

## Koherenční délka

podzimní semestr 2021

Téma časové koherence napatří mezi nejjednodušší témata ani po stránce teoretické, ani po stránce experimentální. Abychom se pokusili pochopení problematiky usnadnit, rozhodli jsme se téma popsat z více pohledů, které se navzájem doplňují, ale také překrývají. V části 1 se nejprve seznámíme s nejjednodušší, idealizovanou představou časové koherence, předpokládající koherentnost světla v konstantním časovém intervalu. Výsledky této představy mohou být použity i pro orientační vyhodnocení reálné situace. Výpočet idealizované představy je proveden pomocí integrace v čase. Koherenční vlastnosti ale úzce souvisí a mohou být tedy studovány pomocí spektrálního profilu zdroje, bez ohledu na to, co profil způsobuje. Tento přístup je použit pro odvození vztahu pro reálný stupeň časové koherence a viditelnost interferenčního jevu v části 2. Výsledný vztah je aplikován na několik základních spektrálních profilů v části 3, které lze již použít v reálných situacích.

Jako rozšiřující čtení lze chápat část 4, která zobecňuje úvodní úvahu z části 1 a ukazuje, jak popisovat časovou koherenci jako korelaci v čase. Zavádí též přesnou definici koherenční doby. Výsledky aplikace na běžné světelné zdroje, tzv. chaotické světlo, jsou uvedeny v části 5. Podrobný výpočet lze nalézt v [3]. Rozšiřujícím čtením je i část věnovaná dnešnímu přístupu vyhodnocení interferogramů – Fourierově transformaci (část 6).

V posledních praktických oddílech je stručně popsán Michelsonův interferometr (část 7) a postup vyhodnocení interferenčního obrazce (část 8). Podrobnosti k sestavení Michelsonova interferometru, jeho justaci a použití nalezne čtenář v [4].

## 1 Základní představa časové koherence

Z praktického hlediska můžeme přibližně říci, že světlo je koherentní, pokud „dobře interferuje“. Při pozorování interference světlo ze zdroje obvykle rozdělíme dělením amplitudy nebo vlnoplochy, vlny vzájemně zpozdíme a následně zase složíme. Zkušenost ukazuje, že velmi dobře pozorujeme interference monochromatického světla laserů či výbojek, podstatně horších výsledků dosáhneme při použití bílého světla. V řadě situací interference bílého světla vůbec nezaznamenáme. Jak je to možné?

Při výpočtech interference se v základních kurzech často počítá se zcela koherentními monochromatickými vlnami, vyzařovanými po nekonečně dlouhou dobu. Takový předpoklad je však velmi dobrou aproximací pouze v případě stabilizovaných laserů. V běžném zdroji (bez výrazné stimulované emise) však atomy vyzařují světlo nezávisle a vyzařování je omezeno jen na určitý časový interval. Představme si, že zdroj vyzařuje monochromatickou harmonickou lineárně polarizovanou vlnu s konstantní amplitudou po dobu  $\tau_c$ . Poté se fáze náhodně změní a situace se opakuje. Pro jednoduchost předpokládejme, že doba  $\tau_c$  je vždy stejná.

Ve skalární aproximaci v konkrétním místě (zvolme  $x = 0$ ) bude intenzita elektrického pole vlnění dvou interferujících vln, z nichž jedna vznikla zpožděním „části“ druhé o čas  $\tau$

$$\begin{aligned} E_1(t) &= E_{01} e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]} \\ E_2(t) &= E_{02} e^{i[\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau)]}. \end{aligned}$$

Zachová-li se v původní vlně fáze po dobu  $\tau_c$ , je fázový rozdíl

$$\delta\phi(t) = \phi(t) - \phi(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0; +\tau_c - \tau \rangle, \text{ atd.} \\ \text{náhodné číslo,} & \text{jinak} \end{cases}.$$

Výsledná intenzita elektrického pole je

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{01}e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]} + E_{02}e^{i[\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau)]}$$

a intenzita záření středovaná přes periodu<sup>1</sup>

$$I(t) \propto E(t) \cdot E^*(t) = \quad (1)$$

$$= \left\{ E_{01}e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]} + E_{02}e^{i[\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau)]} \right\} \cdot \left\{ E_{01}e^{-i[\omega_0 t + \phi(t)]} + E_{02}e^{-i[\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau)]} \right\}$$

$$= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01}E_{02} \left[ e^{i(\omega_0\tau + \delta\phi(t))} + e^{-i(\omega_0\tau + \delta\phi(t))} \right]$$

$$= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos[\omega_0\tau + \delta\phi(t)]. \quad (2)$$

Okamžitou hodnotu intenzity jako funkci času ale měřit neumíme. Detektory měří časovou střední hodnotu intenzity  $I$  přes integrační dobu  $T_D \gg \tau_c$ , lze tedy předpokládat  $T_D = N\tau_c$ . Pro střední hodnotu kosinu ve výrazu (2) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} \cos[\omega_0\tau + \delta\phi(t)] dt &= \frac{1}{N\tau_c} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau_c}^{(i+1)\tau_c} \cos[\omega_0\tau + \delta\phi(t)] dt = \\ &= \frac{1}{N\tau_c} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau_c}^{(i+1)\tau_c-\tau} \cos[\omega_0\tau + \underbrace{\delta\phi(t)}_0] dt + \frac{1}{N\tau_c} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{(i+1)\tau_c-\tau}^{(i+1)\tau_c} \cos[\omega_0\tau + \underbrace{\delta\phi(t)}_{\text{náhodné číslo}}] dt \\ &= \frac{1}{N\tau_c} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau_c}^{(i+1)\tau_c-\tau} \cos \omega_0\tau dt = \frac{\tau_c - \tau}{\tau_c} \cos \omega_0\tau \end{aligned}$$

