MUNI

Výzva ekologie a sociologie: dynamické systémy

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

25. listopadu 2021

V březnu někdo přišel
s tím matematickým modelem

a v srpnu někdo,

sice byl to ten stejný člověk,
ale už přišel
v nějakém čase

a ty,
který měli přijít,

nepřišli.

youtube: Filip Beneš na labelu *Antonín Blaník Records*

Obsah

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$x(t+1) = x(t) + \text{novorození} - \text{zemřelí}$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$x(t+1) = x(t) + \text{novorození} - \text{zemřelí}$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ $\quad b$ – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ $\quad d$ – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost
množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t)+bx(t)-dx(t) = x(t)(1+b-d)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = x(t)(1 + b - d)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost ($d < 1 + b$)

$r = 1 + b - d$

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost ($d < 1 + b$)

$r = 1 + b - d$

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t)$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0 \quad \to \quad x(t) = x_0 r^t$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0 \quad \to \quad x(t) = x_0 r^t$$

Leonhard Euler, 1707–1783

T.R. Malthus: *An Essay on the Principle of Population,* London 1798

Velikost populace roste jako geometrická posloupnost, množství zdrojů jako aritmetická posloupnost.

Thomas R. Malthus, 1766–1834

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují" rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují" rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

Růst populace

Euler, Süßmilch

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují" rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$n(t) \quad = \quad n(t-11) + n(t-12) + n(t-13)$$

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$
\begin{aligned}
n(t) &= n(t-11) + n(t-12) + n(t-13)\\
d(t) &= n(t-20)
\end{aligned}
$$

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t
$d = d(t)$ – počet zemřelých párů v čase t

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$
\begin{aligned}
n(t) &= n(t-11) + n(t-12) + n(t-13) \\
d(t) &= n(t-20) \\
x(t) &= x(t-1) + n(t) - d(t)
\end{aligned}
$$

Johann Peter Süßmilch,
1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t
$d = d(t)$ – počet zemřelých párů v čase t
$x = x(t)$ – počet žijících párů v čase t

Růst populace
Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

Růst populace
Leslie, Caswell

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Krysy ve skladech obilí

t – čas, jednotka je 1 měsíc
k – maximální možný věk samice
$n_i = n_i(t)$ – počet samic věku $\langle i-1, i)$ v čase t, $i = 1, 2, \ldots k$
f_i – plodnost samice věku i; $f_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$
p_i – pravděpodobnost přežití samice věkové třídy $i-1$ do třídy i;
$0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

Růst populace

Leslie, Caswell

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Krysy ve skladech obilí

t – čas, jednotka je 1 měsíc
k – maximální možný věk samice
$n_i = n_i(t)$ – počet samic věku $\langle i-1, i)$ v čase t, $i = 1, 2, \dots k$
f_i – plodnost samice věku i; $f_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$
p_i – pravděpodobnost přežití samice věkové třídy $i-1$ do třídy i;
$0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} n_1(t+1) &= f_1 n_1(t) + f_2 n_2(t) + \cdots + f_k n_k(t) \\ n_i(t+1) &= p_i n_{i-1}(t), \qquad i = 2, 3, \dots, k \end{aligned}$$

Růst populace

Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Krysy ve skladech obilí

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \\ \vdots \\ n_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \\ \vdots \\ n_k(t) \end{pmatrix}$$

Růst populace
Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Krysy ve skladech obilí

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \\ \vdots \\ n_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \\ \vdots \\ n_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{n}(t)$$

Růst populace
Leslie, Caswell

Hall Caswell,
1949–

H. Caswell: *Matrix Population Models*, Sinauer, 2001

$$\boldsymbol{n}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{n}(t)$$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli,
1700–1782

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

Daniel Bernoulli,
1700–1782

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = q(1-p)S - \mu(x)R$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P$$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P$$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d’Alembert

D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l’inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P$$

Pokud se očkuje, $q = 0$.

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P, \qquad \frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)P^*$$

Pokud se očkuje, $q = 0$.

