F1251 — cvičení — příklady z kapitol 8–10

Budeme potřebovat Pogsonovu rovnici: $m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$ a Stefanův-Boltzmannův zákon: $L = 4\pi r^2 I$. Poznámka: I se často značí jako F.

8.1.: Za I_1/I_2 postupně dosadíme 1, 10, 100 a 1000, dle zadání. Čili nám vyjde, že $m_1 - m_2 = 0\,\mathrm{mag}$, resp. $-2,5, -5$ a $-7,5\,\mathrm{mag}$ ve stejném pořadí, jak jsme pro jednotlivé případy dosazovali poměr toků. Záporné znaménko výsledků nám říká, že hvězda s indexem 1 je jasnější ($I_1 > I_2$).

8.2.: Vyjádříme si z Pogsonovy rovnice I_1/I_2 : $\log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) = \frac{m_1 - m_2}{-2,5} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{m_1 - m_2}{-2,5}} = 10^{-0,4(m_1 - m_2)}$. Víme ze zadání, že $m_1 - m_2 = 7\,\mathrm{mag}$, takže $I_1/I_2 = 1,58 \cdot 10^{-3}$. Je vidět, že hvězda s indexem 1 je zde ta méně jasná, čili můžeme invertovat výsledek, abychom lépe viděli poměr: $I_2/I_1 = 630,96$.

8.3.: Každou ze studovanýcn hvězd dáme do vztahu s nějakou referenční hvězdou (ref) v Pogsonově rovnici: $m_1 - m_{\mathrm{ref}} = -2,5 \log \left(\frac{I_1}{I_{\mathrm{ref}}} \right)$ a totéž $m_2 - m_{\mathrm{ref}} = -2,5 \log \left(\frac{I_2}{I_{\mathrm{ref}}} \right)$. Víme, že hustoty zářivého toku můžeme normálně sčítat, čili $I_{\mathrm{celk.}} = I_1 + I_2$. Nyní dáme do poměru celkový tok našich dvou hvězd ku toku referenční hvězdy: $\frac{I_{\mathrm{celk.}}}{I_{\mathrm{ref}}} = \frac{I_1 + I_2}{I_{\mathrm{celk.}}} = \frac{I_1}{I_{\mathrm{celk.}}} + \frac{I_2}{I_{\mathrm{celk.}}}$. Potřebujeme si tedy vyjádřit poměry intenzit (hustot zářivého toku) z prvních dvou rovnic: $\frac{I_1}{I_{\mathrm{ref}}} = 10^{-0,4(m_1 - m_{\mathrm{ref}})}$ a stejně tak $\frac{I_2}{I_{\mathrm{ref}}} = 10^{-0,4(m_2 - m_{\mathrm{ref}})}$. Stejným způsobem si i vyjádříme poměr intenzit celkového toku našich hvězd ku referenční hvězdě:
$\frac{I_{\mathrm{celk.}}}{I_{\mathrm{ref}}} = 10^{-0,4(m_{\mathrm{celk.}} - m_{\mathrm{ref}})}$. Teď to dáme dohromady:
$10^{-0,4(m_{\mathrm{celk.}} - m_{\mathrm{ref}})} = 10^{-0,4(m_1 - m_{\mathrm{ref}})} + 10^{-0,4(m_2 - m_{\mathrm{ref}})}$. Využijeme pravidlo pro počítání s logaritmy a dostaneme:
$10^{-0,4 m_{\mathrm{celk.}}} 10^{0,4 m_{\mathrm{ref}}} = 10^{-0,4 m_1} 10^{0,4 m_{\mathrm{ref}}} + 10^{-0,4 m_2} 10^{0,4 m_{\mathrm{ref}}} \Rightarrow$
$10^{-0,4 m_{\mathrm{celk.}}} 10^{0,4 m_{\mathrm{ref}}} = 10^{0,4 m_{\mathrm{ref}}} \left(10^{-0,4 m_1} + 10^{-0,4 m_2} \right)$. Společný člen se nám na obou stranách rovnice pokrátí, rovnici zlogaritmujeme a celou rovnici podělíme $-0,4$. Nakonec dostaneme $m_{\mathrm{celk.}} = -2,5 \log \left(10^{-0,4 m_1} + 10^{-0,4 m_2} \right)$. Pro naši dvojhvězdu tedy vyjde, že $m_{\mathrm{celk.}} = 0,636\,\mathrm{mag}$.
Příklady tohoto typu s libovolným počtem hvězd můžeme i zapsat jednodušeji: $m_{\mathrm{n}} = -2,5 \log \sum_{i=1}^{n} 10^{-0.4 m_i}$, kde n nám značí celkový počet hvězd vícenásobného systému, jehož hvězdy sčítáme, a i zastupuje indexy jednotlivých hvězd systému.

