladače).

6.2.1 Bezkontextová gramatika nezkracující

Definice 6.3 (Nezkracující bezkontextová gramatika) *Nezkracující bezkontextovou gramatikou (nevypouštějící) nazýváme takovou gramatiku, kde množina pravidel P buď neobsahuje žádné ε-pravidlo, a nebo existuje jediné ε-pravidlo $S \to \varepsilon$ a zároveň S není na pravé straně žádného pravidla.*

Věta 6.1 *Nechť G je bezkontextová gramatika. Pak existuje gramatika G' bez ε-pravidel taková, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.*

Důkaz: Pro každý symbol $A \in N$, který lze přepsat na ε:

- pro každé pravidlo $B \to \beta_0 A \beta_1 A \ldots A \beta_n$, kde je A na pravé straně pravidla, simulujeme použití pravidla $A \to \varepsilon$ na různých místech – přidáme pravidla

$$\begin{aligned}
B \to\ & \beta_0 \quad \beta_1 A \beta_2 \ldots \beta_{n-1} A \beta_n \\
B \to\ & \beta_0 A \beta_1 \quad \beta_2 \ldots \beta_{n-1} A \beta_n \\
& \ldots \\
B \to\ & \beta_0 A \beta_1 A \beta_2 \ldots \beta_{n-1} \quad \beta_n \\
B \to\ & \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \ldots \beta_{n-1} A \beta_n \\
& \ldots \\
B \to\ & \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \ldots \beta_{n-1} \quad \beta_n
\end{aligned}$$

- odstraníme pravidlo $A \to \varepsilon$

□

Věta 6.2 *Nechť G je bezkontextová gramatika. Pak existuje gramatika G' bez ε-pravidel nezkracující taková, že $L(G') = L(G)$.*

Důkaz: Postup závisí na tom, zda $\varepsilon \notin L(G)$.

- Pokud $\varepsilon \notin L(G)$, postupujeme dle předchozího důkazu.
- Pokud $\varepsilon \in L(G)$, postupujeme dle následujícího schématu (v G' bude jediné ε-ové pravidlo $S' \to \varepsilon$):

$$\begin{gathered}
G = (N, T, P, S) \\
\Downarrow \\
G_1 = (N, T, P_1, S) \\
\text{(vytvoříme podle postupu v předchozím důkazu)} \\
\Downarrow \\
G' = (N \cup \{S'\}, T, P', S'), \text{ kde } P' = P_1 \cup \{S' \to \varepsilon \mid S\}
\end{gathered}$$

□

Převod obecné bezkontextové gramatiky na nezkracující si ukážeme na gramatice v příkladu 6.6.

Příklad 6.6

Zadání: $G = (\{S, A, B\},\ \{a, b, c\},\ P,\ S)$
$S \to AaB \mid \varepsilon$
$A \to AbbA \mid aBc \mid \varepsilon$
$B \to bAB \mid aS$

Po prvním kroku:
$S \to AaB \mid aB$
$A \to AbbA \mid bbA \mid Abb \mid bb \mid aBc$
$B \to bAB \mid bB \mid aS \mid a$

Výsledek: $G' = (\{S', S, A, B\},\ \{a, b, c\},\ P',\ S')$
$S' \to S \mid \varepsilon$
$S \to AaB \mid aB$
$A \to AbbA \mid bbA \mid Abb \mid bb \mid aBc$
$B \to bAB \mid bB \mid aS \mid a$

6.2.2 Redukovaná gramatika

Definice 6.4 (Nadbytečný neterminál) *(zbytečný)X je nadbytečný neterminál, pokud neexistuje žádné terminální slovo, které lze z tohoto symbolu vygenerovat, tj. neexistuje derivace* $X \Rightarrow^* w,\ w \in T^*$.