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P, \qquad \frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)P^*$$

Pokud se očkuje, $q = 0$.

Očkování prodlužuje očekávanou dobu dožití o 3 roky. Je výhodné, pokud je úmrtnost na očkování nejvýše 11% (byla $< 1\%$).

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Jean d'Alembert, 1717–1783

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P, \qquad \frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)P^*$$

Pokud se očkuje, $q = 0$.

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Jean d'Alembert, 1717–1783

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita nákazy ν závisí na věku.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -pqS - \mu(x)P, \qquad \frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)P^*$$

Pokud se očkuje, $\nu(x) = ?$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Jean d'Alembert,
1717–1783

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita nákazy ν závisí na věku.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -\nu(x)S - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -p\nu(x)S - \mu(x)P$$

Pokud se očkuje, $\nu(x) =?$

Užitečnost očkování

Bernoulli, d'Alembert

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Jean d'Alembert, 1717–1783

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita nákazy ν závisí na věku.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Intenzita úmrtí z jiných příčin závisí na věku.

$S = S(x)$, $R = R(x)$ – počet citlivých, rezistentních jedinců věku x.
$P = P(x) = S(x) + R(x)$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -\nu(x)S - \mu(x)S$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -p\nu(x)S - \mu(x)P$$

Pokud se očkuje, $\nu(x) =?$
Bez znalosti funkce ν nelze dělat závěry.

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Lodní lékař

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Lodní lékař
Básník a dramatik

This day relenting God
Hath placed within my hand
A wondrous thing; and God
Be praised. At His command,
Seeking His secret deeds
With tears and toiling breath,
I find thy cunning seeds,
O million-murdering Death.
I know this little thing
A myriad men will save.
O Death, where is thy sting?
Thy victory, O Grave?

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny
Laureát Nobelovy ceny 1902

Ronald Ross,
1857–1931

Eradikace malárie

Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny
Laureát Nobelovy ceny 1902

Ronald Ross, 1857–1931

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

Eradikace malárie

Ross

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$\begin{aligned} x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\ z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz \end{aligned}$$

Eradikace malárie

Ross

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$
\begin{aligned}
x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\
z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz
\end{aligned}
$$

Equilibrium: $x^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2M + carN}N,\ z^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2 + bag}$

Eradikace malárie

Ross

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$\begin{aligned} x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\ z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz \end{aligned}$$

Equilibrium: $x^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2M + carN}N,\ z^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2 + bag}$

Podmínka existence: $\dfrac{M}{N} > \dfrac{gr}{cba^2}$

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

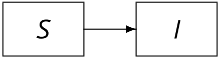
Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927



Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

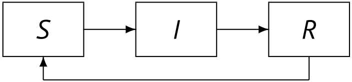
Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927



Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

$$\boxed{S} \longrightarrow \boxed{I} \longrightarrow \boxed{R}$$

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= \beta SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

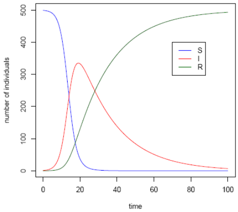
W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

$$\boxed{S} \longrightarrow \boxed{I} \longrightarrow \boxed{R}$$

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$



Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

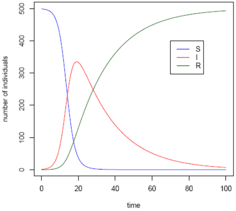
W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

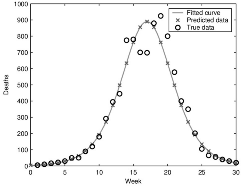
$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

