CORE004 Matematika jako součást kultury

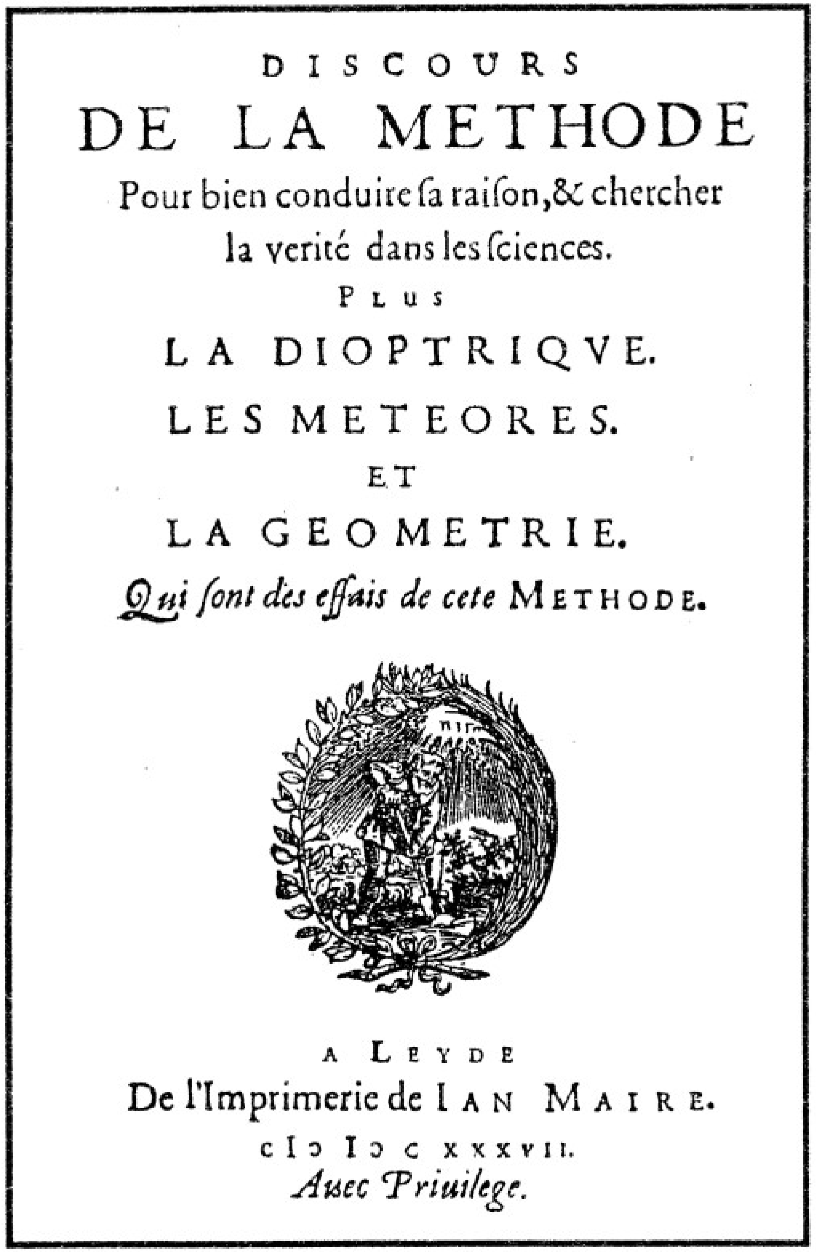
Týden 4. Analytická geometrie

7. října 2021

Jan Slovák

1. Za co všechno může Descartes (aneb jak vznikla „analytická geometrie)?

- Od dětství patrně žijeme všichni v přesvědčení, že je kolem nás „třírozměrný prostor“ ve kterém se snadno zorientujeme pomocí „souřadnic polohy“, případně k těm třem číslům přidáme ještě čtvrté – čas. Vše si přitom asi představujeme v tzv. kartézských souřadnicích.
- Poznámky:
  - „kartézské“ odvozeno od Cartesius, což bylo latinské jméno René Descarta
  - v současné podobě je u Descarta neuvidíme
  - v angličtině „cartesian co-ordinates“
- A co tedy skutečně (u)dělal Descartes?