8.4.: Použijeme Stefanův-Boltzmannův zákon a dosadíme dle zadání ($I_{\odot \mathrm{Z}}$ se nazývá solární konstanta a někdy se značí symbolem K):
$L_\odot = 4\pi r^2 I_{\odot \mathrm{Z}} = 4\pi (1,496 \cdot 10^{11})^2 1360 = 3,825 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.

8.5.: Máme odvodit následující vztah: $m - M = 5 \log r - 5$. Použijeme Pogsonovu rovnici a Stefanův-Boltzmannův zákon, ze kterého si vyjádříme I: $I = \frac{L}{4\pi r^2}$. Jelikož modul vzdálenosti svazuje pozorovanou a absolutní hvězdnou velikost se vzdáleností (v parsecích), uděláme přeznačení $m_2 = M$, kde nám tedy M značí absolutní hvězdnou velikost hvězdy o pozorované hvězdné velikosti m (m_1 tedy přeznačíme na m). Obdržíme tedy následující:
$m - M = -2,5 \log \left(\frac{\frac{I}{4\pi r_1^2}}{\frac{I}{4\pi r_2^2}} \right)$, kde r_1 značí vzdálenost hvězdy, odkud pozorujeme hvězdnou velikost m, a r_2 znační vzdálenost 10 pc, jak je definována absolutní hvězdná velikost. Jelikož obě I jsou jedna a tatáž intenzita (jedná se o jednu hvězdu) a ostatní jsou konstanty, toto vše se nám vykrátí a dostaneme následující: $m - M = -2,5 \log \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \right) = -2,5 \log r_2^2 - (-2,5 \log r_1^2)$, jelikož logaritmus podílu se rovná rozdílu jednotlivých logaritmů. Řekli jsme si, že $r_2 = 10$ (pc) a r_1 zjednodušíme přeznačením na r, čili přepíšeme rovnici: $m - M = -2,5 \log 100 + 2,5 \log r^2 = -5 + 2,5 \cdot 2 \log r$, kde jsme uplatnili pravidlo $\log x^y = y \log x$. Čili vidíme, že $m - M = -5 + 5 \log r$, což jsme měli odvodit.

9.1.: Použijeme modul vzdálenosti a vyjádříme si z něj M: $M = m - 5 \log r + 5$. Za r musíme dosadit vzdálenost Země–Slunce, ale v parsecích (viz příklad 8.5.). 1 pc = 206 289,5 AU → 1 AU = 1/206 289,5 pc. Nyní dosadíme:
$M = -26,74 - 5 \log \left(\frac{1}{206289,5} \right) + 5 = -26,74 + 5 \log 206289,5 + 5 = 4,83\,\mathrm{mag}.$

9.2.: Dle zadání předpokládáme, že $M_{18\mathrm{Sco}} = M_{\odot}$. Z modulu vzdálenosti (vyjádříme si z něj r) a použitím výsledku z 9.1. spočteme, že
$r = 10^{\frac{m_{18\mathrm{Sco}} - M_{18\mathrm{Sco}} + 5}{5}} = 10^{\frac{5,5 - 4,83 + 5}{5}} = 13,61\,\mathrm{pc}.$

9.3.: Použijeme vlnovou délku zeleného světla, $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$. Rozlišovací schopnost, která se značívá θ a vyjde nám v radiánech, se vypočte: $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$. Anebo, abychom se drželi značení a vzorce ve skriptech (kap. 10.4.3), rozlišovací schopnost v úhlových vteřinách: $\delta = 206265 \frac{1,22\lambda}{D}$ (pozor, abyste λ i D dosadili ve stejných jednotkách!), takže v našem příkladu $\delta = 206265 \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{0,254} = 0,54''$. V našem příkladu jeho rozlišovací schopnost nevyužijeme, jelikož nám pozorování bude kazit vysoká hodnota seeingu, který je dle zadání $2''$.