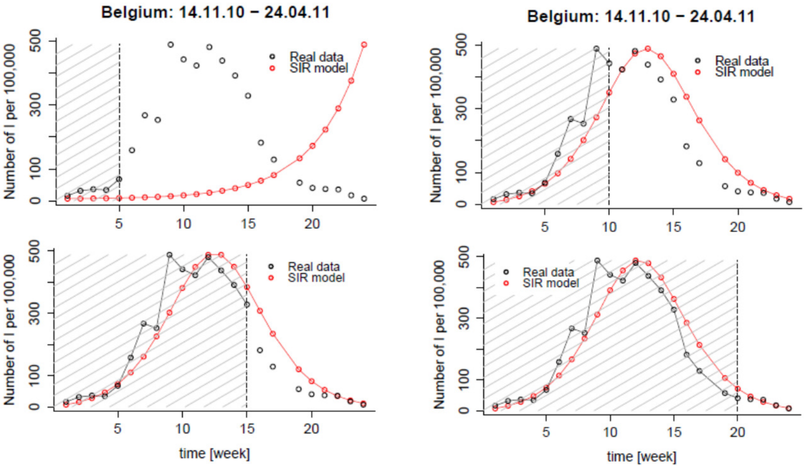




Klasifikace epidemií

McKendrick, Kermack

R. Kůs: *Deterministické modely v epidemiologii*. BP MU 2013



Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

A.J. Lotka: Undamped oscillation derived from the law of mass action. *J. Amer.Chem. Soc.* **42**, 1595–1599, 1920

A.J. Lotka: *Elements of Physical Biology.* Williams&Wilkins, 1925

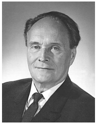
V. Volterra: Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Mem. Accad. Lincei* **6**, 31–113, 1926

V. Volterra: *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, 1931

G.F. Gause: *The struggle for existence.* Williams&Wilkins, 1934

Alfred Lotka, 1880–1949

Vito Volterra, 1860–1940



Георгий Францевич Гаузе, 1910–1986

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

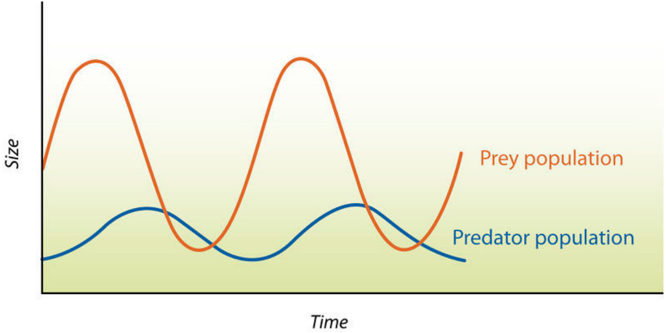
$$x' = ax - bxy$$
$$y' = -cy + dxy$$

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

$$x' = ax - bxy$$
$$y' = -cy + dxy$$



Ekologická stabilita

Svirežev, Logofet, Thieme, Smith

Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет: *Устойчивость биологическич сообЩеств.* Наука, 1978

H.L. Smith, H.R. Thieme: *Dynamical Systems and Population Persistence.* AMS, 2011

Юрий М. Свирежев

1938-2007

Дмитрий О. Логофет

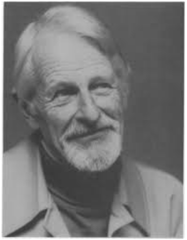
Horst R. Thieme

Hal L. Smith

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

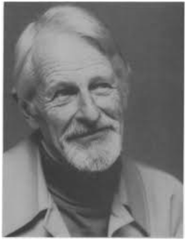
Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

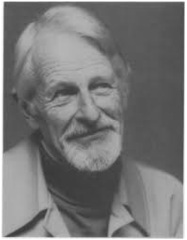


Richard M. Goodwin,
1913–1996

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

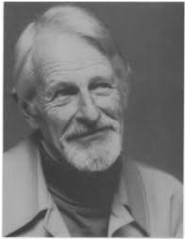
- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth*. Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

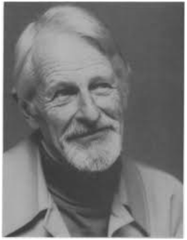
- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok. Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

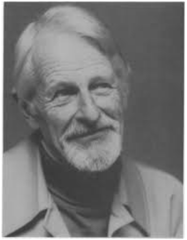
Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v) \quad \text{Phillipsova křivka}$$

