

# 8. Interagující populace

## Bi3101 Úvod do matematického modelování



### Modely dvou interagujících populací

# Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí



- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojitě) pro růst populace:

$$N(t + h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, N(0) = N_0$$

- Pro dvě populace  $N_1, N_2$  budeme mít koeficienty  $r_1, r_2, K_1$  a  $K_2$ .
- Zahrneme-li nyní do soustavy rovnic vzájemné ovlivnění populací, změníme koeficienty  $K_1$  a  $K_2$  na funkce  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  závislé na velikosti druhé populace.
- Pro funkce  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  musí platit:
  - Je-li velikost (té druhé) populace  $N_j=0$ , zůstává  $\kappa_i(0)= K_i$ .
  - Naopak pro  $N_j \rightarrow \infty$  se hodnota ustálí na nějaké konstantě  $\kappa_i(\infty)= C_i$ .

# Příklad



- Nalezněte vhodný předpis pro funkce  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  splňující následující podmínky:
  - Funkce  $\kappa_i$  necht' jsou spojité a hladké na oboru  $<0; \infty$ ).
  - Funkce  $\kappa_i$  necht' jsou neklesající na oboru  $<0; \infty$ ).
  - Je-li velikost (té druhé) populace  $N_j=0$ , zůstává  $\kappa_i(0)=K_i$ .
  - Naopak pro  $N_j \rightarrow \infty$  se hodnota ustálí na nějaké konstantě  $\kappa_i(\infty)=C_i$ .
- Ve specifických případech může být komensalizmus neomezený (tj.  $C_i = \infty$ ).

# Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí



- Varianty vzájemného ovlivnění dvou populací přes prostředí (ekologická klasifikace):
  - $K_i = C_i$       neutrální vztah (žádný vliv),
  - $K_i > C_i$       populace soupeří (amensály),
  - $K_i < C_i$       populace jsou na sobě závislé (komensály), přičemž:
    - ✦ pokud  $K_i = 0$ , je j-tá populace obligátním komensálem i-té populace (i-tá populace nemůže přežít v nepřítomnosti j-té),
    - ✦ pokud  $K_i > 0$ , je j-tá populace fakultativním komensálem i-té populace (i-tá populace může přežít i bez j-té).
- Amensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace uvolňuje do prostředí odpadní produkt nebo speciální látku, která populaci jiného druhu ovlivňuje negativně (potlačuje růst a vývoj, může způsobit i zánik).
- Komensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace využívá jinou bez jejího poškození (jedna populace má ze vztahu prospěch, druhá není ovlivněna)

# Příklad



- Využijte předpis funkcí  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  z předchozího příkladu, navrhněte jejich vhodné parametry a nahraďte jimi koeficienty úživnosti  $K_1$  a  $K_2$  z původní rovnice.
- Řešte takto získanou soustavu dvou rovnic pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah dvou populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. symbiózu obou populací (oboustranně výhodné ovlivnění),
  3. predaci (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).
- Zjistěte, jaký vztah se nazývá „orgie vzájemné dobročinnosti“, navrhněte a řešte jemu odpovídající model.

# Mezidruhové vztahy



		Vliv první populace na druhou		
		záporný	neutrální	kladný
Vliv druhé populace na první	záporný	konkurent (kompetice)	amenzál	kořist hostitel
	neutrální		neutrál	
	kladný	predátor parazit	komenzál	mutuál (symbióza)

# Vzájemné ovlivnění populací přes přírůstek



- Mimo úživnosti se mohou populace ovlivňovat také jinými mechanismy.
- Typickým příkladem je ovlivnění koeficientu růstu (resp. přesněji relativního přírůstku).
- V případě lineárního vlivu na relativní přírůstek

$$N_i(t+h) = N_i(t) + N_i(t) \cdot \left[ r_i \cdot \left( 1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \right) \pm \beta_{i,j} \cdot N_j(t) \right] \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

označujeme získanou soustavu rovnic jako Lotkův-Volterrův systém.

# Domácí úkol č. 4 (do 8. 11. 2021)



- Navrhněte soustavu Lotkových-Volterrových rovnic tří populací.
- Řešte takto získanou soustavu pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah všech tří populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. predaci jedné populace vůči dvěma symbiotickým populacím (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).