Definice 6.5 (Nedostupný symbol) *Symbol* $X \in (N \cup T)$ *je nedostupný, jestliže se nemůže objevit v žádné větné formě, tj. neexistuje derivace* $S \Rightarrow^* \alpha X \beta,\ \alpha, \beta \in (N \cup T)^*$.

Definice 6.6 (Redukovaná gramatika) *Bezkontextová gramatika je redukovaná, pokud neobsahuje žádné nadbytečné a nedostupné symboly.*

Postup:

- odstraníme nadbytečné symboly,
- *potom* odstraníme nedostupné symboly.

Věta 6.3 *Ke každé bezkontextové gramatice G existuje redukovaná gramatika G' taková, že* $L(G) = L(G')$.

Algoritmus odstranění nadbytečných symbolů

1. $N_0 = T$
2. $N_i = N_{i-1} \cup \{A \in N \mid (A \to \alpha) \in P, \alpha \in N_{i-1}^*\}$
3. $N_i \neq N_{i-1} \implies inc(i)$, přechod na bod 2
4. $N_i = N_{i-1} \implies$ konec algoritmu, $N' = N_i \cap N$

Příklad 6.7

Odstranění nadbytečných symbolů:
$S \to aAbC \mid c$
$A \to aA \mid Cc$
$B \to cB \mid dD$
$C \to cB \mid aA \mid b$
$D \to Bd$

$N_0 = T$
$N_1 = \{S, C\} \cup T$
$N_2 = \{S, C, A\} \cup T$
$N_3 = N_2 \implies N' = N_3 \cap N = \{S, A, C\}$ $P' = \{S \to aAbC \mid c,\ A \to aA \mid Cc,\ C \to aA \mid b\}$

Algoritmus odstranění nedosažitelných symbolů

1. $V_0 = \{S\}$
2. $V_i = V_{i-1} \cup \{X \in (N \cup T) \mid (A \to \alpha X \beta) \in P, A \in V_{i-1}^*\}$
3. $V_i \neq V_{i-1} \implies inc(i)$, přechod na bod 2
4. $V_i = V_{i-1} \implies$ konec algoritmu,
   $N' = V_i \cap N$,
   $T' = V_i \cap T$

Příklad 6.8

P: $S \to aA \mid bB \mid c$
$A \to cS \mid aA$
$B \to bB \mid cAB$
$C \to aA \mid b$

P': $S \to aA \mid bB \mid c$
$A \to cS \mid aA$
$B \to bB \mid cAB$
$C \to aA \mid b$ $S \to aA \mid bB \mid c$
$A \to cS \mid aA$
$B \to bB \mid cAB$
$C \to aA \mid b$

P'': $N_0 = T$ $V_0 = \{S\}$
$N_1 = \{S, C\} \cup T$ $V_1 = \{S, A, a, c\}$
$N_2 = \{S, C, A\} \cup T$ $V_2 = V_1$
$N_3 = N_2$ $\Longrightarrow N'' = V_2 \cap N' = \{S, A\}$
$\Longrightarrow N' = N_3 \cap N = \{S, A, C\}$ $\Longrightarrow T'' = V_2 \cap T = \{a, c\}$
$G_{REDUK} = (N'', T'', P'', S)$

Důkaz:

1. sestrojíme množiny $N_\varepsilon = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$

   (podle postupu pro nadbytečné symboly, $N_0 = \{\varepsilon\}$)

2. sestrojíme novou množinu pravidel P':

   (a) pro každé pravidlo ve tvaru

   $$A \to \alpha_0 B_1 \alpha_1 B_2 \dots B_k \alpha_k \in P,\ k \geq 0,\ B_i \in N_\varepsilon \forall i, 1 \leq i \leq k, \forall a_j \in \alpha_i : a_j \notin N_\varepsilon$$

   do P' přidáme všechna pravidla ve tvaru $A \to \alpha_0 X_1 \alpha_1 X_2 \dots X_k \alpha_k$, kde $X_i \in \{B_i, \varepsilon\}$, pokud vznikne $A \to \varepsilon$, nepřidáme ho,