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v) \quad \text{Phillipsova křivka}$$

$$\begin{aligned} u' &= u\big(\varphi(v) - \alpha\big) \\ v' &= v(\gamma - \sigma u) \end{aligned}$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost
$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

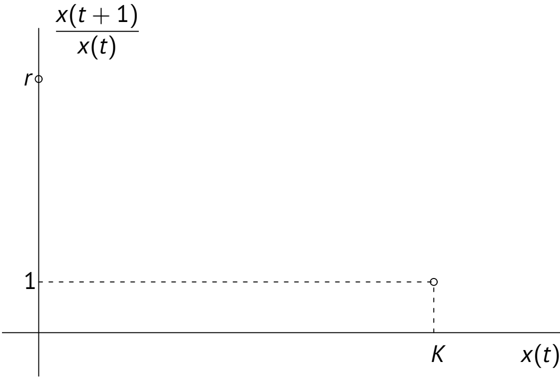
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

$$r = r\big(x(t)\big)$$

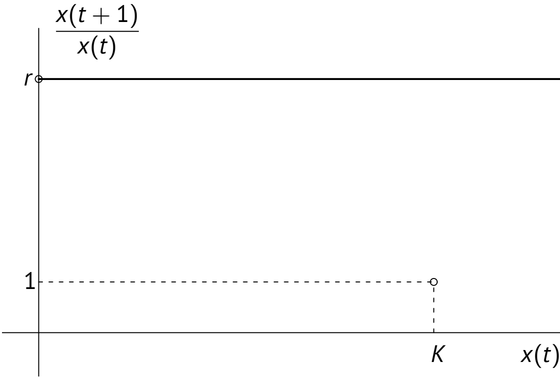
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$



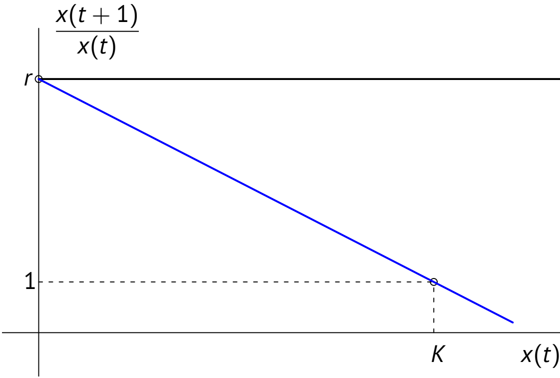
Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

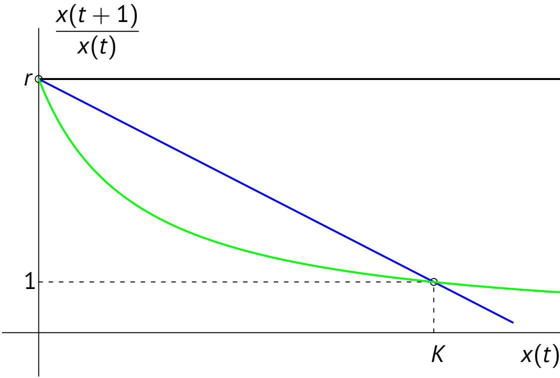
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

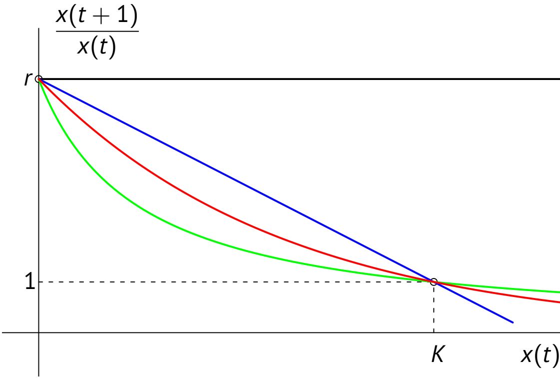
$$x(t+1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