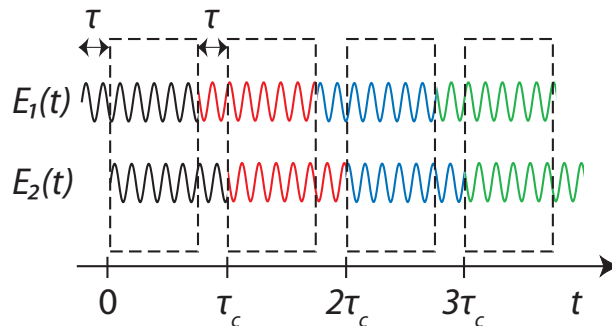
Označíme-li zlomek ve výsledku jako  $\gamma_t$  a fázové zpoždění  $\Delta\phi = \omega_0\tau$ , lze pro výslednou intenzitu elektrického pole psát

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2\gamma_t E_{01}E_{02} \cos \Delta\phi$$

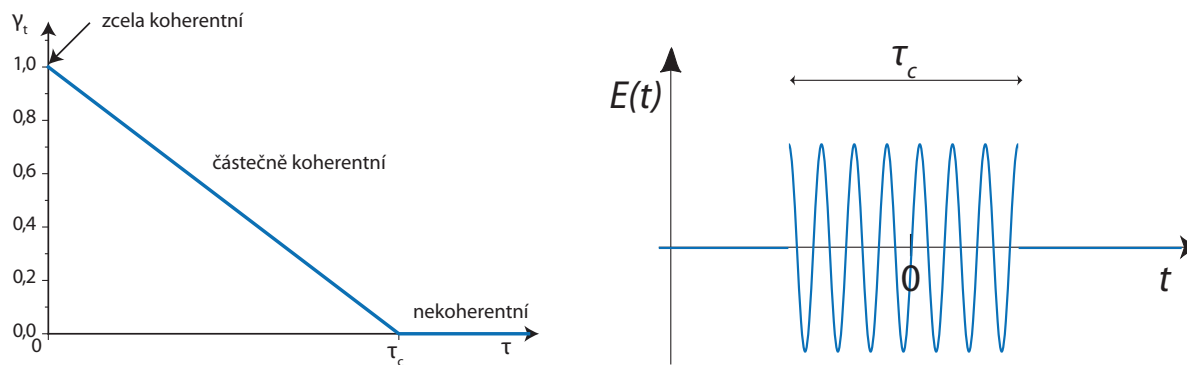
a obdobně pro intenzitu záření

$$I = I_1 + I_2 + 2\gamma_t \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Použití komplexní funkce místo reálného průběhu vystředuje okamžitou hodnotu Poyntingova vektoru přes periodu. Použití harmonických funkcí ve vyjádření okamžité hodnoty ponechá členy s  $\cos^2 \omega_0 t$  a  $\cos(2\omega_0 t)$ , které se po středování přes periodu vystředují na 1/2, resp. na nulu.



Obrázek 1: Aproximace konstantní koherenční dobou



Obrázek 2: a) Stupeň časové koherence. b) K spektrální hustotě koherenční dobou ořezané vlny.

### Stupeň časové koherence

Oproti interferenci zcela koherentních vln interferenční člen tedy navíc obsahuje tzv. stupeň časové koherence

$$\gamma_t = \frac{\tau_c - \tau}{\tau_c}. \quad (4)$$

Graf této funkce je na obrázku 2a).

Je-li zpoždění  $\tau$  mezi vlnami prakticky zanedbatelné ve srovnání s koherenční dobou  $\tau_c$ ,  $\gamma_t \approx 1$  a interference nastává jako v případě zcela koherentních vln. Při zpoždění překračujícím koherenční dobu spolu interferují vlny s náhodným fázovým rozdílem (zcela nekoherentní vlnění). Ačkoliv v rámci každého úseku je interferenční člen nenulový, jeho časová střední hodnota integrovaná detektorem je již rovna nule ( $\gamma_t = 0$ ). Pro výslednou intenzitu platí

$$I = I_1 + I_2.$$

Intenzita nezávisí na vzájemném zpoždění vln, vlny spolu neinterferují.

### Viditelnost interference

Je zřejmé, že za viditelností interferenčního jevu stojí třetí člen v rovnici (3).<sup>2</sup> Viditelnost  $\mathcal{V}$  interferenčního jevu je definována jako

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min} + I_{\max}},$$

ve kterém vystupují hodnoty nejbližších lokálních maxim a minim intenzity v interferenčním obrazci. Je tedy funkcí časového zpoždění  $\tau$ , resp. dráhového rozdílu  $\mathcal{L}$  ( $\Delta\phi = \omega_0\tau \propto k_0\mathcal{L}$ ). Po dosazení extrémních hodnot z (3)

$$\mathcal{V} = \frac{2\gamma_t\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Budou-li intenzity obou interferujících vln stejné,  $I_1 = I_2$ , je viditelnost interferenčního jevu rovna stupni koherence

$$\mathcal{V} = \gamma_t.$$

<sup>2</sup>Proto se tomuto členu také říká interferenční.

## Spektrální profil

V závěru této části si všimněme spektrálních vlastností záření, které by mělo charakter koherenční dobou ořezané vlny (viz obr. 2b). Necht<sup>3</sup>

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{i2\pi\nu_0 t}, & t \in \langle -\tau_c/2; +\tau_c/2 \rangle \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Místo úhlové frekvence jsme přešli k běžně užívané frekvenci  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ . Z Fourierovy teorie plyne

$$E(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = E_0 \int_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = E_0 \left[ \frac{e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t}}{i2\pi(\nu_0 - \nu)} \right]_{-\tau_c/2}^{+\tau_c/2} = E_0 \tau_c \frac{\sin[\pi(\nu_0 - \nu)\tau_c]}{\pi(\nu_0 - \nu)\tau_c}.$$

Spektrální profil intenzity záření, který je úměrný kvadrátu  $E(\nu)$ , odpovídá tedy funkci

$$f(\nu) \propto \text{sinc}^2[\pi(\nu - \nu_0)\tau_c].$$

Centrální peak funkce sinc má při hladině nulové intenzity plnou šířku (vzdálenost prvních minim funkce sin)  $2/\tau_c$ . Šířka peaku ve smyslu FWHM (plná šířka při poloviční intenzitě maxima)

$$\Delta\nu_{1/2} \approx \frac{1}{\tau_c}.$$

Oříznutím vlny v čase tedy dojde k demonochromatizaci spektrální hustoty, popisované světlo obsahuje i jiné frekvence než předpokládané  $\nu_0$  (resp.  $\omega_0$ ). Pokud je koherenční doba mnohem větší ve srovnání s periodou  $\tau_c \gg T$ , je rozšíření spektrální čáry  $\Delta\nu_{1/2} \ll \nu_0$ . Mluvíme pak o kvazimonochromatickém světle.