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIɔ Iɔ c XXXVII.
Auec Priuilege.

René Descartes (Cartesius), 1596 – 1650
„profesionální vědec"

Proč Matematika?

- Snaží se vytvořit spolehlivou obecnou analytickou metodu poznání
- Stručně v bodech:
  - Přijímat jen to, co se mi samo představuje tak jasně a zřetelně, že o tom nemohu pochybovat.
  - Každý problém rozdělit na co nejjednodušší části, které lze bezpečně poznat.
  - Postupovat od jednoduchého ke složitému v pořadí.
  - Sestavit úplné seznamy a obecné přehledy, aby bylo jisté, že jsme na nic nezapomněli.
- Přílohy v rozpravě o metodě (optika, metorologie, geometrie) slouží jako ilustrace její účinnosti.
- Na první pohled „materialista“ (svět kolem, včetně funkce vlastního těla vidí jako „mechanický systém“), vnímá ale Boha jako „nestvořenou“ substanci, vedle které odlišuje „svět těles“ a substanci s „atributem myšlení“ (neprostorový, netělesný duch).

MUNI SCI

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Proč Matematika?

- Descartes je skeptik, poznávání světa těles pomocí smyslů má za v principu klamné, plnohodnotné poznání je jen to, které lze vyjádřit v jasných rozumových (tj. matematických) pojmech.
- Hlavní a jedinou jistotu vidí v přemýšlení („cogito ergo sum“).
- Ve své geometrii cíleně propojuje (antickou) geometrii s algebrou.
- Podobně jako předchůdci či současníci (Viète, Fermat) navazuje na tzv. Pappovu úlohu poloze bodů vymezených geometrickými podmínkami.
- Opouští přitom porovnávání veličin se stejnými „dimenzemi“ a používá „velikost úsečky“ pro vyjádření čehokoliv.

Pappus Alexandrijský

- Jeden z posledních velkých řeckých matematiků (250 – 390).
- Sepsal tzv. Sbírku (Synagogé, *Συναγωγή*), v osmi knihách
- Geometrii se zabývá zejména pojednává o rovinnými a prostoromi problémy (jako trisekce úhlu, zdvojnásobení objemu krychle, aritmetické, geometrické a harmonické průměry a další)
- Konstrukční úlohy (např. jak určit elipsu procházející pěti dannými body)

François Viète

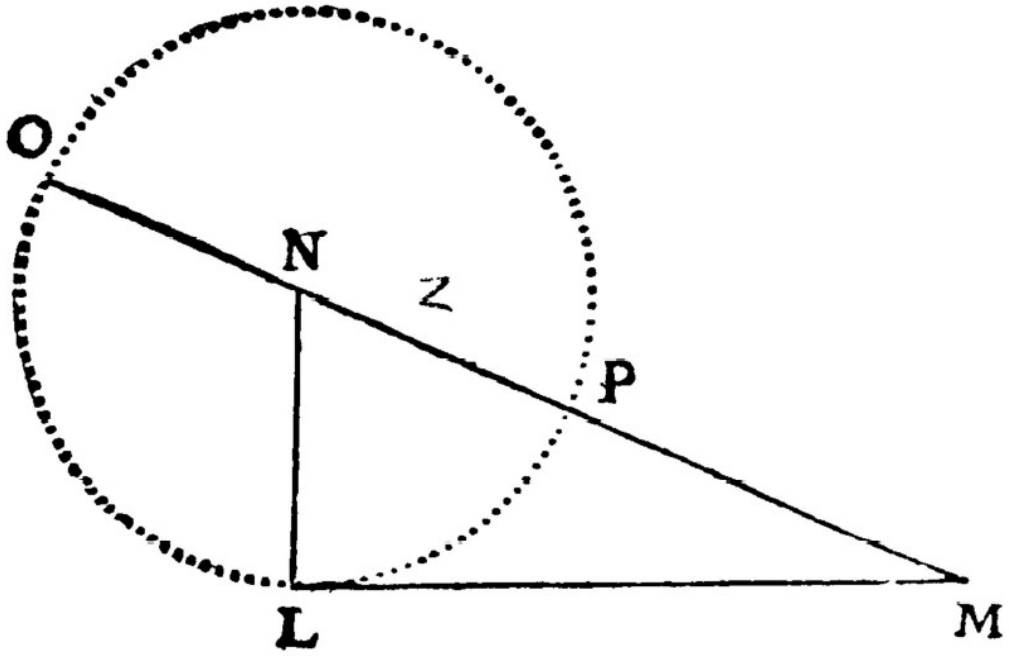
- Francouzský advokát, poradce panovníků (1540 – 1603)
- Bavil se astronomií => zabýval se geometrií a algebrou
- Zavedl dnes obvyklé používání symbolů pro proměnné (ale nepoužíval znak pro rovnost)
- Dodnes používané jsou Viètovy vztahy mezi koeficienty a kořeny polynomů