9.4.: Zvětšení je jednoduše poměr ohniskové vzdálenosti objektivu a okuláru, čili pro dalekohled Sky Watcher 190/1000 (SW) dostaneme $z_{\mathrm{SW}} = \frac{f_{\mathrm{obj.}}}{f_{\mathrm{ok.}}} = \frac{1000}{12} = 83,\bar{3}$. Zorné pole dalekohledu Θ závisí na vlastním zorném poli okuláru

ϑ a zvětšení dalekohledu (kap. 10.5.1 skript) a pro náš příklad a dalekohled Sky Watecher máme: $\Theta_{\mathrm{SW}} = \frac{\vartheta}{z} = \frac{50°}{83,\bar{3}} = 0,6° = 36'$. Nyní porovnáme s dalekohledem Celestron SCT 355/3910 (C) a dostaneme $z_{\mathrm{C}} = \frac{3910}{12} = 325,8\bar{3}$ a $\Theta_{\mathrm{C}} = \frac{50°}{325,8\bar{3}} \doteq 0,15° = 9'$. Vidíme, že dalekohled s větším objektivem nám při použití stejného okuláru dá větší zvětšení, ovšem naopak nám sníží zorné pole.

9.5.: Přepočteme frekvenci neutrálního vodíku na vlnovou délku: $\lambda = \frac{\mathrm{c}}{\nu}$, kde ν značí frekvenci: $\lambda = 0,21\,\mathrm{m}$, což je naše známá spektrální čára, v astronomii hojně používaná. Pro výpočet rozlišovací schopnosti použijeme vztah z příkladu 9.3.: $\delta = 206265 \frac{1,22 \cdot 0,21}{305} \doteq 173,3''$.

10.1.: Gravitační zrychlení je závislé na hmotnosti a poloměru daného objektu. Vystupuje zde samozřejmě i gravitační konstanta, takže dosazujte vždy v jednotkách SI. $g = \frac{\mathrm{G}M}{r^2} = \frac{\mathrm{G} \cdot 3 \cdot 10^{30}}{(10^3)^2} = 2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m/s^2}$ (srovnejte s g Země). Nyní si připomene něco z mechaniky a volného pádu: $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Polohu, odkud předmět padá, si stanovíme vhodně na nulu, čili $y_0 = 0\,\mathrm{m}$. Předmětu jsme neudělili žádnou počáteční rychlost (v zadání není zmíněna), čili $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$. Takže se nám rovnice zjednoduší na $y = \frac{1}{2} g t^2$, kde y je dráha, jakou předmět urazí, než dopadne (1 m). Nyní si vyjádříme z rovnice čas, dosadíme a obdržíme: $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 10^{12}}} = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{\mu s}$. Časová derivace použitého vztahu pro y nám dá rovinici pro určení rychlosti, s jakou předmět spadne na povrch neutronové hvězdy. Do tohoto vztahu dosadíme rovnici pro výpočet t a spočteme rychlost: $v = gt = g\sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2yg^2}{g}} = \sqrt{2yg} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{12}} = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s} = 2000\,\mathrm{km/s}$.

10.2.: Velikost gravitační síly a dostředivé síly (o stejné velikosti jako odstředivé, jen opačně orientované) jsou si rovny, čili $F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{d}} \Rightarrow \frac{\mathrm{G}Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Čili pro kruhovou dráhu a vyjádření si rychlosti dostaneme: $v^2 = \frac{\mathrm{G}M}{r}$. Mu síme si uvědomit, že r měříme od středu Země, čili pro nás $r = R + h$, kde R je poloměr Země a h je výška nad povrchem Země, pro kterou máme určit oběžnou kruhovou rychlost. Nyní dosadíme: $v = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{R+h}} = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6371 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3}} = 7690,4\,\mathrm{m/s} \doteq 7,7\,\mathrm{km/s}$.