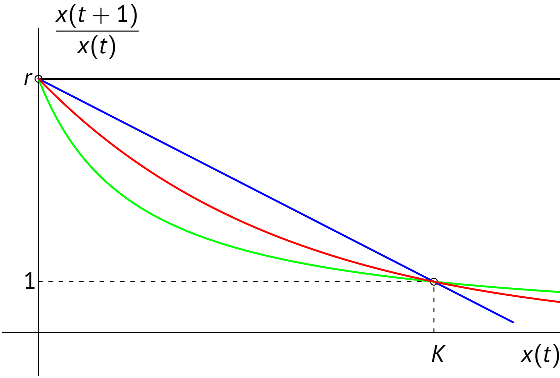
$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

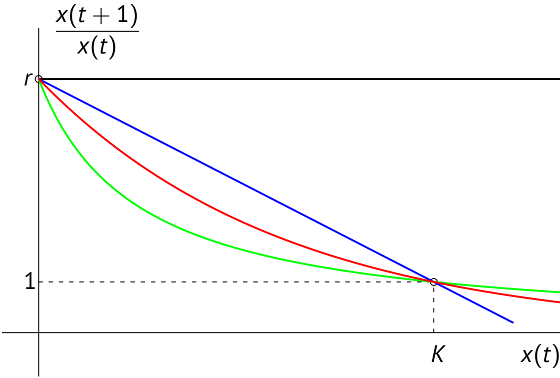
Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

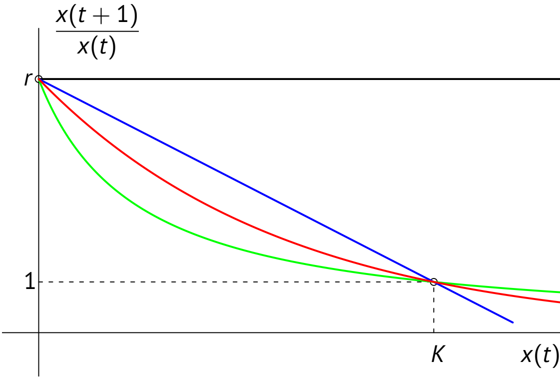
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

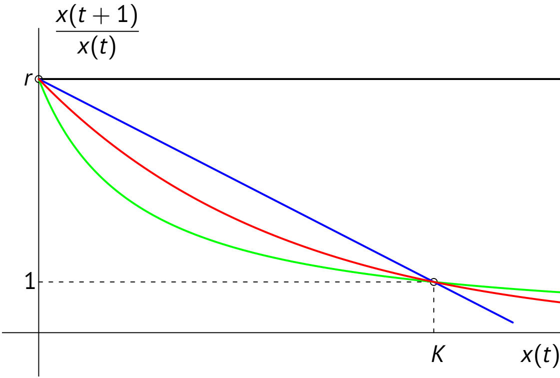
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

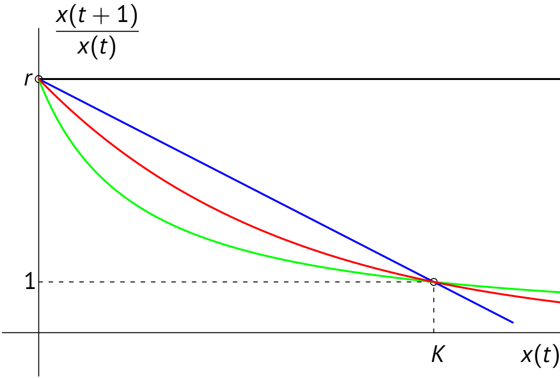
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

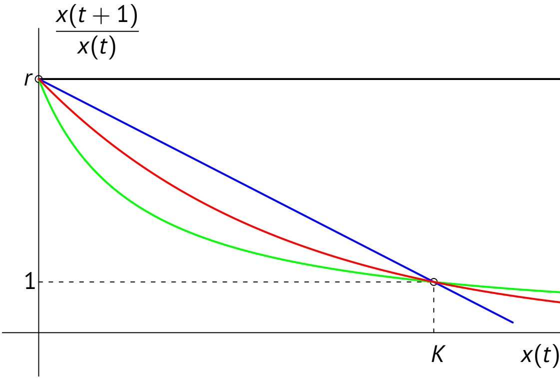
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$$