## Koherenční délka

Za koherenční dobu  $\tau_c$  světlo urazí dráhu

$$l_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu_{1/2}}.$$

Protože

$$|\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda_0^2} |\Delta\lambda|, \quad \lambda_0 = c/\nu_0,$$

pro koherenční délku dostaneme přibližný vztah

$$l_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_{1/2}}.$$

Ten nám umožňuje odhadnout koherenční délku světla podle monochromatickosti spektrálního profilu zdroje.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>V tomto zjednodušení pomíjíme fakt, že vlnových úseků je během integrace detektoru mnoho. Jak se výsledky změní, pokud bychom to uvažovali?

<sup>4</sup>I když je vztah použitelný pro kvazimonochromatické světlo, obvykle se neubráníme pokušení ho vyzkoušet i na bílé světlo ( $\lambda \approx 500$  nm,  $\Delta\lambda_{1/2} \approx 300$  nm), koherenční délka  $l_c \approx 0,8$   $\mu$ m. Proto pozorujeme interferenci např. na mýdlových bublinách, olejových vrstvách, ale ne na skleněné okenní tabuli. Hodnota  $\Delta\lambda_{1/2}$  ale závisí i na použitém detektoru. Není jedno, zda pozorujeme interferenci bílého světla černobílou kamerou nebo očima, neboť pozorování očima usnadňuje barevné vnímání.

## Model a skutečnost

Předpoklad o konstantní době  $\tau_c$  vln vyzařovaných během integreční doby detektoru nám sice dovolil odvodit jednoduché vztahy pro koherenční charakteristiky, neodpovídá ale realitě. Doba vyzařování je náhodná veličina, ovlivňovaná vzájemnými srážkami atomů. Samotná intenzita záření exponenciálně klesá během vyzařování, tak jak je atomový oscilátor tlumen. Atomy rovněž nevyzařují vždy na stejné frekvenci  $\lambda_0$ . Nejenže spektrální čára může mít více komponent, ale i vlnová délka emitovaná pohybujícím se atomem a pozorovaná detektorem podléhá Dopplerovu jevu. To vede k tomu, že spektrální profil je obvyčejně odlišný od uvažované funkce  $\text{sinc}^2$  a většinou bývá popsán Gaussovou, Lorentzovou nebo Voigtovou funkcí. Uvedené výsledky lze tedy použít jen k odhadům, lze-li reálnou situaci naším modelem aproximovat.

V další části se proto podíváme na to, jak průběh viditelnosti interference (a tedy i stupně koherence) závisí na reálném spektrálním profilu. To nám umožní nejen popsat koherenční vlastnosti reálného světla lépe, ale navíc i stanovit tento spektrální profil z interferenčních experimentů.

## 2 Viditelnost interference kvazimonochromatického světla

Pro případ monochromatického světla o vakuové frekvenci  $\omega$  a dvou svazků o stejné intenzitě  $I_0$  lze pro výslednou intenzitu psát

$$I(\Delta\phi) = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi),$$

kde fázový rozdíl  $\Delta\phi = \omega\tau$ ,  $\tau$  je vzájemné časové zpoždění úměrné optickému dráhovému rozdílu  $\mathcal{S}$ . Pro téměř monochromatické světlo, vyzařované atomem na spektrální čáře nenulové šířky, zaveďme pro oba svazky stejný intenzitní spektrální profil  $f(\omega)$  normovaný  $\int f(\omega)d\omega = 1$ . Protože jednotlivé spektrální příspěvky se sčítají nekoherentně, dostaneme pro celkovou intenzitu spektrální čáry v závislosti na zpoždění

$$I(\tau) = \int 2I_0 f(\omega)[1 + \cos(\omega\tau)]d\omega = 2I_0[1 + \int f(\omega) \cos(\omega\tau)d\omega]. \quad (5)$$

Ve zbylém integrálu rozšíříme argument kosinu o frekvenci ve středu čáry  $\omega_0$

$$\int f(\omega) \cos(\omega\tau)d\omega = \int f(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)\tau + \omega_0\tau]d\omega$$

a kosinus rozepíšeme

$$\int f(\omega) \{ \cos[(\omega - \omega_0)\tau] \cos(\omega_0\tau) - \sin[(\omega - \omega_0)\tau] \sin(\omega_0\tau) \} d\omega.$$

Kosiny obsahující pouze  $\omega_0$  vytkneme mimo integrál

$$\cos(\omega_0\tau) \overbrace{\int f(\omega) \cos [(\omega - \omega_0)\tau] d\omega}^{\eta} - \sin(\omega_0\tau) \overbrace{\int f(\omega) \sin [(\omega - \omega_0)\tau] d\omega}^{\xi}.$$

Protože pro kvazimonochromatické světlo je  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ , integrály jsou velmi pomalou funkcí  $\tau$

$$\eta = \int f(\omega) \cos [(\omega - \omega_0)\tau] d\omega$$

$$\xi = \int f(\omega) \sin [(\omega - \omega_0)\tau] d\omega.$$

Intenzitu lze tedy psát ve tvaru

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + \eta \cos(\omega_0\tau) - \xi \sin(\omega_0\tau)] \quad (6)$$

Z podmínky lokálních extrémů intenzity ( $dI/d\tau = 0$ ) při zanedbání  $d\xi/d\tau$  a  $d\eta/d\tau$  obdržíme pro extrémní hodnotu s  $\tau^*$

$$\operatorname{tg}(\omega_0\tau_*) = -\xi/\eta. \quad (7)$$

Po dosazení do (6) je intenzita maxim a minim

$$I(\tau_*) = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta} \cos(\omega_0\tau_*) \right],$$

což lze s uvážením

$$\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\eta} = \frac{1}{|\cos(\omega_0\tau_*)|}$$

přepsat do tvaru

$$I(\tau_*) = 2I_0 \left[ 1 \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right].$$