Pierre de Fermat

- Francouzský právník u soudu v Toulouse (1607 – 1665)
- Věnoval se i geometrii, budeme o něm slyšet ještě mnohokrát (ranné varianty infinitesimálního počtu, teorie čísel, optika)
- Rukopis „Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum“ koloval ještě před pracemi Descarta a v mnohém je předbíhá a převyšuje.

A je tedy v La Géometrie?

- Příklad



$$z^{2} \infty a z + b b$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue $b b$, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce tri-

A kde jsou tam „kartézské souřadnice“?

- Descartes používá typicky jednu (oříznutou) přímku – **abscissa**, na které vynáší některé ze sledovaných hodnot (jako úsečky dané velikosti), jiné veličiny pak vynáší na systém přímek vztyčovaných k abscisse pod stále stejným úhlem, zpravidla kolmo – **ordinála**.
- **Souřadnice** (anglicky „co-ordinates“) jsou pak nástrojem, který zahrnuje abscissu i kolmou ordinálu, které jsou rovnoprávné.
- Pro Descarta i Fermata bylo podstatné, že v typických problémech určení polohy, kde jsou svázány dvě veličiny x a y společně s pevnými dalšími parametry (jako např. u rovnice $z^2 = ax + b^2$ vyjádřené geometricky) jsou oba popisy, geometrický a algebraický ekvivalentní. Tak vznikla „**analytická geometrie**“.

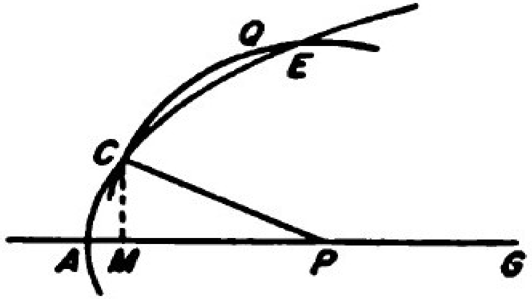
MUNI SCI

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

„Metody“ Descarta a Fermata

curve. To illustrate this point Descartes chose what he regarded as "not only the most useful and most general problem in geometry that I know, but even that I have ever desired to know."[30] This is the determination of the normal to a given curve. In somewhat simplified form, the method of Descartes is as follows:

Fig. 13



Let the equation of the curve ACQ (Fig. 13) be given with respect to A as origin and AG as axis. Let the rectangular coordinates of C be $AM = y$ and $CM = x$, and let CP be the desired line normal to the curve at C and intersecting the axis in the point P, where $AP = v$ and $CP = s$. Then (from the Pythagorean theorem) $\overline{PC}^2 = s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, and the equation of

[30] Book II, p. 342.