   (b) $S \in N_\varepsilon \quad \Longrightarrow (S' \to \varepsilon \mid S) \in P',\ N' = N \cup \{S'\}$

   (c) $S \notin N_\varepsilon \quad \Longrightarrow N' = N,\ S' = S$

3. $G' = (N', T, P', S')$

□

6.2.3 Gramatika bez jednoduchých pravidel



Definice 6.7 (Jednoduchá pravidla) *Jednoduchá pravidla jsou pravidla ve tvaru* $A \to B,\ A, B \in N$ *(tedy na pravé i levé straně je jediný neterminál).*

Věta 6.4 *Ke každé bezkontextové gramatice* G *lze sestrojit gramatiku bez jednoduchých pravidel* G' *takovou, že* $L(G) = L(G')$.

Důkaz:

1. $\forall A =\in N$ sestrojíme množinu N_A:
   (a) $N_{A,0} = \{A\}$,
   (b) $N_{A,i} = N_{A,i-1} \cup \{X \in N \mid (B \to X) \in P, B \in N_{A,i-1}\}$
   (c) $N_{A,i} \neq N_{A,i-1} \implies inc(i)$, přesun na b),
   $N_{A,i} = N_{A,i-1} \implies$ konec algoritmu, $N_A = N_{A,i}$
2. sestrojíme P':
   $\forall (B \to \alpha) \in P$, které není jednoduché, $\forall A \in N$ takové, že $B \in N_A$, dáme do P' pravidlo $A \to \alpha$

□

Příklad 6.9

$E \to E + T \mid T$
$T \to T * F \mid F$
$F \to (E) \mid i$

$N_{E,0} = \{E\}$ $\qquad$ $N_{T,0} = \{T\}$
$N_{E,1} = \{E, T\}$ $\qquad$ $N_{T,1} = \{T, F\} = N_T$
$N_{E,2} = \{E, T, F\} = N_E$

$N_{F,0} = \{F\} = N_F$

$E \to E + T \mid T * F \mid (E) \mid i$
$T \to T * F \mid (E) \mid i$
$F \to (E) \mid i$

6.2.4 Další typy bezkontextových gramatik

Definice 6.8 (Gramatika bez cyklu) *Gramatika bez cyklu je taková gramatika, ve které neexistuje derivace* $A \Rightarrow^+ A$ *pro žádné* $A \in N$.

Poznámka: Nezkracující gramatika bez jednoduchých pravidel je vždy bez cyklu (pozor, pouze implikace, protože mohou existovat gramatiky bez cyklu, které nejsou nezkracující nebo které nejsou bez jednoduchých pravidel).

Definice 6.9 (Vlastní gramatika) *Vlastní gramatika je gramatika bez cyklu, nezkracující, bez nadbytečných symbolů.*

Definice 6.10 (Gramatika bez levé rekurze) *Gramatika bez levé rekurze je gramatika, ve které pro žádný neterminál* $A \in N$ *neexistuje derivace* $A \Rightarrow^+ A\alpha$.

Přímá levá rekurze znamená existenci pravidla $A \to A\alpha$, *nepřímá existenci pravidla* $A \to \beta A\alpha$, *kde* $\beta \Rightarrow^* \varepsilon$.

Definice 6.11 (Gramatika bez pravé rekurze) *Obdobně jako u levé rekurze, vyměníme slovo „levá“ za „pravá“.*

Věta 6.5 *Ke každé bezkontextové gramatice* G *existuje gramatika bez levé rekurze* G' *taková, že* $L(G) = L(G')$.