Viditelnost interferenčního jevu potom bude

$$\mathcal{V}(\tau) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

To nás vede přepsat výraz pro obecnou intenzitu (6) do tvaru

$$I(\tau) = 2I_0 \left\{ 1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \left[ \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos(\omega_0\tau) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin(\omega_0\tau) \right] \right\}$$

a s využitím vzorce  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$  lze napsat výsledný výraz pro intenzitu

$$I(\tau) = 2I_0 \left[ 1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cos(\omega_0\tau + \chi) \right], \quad (8)$$

ve kterém je

$$\operatorname{tg}\chi = \xi/\eta. \quad (9)$$

Jak je patrné srovnáním s (3), stupeň časové koherence je nyní dán výrazem

$$\gamma_t(\tau) = \mathcal{V}(\tau) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

a současně dochází k určitému posuvu proužků.

## Symetrický profil

Budeme-li speciálně předpokládat symetrický spektrální profil, je integrál liché funkce  $\xi = 0$ , takže k posuvu proužků nedochází

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + \gamma_t \cos(\omega_0\tau)], \quad (10)$$

a stupeň časové koherence bude roven jen koeficientu  $\eta$

$$\gamma_t(\tau) = \mathcal{V}(\tau) = \left| \int f(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega \right|. \quad (11)$$

Význam předešlého závěru spočívá v tom, že pro určitý spektrální profil lze předpočítat křivku viditelnosti interferenčního jevu v závislosti na časovém zpoždění, a tedy na dráhovém rozdílu mezi svazky. Protože tuto křivku lze rovněž určit z experimentu, umožňuje nám to stanovit parametry spektrálního profilu, i když samotný profil nejsme schopni přímo rozlišit.

Uvedený postup použil už Michelson při studiu spektrálního složení atomových spektrálních čar pomocí dvoupráskového interferometru. Spektrální rozlišení dvoupráskového interferometru je zcela nedostatečné k tomu, abychom pozorovali samotné spektrum na jednom proužku, neboť intenzita je velmi pomalou funkcí dráhového rozdílu ( $\cos\Delta\phi$ ). Jinak je tomu u vícepráskového Fabry-Perotova interferometru, kde vysoká odrazivost zrcadel interferenční maxima silně zúží.

Rozdíl mezi oběma přístroji je velmi podobný rozdílu mezi dvojštěrbinou a mnohopaprskovou difrakční mřížkou (u interferometrů dělíme amplitudu vlny, u difrakce vlnoplochu). Přesto lze dvoupraprskový (Michelsonův) interferometr k odhalení složení spektrální čáry využít, právě výše uvedeným způsobem.

V případě složitějšího spektra je však obdobný postup nepoužitelný, neboť nevíme, jaký tvar spektra máme předpokládat. V absorpčních interferometrech, které měří intenzitu bílého světla po průchodu absorbujícím prostředím, se proto využívá modernějšího postupu výpočtu spektra z Fourierovy transformace (viz oddíl 6).

V následujícím textu si dále ukážeme výpočet viditelnosti interferenčního obrazce pro některé spektrální profily. Ukázky viditelnosti jsou na obrázku 3.

### 3 Výpočet viditelnosti interference typických spektrálních profilů

#### 3.1 Diracova $\delta$ -funkce

Nejprve zkusme výsledek aplikovat na čistě monochromatické světlo, jehož spektrální profil můžeme charakterizovat Diracovou  $\delta$ -funkcí

$$f_m(\omega) = \delta(\omega - \omega_0).$$

Výpočet z (11) dává podle předpokladů

$$\mathcal{V}(\tau) = \left| \int_0^\infty \delta(\omega - \omega_0) \cos[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega \right| = |\cos[(\omega_0 - \omega_0)\tau]| = 1.$$

#### 3.2 Dvojice Diracových $\delta$ -funkcí

Vezměme nyní dvě Diracovy funkce, vzdálené ve spektru o interval  $\Delta\omega$

$$f_{mm}(\omega) = \frac{1}{2} \{ \delta[\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2)] + \delta[\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2)] \}.$$

Výpočet z (11) dává

$$\mathcal{V}_{mm}(\tau) = \frac{1}{2} \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \right|.$$

Viditelnost interferenčního obrazce se tedy periodicky mění, s minimy viditelnosti pro

$$\frac{\Delta\omega\tau}{2} = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Mezi dvěma minimy viditelnosti je vzdálenost  $\pi$ . Označíme-li periodu dráhového rozdílu, se kterou v experimentu nastávají minima viditelnosti,  $\Delta\mathcal{S} = c\Delta\tau$ , pak vzdálenost čar ve spektru je

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\Delta\mathcal{S}}.$$

Tomu odpovídá rozdíl ve frekvencích a vlnových délkách

$$\Delta\nu = \frac{c}{\Delta\mathcal{S}}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\mathcal{S}}.$$

Měříme-li  $\Delta\mathcal{S}$  v jednotkách vlnové délky  $\Delta\mathcal{S} = \Delta M\lambda$ , pro vzdálenost spektrálních čar dostaneme

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta M}.$$

Tímto případem můžeme aproximovat např. záření vícemódového laseru, případně atomů vyzařujících světlo na dubletových spektrálních čarách. Atomové čáry mají ale konečnou spektrální šířku.