„Metody“ Descarta a Fermata

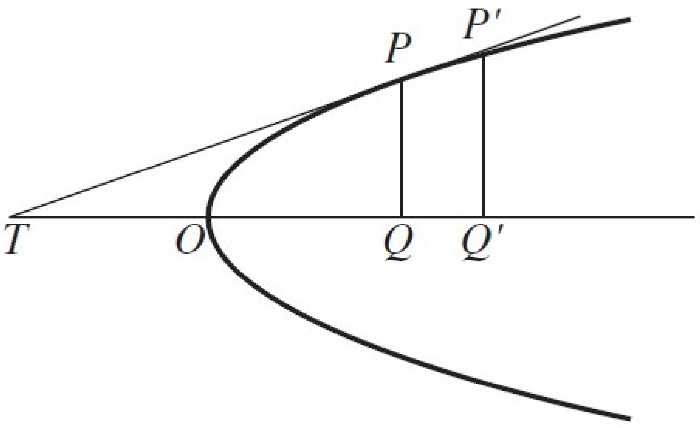
the circle through C with P as center is $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Eliminating either x or y in the equations of the curve and the circle, one obtains an equation in one "unknown quantity," x or y, and the quantity v. If the circle cuts the curve in two points C and E, the final equation above will have two unequal roots. But "the nearer together the points C and E are taken, the less difference there is between the roots; and when the points coincide, the roots are exactly equal, that is to say, the circle through C will touch the curve CE at the point C without cutting it." That is, in modern terminology, one finds the value of v by setting the discriminant of the equation equal to zero, and v then determines the normal line PC, and hence also the tangent line.

Fermat

- *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*

find the tangent to an algebraic curve of the form $y = f(x)$. If P is a point on the curve $y = f(x)$ at which the tangent is desired, and if the coordinates of P are (a, b), then a neighboring point on the curve with coordinates $x - a + E$, $y = f(a + E)$ will lie so close to the tangent that one can think of it as approximately on the tangent, as well as on the curve. If, therefore, the subtangent at the point P is $TQ = c$ (Fig. 15.7), the triangles TPQ and $TP'Q'$ can be taken as being virtually similar. Hence, one has the proportion

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}.$$



A kde jsou tam „kartézské souřadnice“?

- Descartes používá typicky jednu (oříznutou) přímku – **abscissa**, na které vynáší některé ze sledovaných hodnot (jako úsečky dané velikosti), jiné veličiny pak vynáší na systém přímek vztyčovaných k abscisse pod stále stejným úhlem, zpravidla kolmo – **ordinála**.
- **Souřadnice** (anglicky „co-ordinates“) jsou pak nástrojem, který zahrnuje abscissu i kolmou ordinálu, které jsou rovnoprávné.
- Pro Descarta i Fermata bylo podstatné, že v typických problémech určení polohy, kde jsou svázány dvě veličiny x a y společně s pevnými dalšími parametry (jako např. u rovnice $z^2 = ax + b^2$ vyjádřené geometricky) jsou oba popisy, geometrický a algebraický ekvivalentní. Tak vznikla „**analytická geometrie**“.

2. Analytická geometrie dnes

- Vektory
  - **lineární kombinace**, **lineární zobrazení** a **transformace**,
  - n-tice čísel versus „abstraktní“ vektorový prostor
  - **maticový počet** – původně „array method“, v Číně dávno před Kristem, Cardano – Ars Magna, 1545, Jan de Witt jako nástroj pro zápis transformací - 1659, Caley a Sylvester – 19. století
- Afinní geometrie
  - Euler zavedl pojem „afinní“ (z latiny, „podobný“, „související“) – 1748, během 19. století už vnímána jako Euclideovská geometrie „bez volby měřítka vzdálenosti“ (Felix Klein).
- Euklidovská geometrie
  - Velikosti pomocí „skalárního součinu“, úhly, ve funkcionální analýze Hilbertovy prostory,
- Projektivní geometrie
  - Řeší „problém s paralelními přímkami“ přidáním nekonečných bodů
  - Perspektiva, projekce, postupně rozvíjeno od Pappa (3. st.), přes Keplera a Desarguese (17. st.), k Möbius a Plücker (19. století, algebraická geometrie)