6. Nejistota

Bi3101 Úvod do matematického modelování

Nejistota

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Modelování nejistoty (neurčitosti) a rizika

- ***Nejistotou*** při zobrazení systému pomocí matematického modelu rozumíme situaci, kdy nemáme k disposici všechnu potřebnou informaci nebo kdy některé z informací jsou nespolehlivé.
- ***Modelování při riziku*** předpokládá, že některé informace jsou náhodné veličiny, nebo že některé procesy jsou popsány náhodnými funkcemi.
  - V případě modelů s rizikem můžeme velikost rizika při přijetí řešení popsat pomocí pravděpodobnostních charakteristik.
  - Analogicky můžeme považovat modelování za rizika i v případě použití fuzzy veličin, nebo fuzzy funkcí. Velikost rizika lze potom vyjádřit buď pomocí vhodné fuzzy míry nebo tuto fuzzy míru transformovat na subjektivní pravděpodobnost.

Inverzní problém

- Určení vstupních parametrů modelu, které neznáme, při znalosti výstupních hodnot (naměřených dat).
- Nazývá se inverzní, protože známe výsledek modelovaného procesu, ale neznáme počáteční stav.
- Opakem je dopředný problém, kdy známe vstupy (parametry) a chceme zjistit výstupy (data).
- Data bývají zatížena chybami, které mohou ztěžovat určení parametrů modelu.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované (ill-posed).

Příklad

- Uvažujme diskrétní stochastický model z prvního domácího úkolu.
- Budeme znát pouze počty jedinců v prvních deseti generacích a máme odvodit koeficient růstu r (resp. pravděpodobnost, že se jedinec rozmnoží p_B-p_D).
- Proveďte výpočet v R včetně stanovení 95% intervalu spolehlivosti pro odhad koeficientu růstu r.

Dobře/špatně postulovaný problém

- Well posed × Ill posed problems.
- Říkáme, že problém je dobře postulovaný pokud splňuje Hadamardovu definici (3 podmínky):
  - existuje řešení problému;
  - toto řešení je jednoznačné;
  - vlastnosti řešení se mění spojitě se vstupními parametry.
- Inverzní problémy jsou typicky špatně postulované, mohou trpět numerickou nestabilitou díky diskretizaci, nepřesnosti v datech apod.
- I když je problém dobře postulovaný, může být stále špatně podmíněný.

Dobře/špatně podmíněný problém

- Well conditioned × Ill conditioned problems.
- Za dobře podmíněný problém považujeme problém s nízkou podmíněností (číslem podmíněnosti), za špatně podmíněný problém považujeme problém s vysokou podmíněností.
- Podmíněnost udává, jak moc závisí změny modelových výstupů na (malých) změnách modelových vstupů.
- Podmíněnost je mírou citlivosti modelu na chyby ve vstupních hodnotách.
- Podmíněnost (číslo podmíněnosti) je definována jako maximální poměr relativní chyby výstupů a vstupů modelu.