### 3.3 Gaussův profil

Vezměme normovaný Gaussův spektrální profil v proměnné  $\omega$

$$f_g(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $\sigma$  ve smyslu směrodatné odchylky s plnou šířkou čáry v polovině výšky (FWHM) souvisí

$$\Delta\omega_{1/2} = 2\sqrt{2\ln 2} \cdot \sigma. \quad (12)$$

Výpočet z (11) dává pro viditelnost interferenčního jevu při použití kvazimonochromatického světelného zdroje s gaussovsky rozšířenou spektrální čarou

$$\mathcal{V}_g(\tau) = e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}}. \quad (13)$$

### 3.4 Dvojice Gaussových profilů

Spektrum některých prvků je tvořeno dvojicemi čar s malou vzájemnou vzdáleností, tzv. dubletů. Předpokládejme pro obě čáry stejný Gaussův profil, symetricky rozložený ve vzdálenosti  $\Delta\omega/2$  od  $\omega_0$

$$f_{gg}(\omega) = \frac{1}{2} \{f_g[\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2)] + f_g[\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2)]\}.$$

Po dosazení do rovnice (11) kosinus rozšíříme o  $\pm\Delta\omega\tau/2$ :

$$\cos[(\omega - \omega_0)\tau] = \cos[(\omega - (\omega_0 \pm \Delta\omega/2))\tau \pm \Delta\omega\tau/2]$$

a rozepíšeme

$$\cos[(\omega - (\omega_0 \pm \Delta\omega/2))\tau \pm \Delta\omega\tau/2] = \cos[(\omega - (\omega_0 \pm \Delta\omega/2))\tau] \cos[\Delta\omega\tau/2] \mp \sin[(\omega - (\omega_0 \pm \Delta\omega/2))\tau] \sin[\Delta\omega\tau/2].$$

Viditelnost tedy bude

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{gg}(\tau) = & \left| \frac{1}{2} \cos(\Delta\omega\tau/2) \int_0^\infty f_g[\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2)] \cos[(\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2))\tau] d\omega \right. \\ & + \frac{1}{2} \sin(\Delta\omega\tau/2) \int_0^\infty f_g[\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2)] \sin[(\omega - (\omega_0 - \Delta\omega/2))\tau] d\omega \\ & + \frac{1}{2} \cos(\Delta\omega\tau/2) \int_0^\infty f_g[\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2)] \cos[(\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2))\tau] d\omega \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin(\Delta\omega\tau/2) \int_0^\infty f_g[\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2)] \sin[(\omega - (\omega_0 + \Delta\omega/2))\tau] d\omega \right|. \end{aligned}$$

Protože stupeň koherence samotného Gaussova profilu nezávisí na frekvenci ve středu čáry, jen na šířce profilu  $\sigma$ , jsou integrály pro obě čáry stejné. Ve výsledku

$$\mathcal{V}_{gg}(\tau) = e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}} \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \right|.$$

První činitel je tedy shodný s výsledkem pro samotný Gaussův profil (13), druhý činitel zase s výsledkem pro dvojici Dirakových funkcí. Viditelnost je tedy popsána stejnou Gaussovou funkcí jako pro samotný spektrální Gaussův profil, která je ale přerušována s periodou  $\Delta\mathcal{S} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$ .



Násobení viditelností předešlých dvou výsledků bylo možné předpokládat, představíme-li si dvojici Gaussových profilů jako konvoluci dvojice Diracových funkcí a Gaussova profilu.

Reálný spektrální profil dubletových čar může být ale ve skutečnosti často nesymetrický. Např. dvojice čar sodíkového dubletu  $D_1$  a  $D_2$  mají v opticky tenkém<sup>5</sup> plazmatu výbojky vlivem různých statistických vah horních stavů různou intenzitu (2:1). Pokud je ale koncentrace atomů sodíku v základním stavu vysoká a plazma opticky nepropustné, obě čáry jsou saturovány na podobné hodnotě intenzity.

## 4 Interference jako korelační experiment\*

V předešlých částech 2 a 3 jsme výpočet viditelnosti interferenčního jevu udělali ze znalosti spektrálního profilu čáry kvazimonochromatického světla. Tím jsme se elegantně vyhnuli nutnosti uvažovat nad časovým průběhem intenzity vyzařování a jejím statistickým charakterem. Pro kompletní obraz proto stručně doplníme, jak se podobný výpočet dá provést i v této reprezentaci.

Intenzitu středovanou přes periodu lze podle rovnice (1) pro stejné intenzity dopadajících vln přepsat i takto

$$I(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \{ |E(t)|^2 + |E(t + \tau)|^2 + 2\text{Re}[E^*(t) \cdot E(t + \tau)] \} \quad (14)$$

Střední hodnota registrovaná detektorem

$$\langle I(t) \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \{ \langle |E(t)|^2 \rangle + \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle + 2\text{Re} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \} \quad (15)$$

Protože ve stacionárním případě

$$I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \langle |E(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle, \quad (16)$$

obdržíme

$$\langle I(t) \rangle = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\text{Re} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle} \right]. \quad (17)$$

Výraz  $\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle$  představuje korelační funkci

$$\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_T E^*(t) \cdot E(t + \tau) dt.$$

### Komplexní stupeň koherence

Její normovaná varianta je tzv. komplexní stupeň časové koherence prvního řádu<sup>6</sup>

$$g^1(\tau) = \frac{\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle} \quad (18)$$