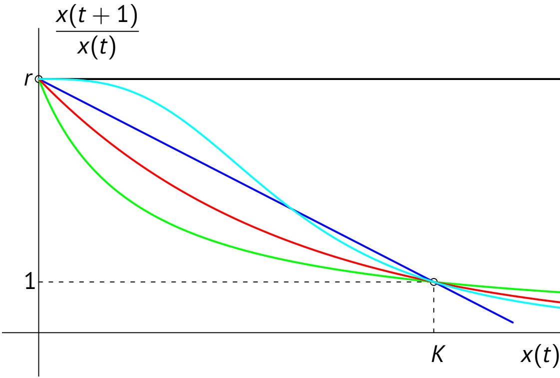


Ricker:

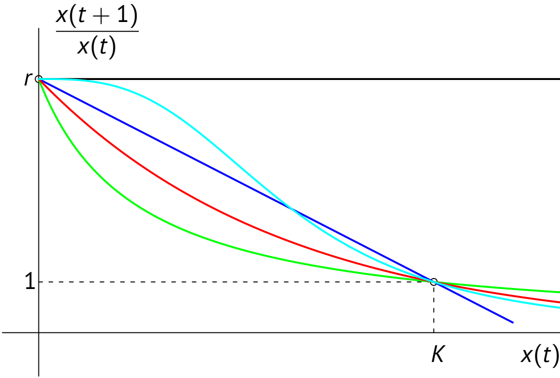
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right)x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

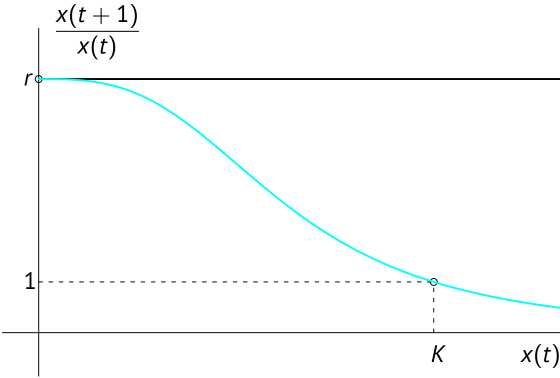


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t+1)$$

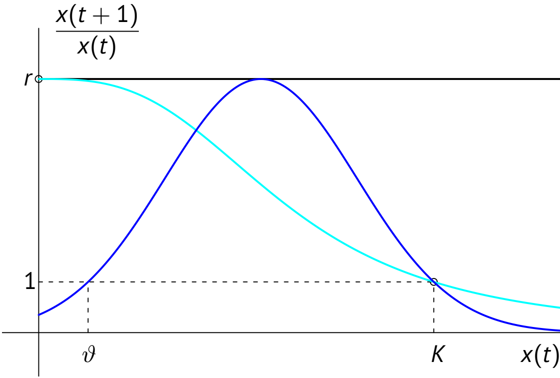
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\dfrac{x(t-1)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

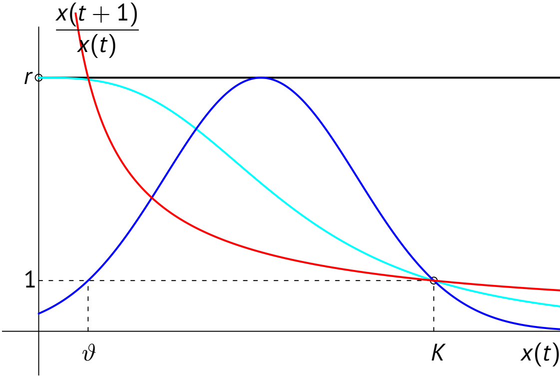
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)}x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Gompertz:

$$x(t+1) = \left(rx(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}} \right) x(t)$$

Semidynamický systém:

- Neprázdná množina X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Semidynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Dynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq \mathbb{R}$
  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $(J, +)$ je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$
- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$
  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

MASARYKOVA UNIVERZITA