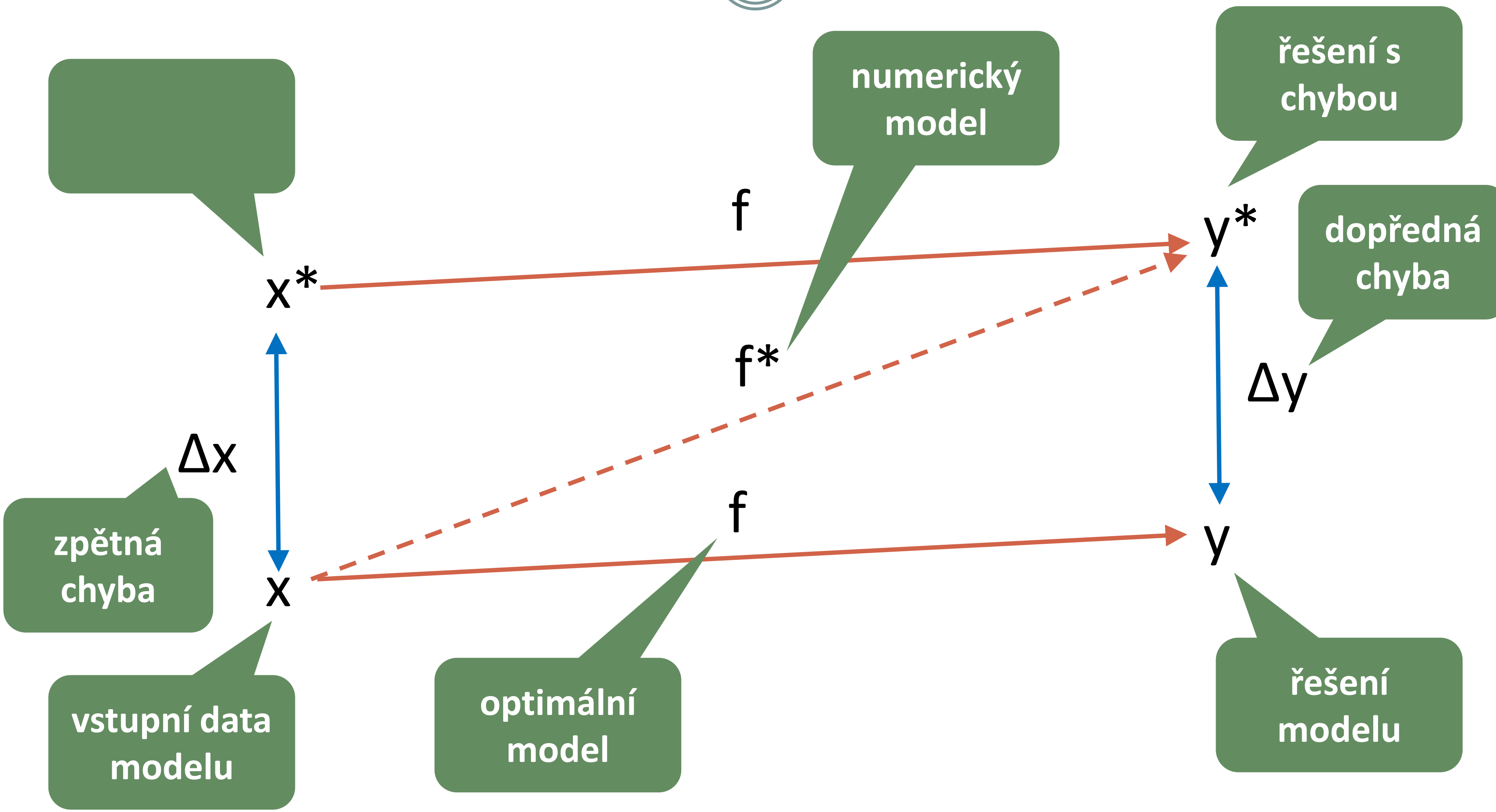
Dopředná a zpětná stabilita

- **Výstupy modelu se obvykle mírně liší od popisované reality (díky numerické reprezentaci, tj. zaokrouhlení a nepřesnostem řešení). Chybu výstupů nazýváme dopředná chyba (forward error).**
- **Odchylka na vstupu modelu, která odpovídá dopředné chybě výstupů se nazývá zpětná chyba (backward error).**
- **Model nazveme zpětně stabilním (backward stable), pokud má malou zpětnou chybu (obvykle se udává jako relativní vůči vstupní hodnotě):**

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

- **„Malá“ chyba obvykle znamená, že je zhruba stejného řádu jako zaokrouhlení vstupních hodnot.**

Dopředná a zpětná stabilita



Číslo podmíněnosti

- Condition number.
- Číslo podmíněnosti je vlastností matematického řešení, ne jeho (zaokrouhlovací) chyby.
- Jde o maximální poměr relativní zpětné chyby vůči relativní dopředné chybě:

$$\kappa = max\left(\frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{f^{-1}(\Delta y)}{f^{-1}(y)}\right|}\right) = max\left(\frac{\left|\frac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|}\right)$$

$$\kappa = max\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Monte Carlo modelování (DÚ 2 do 25. 10. 2021)

- Využijte spojitý deterministický model z předchozího domácího úkolu.
- Generujte náhodně koeficient porodnosti p_B a koeficient úmrtnosti p_D v jako normálně rozdělené náhodné veličiny se středy v hodnotách 0,35 a 0,25 a směrodatnou odchylkou 0,05.
- Proveďte 10 000 simulací.
- Odhadněte pravděpodobnostní rozdělení výsledného počtu jedinců v populaci po 10 generacích.
- Využijte diskrétní stochastický model z předchozího domácího úkolu.
- Proveďte 10 000 simulací.
- Odhadněte pravděpodobnostní rozdělení výsledného počtu jedinců v populaci po 10 generacích.