Důkaz: (Odstranění levé rekurze)

1. převedeme gramatiku na vlastní (bez cyklu, nezkracující, bez nadbytečných symbolů),
2. každou sadu pravidel s levou rekurzí

   $A \to A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \ldots \mid A\alpha_n \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_m$

   nahradíme sadou pravidel

   $A \to \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \ldots \mid \beta_m A' \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_m$
   $A' \to \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \ldots \mid \alpha_n A' \mid \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$

Proč: původní sada pravidel generuje sekvenci řetězců α_i, rekurze je ukončena tak, že před všechny řetězce α_i je vygenerován jeden z řetězců β_j, tedy vlastně vygenerujeme totéž, jen jinými pravidly.
$A \Rightarrow A\alpha_3 \Rightarrow A\alpha_1\alpha_3 \Rightarrow A\alpha_7\alpha_1\alpha_3 \Rightarrow \beta_2\alpha_7\alpha_1\alpha_3$ □

Příklad 6.10

Odstranění levé rekurze:

$A \to BC \mid a$
$B \to BaC \mid Ab \mid ba$
$C \to CC \mid b \mid CbA \to BC \mid a$
$B \to BaC \mid Ab \mid ba$
$C \to CC \mid b \mid Cb$

$A \to BC \mid a$
$B \to AbB' \mid baB' \mid ab \mid ba$
$B' \to aCB' \mid aC$
$C \to bC' \mid b$
$C' \to CC' \mid bC' \mid C \mid b$

6.3 Normální formy pro bezkontextové gramatiky

Pro bezkontextové gramatiky můžeme použít tyto normální formy:

1. Chomského normální forma
2. Greibachova normální forma

Jejich účel je podobný jako účel dříve uvedených speciálních typů bezkontextových gramatik – jejich vlastnosti se nám za určitých okolností mohou hodit.

6.3.1 Chomského normální forma

Definice 6.12 (Chomského normální forma) *Bezkontextová gramatika je v Chomského normální formě (CNF), jestliže každé pravidlo z množiny P je v některém z těchto tvarů:*

- $A \to BC$, $A, B, C \in N$,
- $A \to a$, $A \in N,\ a \in T$,
- $S \to \varepsilon$, *jestliže S není na pravé straně žádného pravidla.*

Věta 6.6 *Ke každé bezkontextové gramatice G existuje gramatika G' v CNF taková, že $L(G) = L(G')$.*

Důkaz:

1. Převedeme gramatiku do tvaru vlastní gramatiky (nezkracující, odstraníme jednoduchá pravidla).
2. $\forall A \to \alpha$, kde $|\alpha| \geq 2$, nahradíme každý výskyt jakéhokoliv terminálu a neterminálem $N_a \quad \Rightarrow$ v pravidlech s pravou stranou delší než 1 se vyskytují pouze neterminály.
3. Přidáme pravidla $N_a \to a$.
4. pro každé pravidlo $A \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n,\ n \geq 3,\ A, Y_i \in N$:

   $$A \to Y_1 Z_1,\ Z_1 \to Y_2 Z_2,\ \ldots\ Z_{n-3} \to Y_{n-2} Z_{n-2},\ Z_{n-2} \to Y_{n-1} Y_n$$

   (rozkouskujeme dlouhá pravidla)

□

Příklad 6.11

Původní gramatika
$G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$

$S \to A \mid 0SA \mid \varepsilon$
$A \to 1A \mid 1 \mid B1$
$B \to 0B \mid 0 \mid 0SBA$

Úprava 1: Nezkracující gramatika
$G' = (\{S', S, A, B\}, \{0, 1\}, P', S')$

$S \to A \mid 0SA \mid 0A$
$A \to 1A \mid 1 \mid B1$
$B \to 0B \mid 0 \mid 0SBA \mid 0BA$
$S' \to S \mid \varepsilon$

Úprava 2: Odstranění jednoduchých pravidel
$G'' = (\{S', S, A, B\}, \{0, 1\}, P'', S')$

$S \to 1A \mid 1 \mid B1 \mid 0SA \mid 0A$
$A \to 1A \mid 1 \mid B1$
$B \to 0B \mid 0 \mid 0SBA \mid 0BA$
$S' \to 1A \mid 1 \mid B1 \mid 0SA \mid 0A \mid \varepsilon$