a vztah pro interferenční intenzitu pak bude

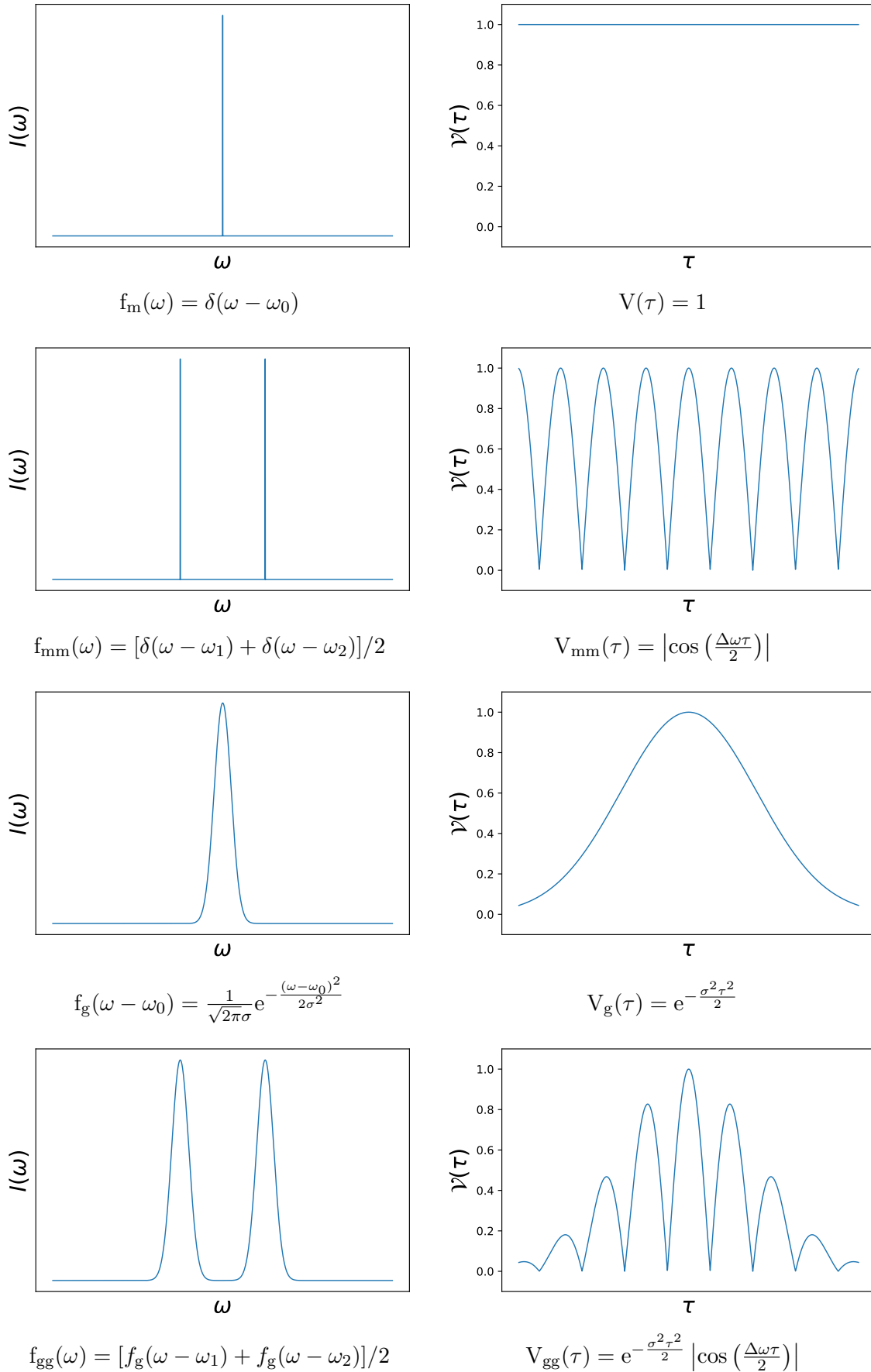
$$\langle I(t) \rangle = 2I_0 [1 + \text{Re} g^1(\tau)].$$

Srovnáme-li výraz s rovnicí (3), vidíme, že reálná část komplexního stupně koherence bude obsahovat nárůzdíl od  $\gamma_t$  i  $\cos \Delta\phi$ . Reálný stupeň časové koherence

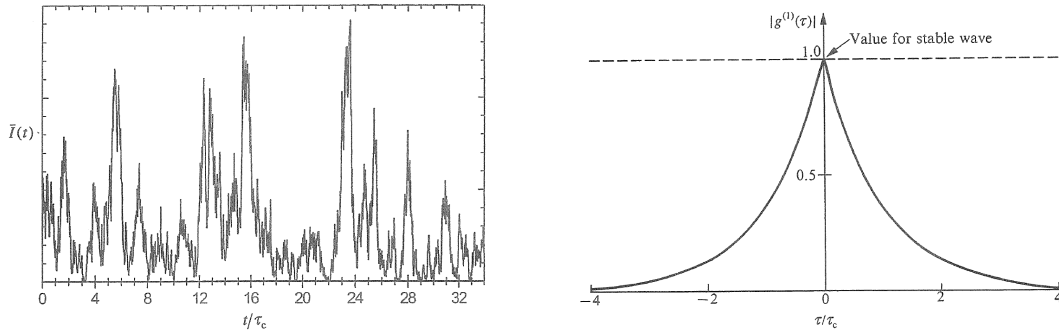
$$\gamma_t = |g^1(\tau)|. \quad (19)$$

<sup>5</sup>se zanedbatelnou absorpcí

<sup>6</sup>Existuje i stupeň časové koherence druhého řádu, definovaný obdobně na intenzitách záření (případně fotonových tocích).



Obrázek 3: Viditelnost interferenčního jevu pro různé spektrální profily, odvozená za předpokladu kvazimonochromaticnosti světla.



Obrázek 4: Vliv srážek. Převzato z [3].

Za předpokladu, že časové průměrování lze nahradit statistickým, lze určit stupeň koherence, a tedy i viditelnost interferenčního obrazce, ze statistických vlastností světelného zdroje. Koherenční doba je charakteristika korelační funkce definovaná

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g^1(\tau)|^2 d\tau. \quad (20)$$

## 5 Chaotické světlo

Jak již bylo zmíněno v první části, vyzařování klasického zdroje je výsledkem vyzařování mnoha atomů, které září nezávisle na sobě. Mluvíme pak o chaotickém vyzařování (světle). Lze identifikovat dva nejjednodušší případy:

### Převládají elastické srážky

V tomto případě jsou charakteristiky zdroje určeny srážkami mezi atomy. Srazí-li se atom pružně během vyzařování světla s jiným atomem, dojde během srážky k změně počáteční fáze vyzařovaného světla. Časový vývoj vlny pak má charakter obdobný obrázku 1, jen mají úseky různou délku a intenzitu. Časový vývoj je nasimulován na obr. 4, spektrálně je čára rozšířena tzv. Lorentzovým rozšířením. Pro komplexní stupeň koherence světla se srážkami určeným spektrálním profilem lze odvodit [3]

$$g^1(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0}. \quad (21)$$

kde  $\tau_0$  je střední doba mezi srážkami. Reálný stupeň časové koherence a viditelnost je pak

$$\gamma_t = |g^1(\tau)| = e^{-|\tau|/\tau_0}. \quad (22)$$

Koherenční doba je podle (20)

$$\tau_c = \tau_0.$$

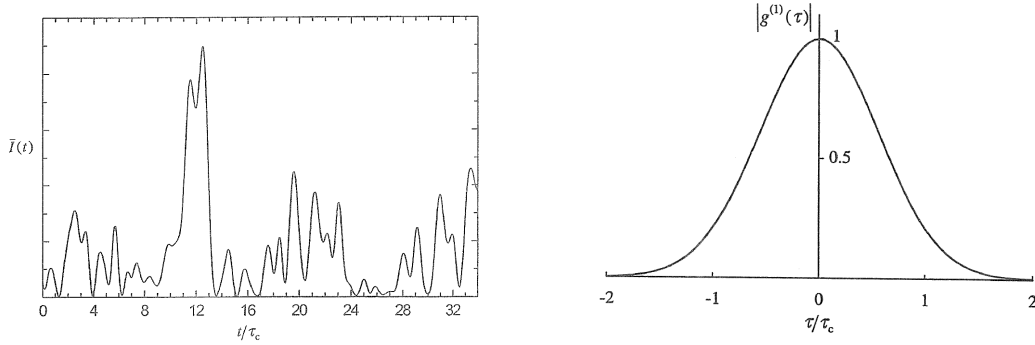
### Převládá Dopplerův jev

Nízkotlaké výbojky produkující atomární čáry mají spektrální profil obvykle určen Dopplerovým jevem. Vlivem Maxwellova rozdělení rychlostí atomů v plynu je potom i spektrální profil popsán Gaussovou funkcí. Časový vývoj (viz obr. 5) je na rozdíl od Lorentzova rozdělení pomalejší. Pro stupeň koherence lze odvodit [3]

$$g^1(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - \sigma^2\tau^2/2} \quad (23)$$

Reálný stupeň časové koherence a viditelnost je pak ve shodě s výpočtem (13)

$$\gamma_t = |g^1(\tau)| = e^{-\sigma^2\tau^2/2}. \quad (24)$$



Obrázek 5: Vliv Dopplerova jevu. Převzato z [3].

Protože koherenční doba je podle (20)

$$\tau_c = \frac{\pi^{1/2}}{\sigma}, \quad (25)$$

kde  $\sigma$  je směrodatná odchylka Gaussova spektrálního profilu v proměnné  $\omega$ , je reálný stupeň časové koherence roven

$$\gamma_t = e^{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2}. \quad (26)$$

## 6 Spektroskopie s Fourierovou transformací\*

Jak již bylo uvedeno dříve, v případě komplikovaného spektra je Michelsonův postup, zavedený v části 2 a aplikovaný v části 3, nepoužitelný. Pro úplnost se nyní podíváme na elegantnější řešení, využívající numerické Fourierovy transformace.

Vraťme se zpátky k rovnici (5). Protože jsme při jejím napsání nepotřebovali podmínku kvazimonochromaticnosti světla, rovnice platí i pro bílé světlo, pouze spektrální hustota intenzity záření

$$\mathcal{I}(\omega) = I_0 f(\omega)$$

není úzká funkce. Přejdeme-li k běžně používanému vyjádření spektra pomocí vakuového vlnčtu  $\tilde{\nu} = 1/\lambda = \nu/c$  (wavenumber), bude

$$\omega\tau = 2\pi\tilde{\nu}\mathcal{S},$$

$$f(\omega)d\omega = f(\tilde{\nu})d\tilde{\nu},$$

kde  $\mathcal{S}$  je optický dráhový rozdíl. Definujeme interferogram jako průběh intenzity v závislosti na dráhovém rozdílů očistěný o stejnosměrnou složku. To můžeme provést např. odečtením poloviny hodnoty intenzity pro nulový dráhový rozdíl

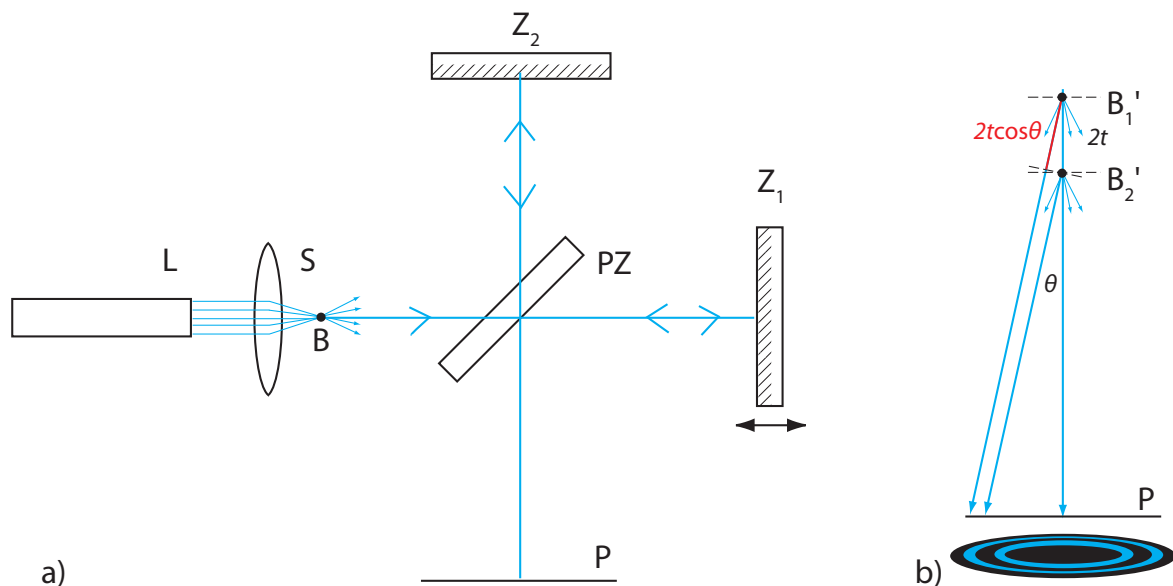
$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = I(\mathcal{S}) - I(0)/2 = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{I}(\tilde{\nu}) \cos(2\pi\tilde{\nu}\mathcal{S}) d\tilde{\nu}.$$

Rozšíříme-li spektrum i do záporných hodnot vlnčtů tak, že výsledná funkce je sudá

$$\mathcal{I}(-\tilde{\nu}) = \mathcal{I}(\tilde{\nu}),$$

lze integrál přepsat

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(\tilde{\nu}) \cos(2\pi\tilde{\nu}\mathcal{S}) d\tilde{\nu}.$$



Obrázek 6: Schéma Michelsonova interferometru (a) a náhradní schéma (b).