10.3.: Geostacionární družice je družice, která oběhne Zemi za jeden siderický den (úhlové rychlosti se rovnají). Čili při pohledu z povrchu Země ji máme stále nad sebou (pohybuje se samozřejmě nad rovníkem). Abychom zjistili její výšku pro danou periodu a aby nám nespadla na hlavu či neuletěla, opět se zde budou rovnat velikosti gravitační a dostředivé síly. Takže co se týče rychlosti, víme ze zmíněného a z předešlého příkladu, že $v^2 = \frac{\mathrm{G}M}{r}$. Víme také, že velikost oběžné rychlosti objektu pohybujícího se po kruhové dráze je $v = \frac{2\pi r}{P}$, kde P je perioda oběhu ($P = 23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min} = 86\ 160\,\mathrm{s}$). Toto vyjádření rychlosti nyní dosadíme do předešlé rovnice a poté si vyjádříme r, které potřebujeme znát: $\frac{4\pi^2 r^2}{P^2} = \frac{\mathrm{G}M}{r} \Rightarrow 4\pi^2 r^3 = \mathrm{G}MP^2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}MP^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 86160^2}{4\pi^2}} = 42\ 228\ 229{,}45\,\mathrm{m} \doteq 42\ 228\,\mathrm{km}$. Opět je to vzdálenost od středu Země, kterou musíme odečíst, abychom zjistili výšku nad povrchem Země ($r - R = h$): $42\ 228 - 6371 = 35\ 857\,\mathrm{km}$. Pro výpočet oběžné rychlosti využijeme již několikrát použitý vztah ($r = R + h$): $v = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi 42228229{,}45}{86160} \doteq 3079{,}5\,\mathrm{m/s} \doteq 3{,}08\,\mathrm{km/s}$.

10.4.: Úniková rychlost z povrchu objektu a jeho gravitačního vlivu je tzv. 2. kosmická rychlost. Její rychlost získáme ze zákona zachování energie, kde se rovná kinetická energie energii potenciální: $E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathrm{G}Mm}{r}$. A nyní si vyjádříve rychlost: $v = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}\cdot 6\cdot 10^{24}}{6371\cdot 10^3}} \doteq 11\ 212\,\mathrm{m/s} \doteq 11{,}2\,\mathrm{km/s}$. Pro únik z vlivu gravitace Slunce a opuštění sluneční soustavy použijeme 3. kosmickou rychlost, kde namísto hmotnosti Země dosadíme hmotnost Slunce a namísto poloměru Země vzdálenost Země–Slunce:
$v = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}\cdot 2\cdot 10^{30}}{1{,}496\cdot 10^{11}}} = 42\ 244.2\,\mathrm{m/s} \doteq 42{,}2\,\mathrm{km/s}$. Mohli byste namítnout, že třeba ignorujeme poloměr Země nebo hmotnost Země, ale pokud to zkusíte do rovnice přidat, zjistíte, že výsledná rychlost je téměř totožná s naším výsledkem, čili že parametry Země jsou oproti parametrům Slunce zanetbatelné.

10.5.: Jedná se zde o Dopplerův jev, kde si označíme laboratorní a pozorovanou vlnovou délku: $\lambda_0 = 656{,}297\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_\mathrm{p} = 656{,}666\,\mathrm{nm}$. Vlnová délka laboratorní a pozorované spektrální čáry je s radiální rychlostí v_r svázána vztahem $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_\mathrm{r}}{\mathrm{c}}$, kde $\Delta\lambda = \lambda_\mathrm{p} - \lambda_0$ a c je rychlost světla ve vakuu. Příklad tedy vypočteme jednoduše: $v_\mathrm{r} = \mathrm{c}\frac{\lambda_\mathrm{p} - \lambda_0}{\lambda_0} \doteq 169\,\mathrm{km/s}$. Hvězda se pohybuje od nás, jelikož $\lambda_\mathrm{p} > \lambda_0$ a tím pádem v_r je kladná (červený posun). Záporná v_r a $\lambda_\mathrm{p} < \lambda_0$ by znamenalo, že se hvězda pohybuje směrem k nám (modrý posun).

Hodně štěstí u písemky (písemek)! :-)