Úprava 3: Terminály v pravidlech s pravou stranou delší než 1
$G''' = (\{S', S, A, B, N_0, N_1\}, \{0, 1\}, P''', S')$

$S \to N_1A \mid 1 \mid BN_1 \mid N_0SA \mid N_0A$
$A \to N_1A \mid 1 \mid BN_1$
$B \to N_0B \mid 0 \mid N_0SBA \mid N_0BA$
$S' \to N_1A \mid 1 \mid BN_1 \mid N_0SA \mid N_0A \mid \varepsilon$
$N_0 \to 0$
$N_1 \to 1$

Úprava 4: Rozkouskování pravidel
$G'''' = (\{S', S, A, B, N_0, N_1, Z_1, Z_2, Z_3\}, \{0, 1\}, P'''', S')$

$S \to N_1A \mid 1 \mid BN_1 \mid N_0Z_1 \mid N_0A$
$Z_1 \to SA$
$A \to N_1A \mid 1 \mid BN_1$
$B \to N_0B \mid 0 \mid N_0Z_2 \mid N_0Z_3$
$Z_2 \to SZ_3$
$Z_3 \to BA$
$S' \to N_1A \mid 1 \mid BN_1 \mid N_0Z_1 \mid N_0A \mid \varepsilon$
$N_0 \to 0$
$N_1 \to 1$

6.3.2 Greibachova normální forma

Definice 6.13 (Greibachova normální forma) *Bezkontextová gramatika je v Greibachového normální formě (GNF), jestliže každé pravidlo z množiny P je v některém z těchto tvarů:*

- $A \to aB_1B_2 \dots B_n$, $n \geq 0$, $A, B_1, B_2, \dots B_n \in N$, $a \in T$,
- $S \to \varepsilon$, *jestliže S není na pravé straně žádného pravidla.*

Věta 6.7 *Ke každé bezkontextové gramatice G existuje gramatika G' v GNF taková, že $L(G) = L(G')$.*

Důkaz:

1. Převedeme gramatiku do tvaru vlastní gramatiky (nezkracující, odstraníme jednoduchá pravidla), odstraníme levou rekurzi.
2. V každém pravidle za nejlevější neterminál dosazujeme všechna jeho pravidla rekurzívně tak dlouho, dokud řetězec nezačíná terminálem.
3. Terminály a, které nejsou na začátku některého pravidla, nahradíme pomocnými neterminály N_a.
4. Přidáme pravidla $N_a \rightarrow a$.

□

Příklad 6.12

Původní gramatika
$G = (\{E, F\}, \{(,), +, i\}, P, E)$

$E \rightarrow E + F \mid F$
$F \rightarrow (E) \mid i$

Úprava 1: Odstranění levé rekurze
$G' = (\{E, E', F\}, \{(,), +, i\}, P', E)$

$E \rightarrow FE' \mid F$
$E' \rightarrow +FE' \mid +F$
$F \rightarrow (E) \mid i$

Úprava 2: Odstranění jednoduchých pravidel
$G'' = (\{E, E', F\}, \{(,), +, i\}, P'', E)$

$E \rightarrow FE' \mid (E) \mid i$
$E' \rightarrow +FE' \mid +F$
$F \rightarrow (E) \mid i$

Úprava 3: Rekurzivní nahrazování
$G''' = (\{E, E', F\}, \{(,), +, i\}, P''', E)$

$E \rightarrow (E)E' \mid iE' \mid (E) \mid i$
$E' \rightarrow +FE' \mid +F$
$F \rightarrow (E) \mid i$

Úprava 4: Terminály
$G'''' = (\{E, E', F, N_)\}, \{(,), +, i\}, P'''', E)$

$E \to (EN_)E' \mid iE' \mid (EN_) \mid i$
$E' \to +FE' \mid +F$
$F \to (EN_) \mid i$
$N_) \to)$