

## F1421 – Základní matematické metody ve fyzice – k procvičení

1. V ortonormální pravotočivé bázi v  $\mathbf{R}^3$  jsou svými složkami zadány vektory

$$\vec{a} = (1, -2, 2), \vec{b} = (-3, 1, 0), \vec{c} = (-1, -3, 4).$$

a) Zjistěte, zda jsou tyto vektory lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé. V kladném případě vyjádřete některý z nich jako lineární kombinaci ostatních.

b) Vypočtěte složky vektoru  $\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$  a charakterizujte všechny vektory, které jsou k vektoru  $\vec{u}$  kolmé.

2. Pohyb hmotného bodu se děje podél osy  $x$  a řídí se pohybovou rovnicí  $\ddot{x} + Kx = 0$ , kde  $K$  je nenulová konstanta. Určete časovou závislost polohy bodu na čase, jestliže jeho počáteční poloha je  $x(0) = 0$  a počáteční rychlost  $\dot{x}(0) = v_0$ ,

a) je-li  $K > 0$ , b) je-li  $K < 0$ . V obou případech zakreslete schematicky graf řešení  $x = x(t)$ .

3. a) Určete přirozený definiční obor funkce  $f(x) = \frac{\ln \sqrt{\sin x^2}}{\cos x}$ , definiční obor její derivace a derivaci vypočtěte.

b) Určete přirozený definiční obor funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  a nalezněte všechny její primitivní funkce.

4. Je dána funkce dvou proměnných  $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$  pro  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

Dodefinováním vzniká funkce spojitá v celé rovině proměnných  $x, y$ .

a) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu (podle obou proměnných) této funkce v obecném bodě  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

b) Zjistěte, zda funkce má parciální derivace prvního řádu také v bodě  $(x, y) = (0, 0)$  a v kladném případě je určete. (Návod: vyjděte z definice parciálních derivací.)

c) Je funkce diferencovatelná v obecném bodě  $(x, y) \neq (0, 0)$ ? Zdůvodněte. Pokud ano, vyjádřete její úplný diferenciál jako funkci přírůstků  $h = x - x_0$ ,  $k = y - y_0$  v bodě  $(x_0, y_0) = (2, -1)$ .

5. Sportovní střelec vypálil na terč 50 ran. Jedná se o klasický terč s možnými hodnotami zásahu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (náhodná veličina  $X$ ). Výsledky střelce ukazuje tabulka:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet	1	3	4	5	5	7	8	10	4	2	1

a) Zapište tabulkou rozdělení náhodné veličiny  $X$ .

b) Určete střední hodnotu veličiny  $X$ .

c) Určete rozptyl veličiny  $X$ .

d) Která z hodnot veličiny  $X$  je nejpravděpodobnější?