Protože integrál přes celý obor liché funkce je vždy roven nule, obdržíme pro výsledný tvar interferogramu

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(\tilde{\nu}) e^{i2\pi\tilde{\nu}\mathcal{S}} d\tilde{\nu}. \quad (27)$$

Proměnné  $\mathcal{S}$  a  $\tilde{\nu}$  tvoří takzvaný FT pár. Protože  $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}[\mathcal{I}(\tilde{\nu})]$  je  $\mathcal{I}(\tilde{\nu}) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{I}(\mathcal{S})]$ . Tedy

$$\mathcal{I}(\tilde{\nu}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(\mathcal{S}) e^{-i2\pi\tilde{\nu}\mathcal{S}} d\mathcal{S}. \quad (28)$$

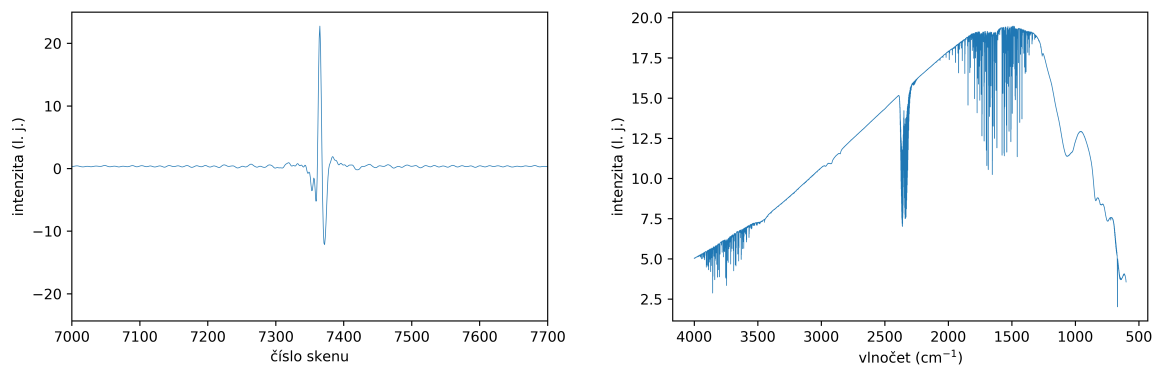
Spektrum tedy obdržíme inverzní Fourierovou transformací interferogramu.

## 7 Michelsonův interferometr

Michelsonův interferometr je optické zařízení, které je v nejjednodušší variantě složené z polopropustného zrcadla PZ a dvou zrcadel  $Z_1$ ,  $Z_2$  umístěných na konci dvou vzájemně kolmých ramen (viz obrázek 6a). V našem experimentu ho budeme osvětlovat svazkem ze zdroje L (laser, LED dioda, výbojka), fokusovaným do bodu B pomocí spojné čočky S. Světlo vystupující z interferometru pozorujeme na stínítku P. Namísto stínítka P lze použít např. CCD kameru.

Z bodu B vychází světlo v podobě rozbíhavých vlnoploch. Dopadá na polopropustné zrcadlo PZ, kde část světla prochází až na zrcadlo  $Z_1$ , část se odráží na zrcadlo  $Z_2$ . Po odrazu na obou zrcadlech jsou oba svazky opět složeny na polopropustném zrcadle PZ a dopadají na stínítko P. Protože na rovinných zrcadlech nedochází ani k fokusaci ani k rozptýlení svazku, hlavním efektem všech tří zrcadel je vytvoření dvou zdánlivých bodových zdrojů  $B'_1$  a  $B'_2$ , z nichž se šíří světelné vlnoplochy směrem ke stínítku (viz obrázek 6 b). V případě kvalitního vyrovnání zrcadel lze dosáhnout situace, kdy oba zdánlivé body  $B'_1$  a  $B'_2$  jsou přesně za sebou. Označíme-li rozdíl vzdáleností zrcadel  $Z_1$  a  $Z_2$  vůči PZ jako  $t$ , je dráhový rozdíl, který musí světlo šířící se z bodu  $B'_1$  urazit navíc, roven

$$\mathcal{S} = 2t \cos \theta,$$



Obrázek 7: Část interferogramu bílého světla (a) a z něj vypočteného spektra (b).

kde  $\theta$  je úhel, popisující sklon paprsků vůči ose. Protože tento výraz je konstantní pro určitý úhel  $\theta$ , bude výsledek stejný pro všechny body kružnice opsané na stínítku kolem průsečíku s osou. Na stínítku se proto objeví interferenční kroužky. Pokud by se body podařilo naopak srovnat do jedné vzdálenosti od stínítka, jen s malým stranovým posunem, pozorovali bychom na stínítku umístěném ve větší vzdálenosti naopak proužky.

Byl to právě tento typ interferometru, který použil A. A. Michelson ke studiu spektrálního složení světla analýzou interferenčních obrazců. Také ho použil (1892) k přesnému změření vlnové délky spektrální čáry kadmia Cd I 643,847 nm, resp. k opačné úloze – ke změření délky mezinárodního prototypu metru v jednotkách vlnové délky této čáry. Prototypu metru odpovídalo ve vzduchu při tlaku 760 mm a teplotě 15 °C 1553164,13 vlnových délek této čáry. Protože interferometrická měření se ukázala být přesnější než původní realizace metru, byl v roce 1960 metr redefinován jako 1 650 763,73 vakuových vlnových délek spektrální čáry  $^{86}\text{Kr}$  I 605,780210 nm. Interferometrická měření se stala základem přesného měření délky.

V současnosti se Michelsonův interferometr v kombinaci s Fourierovou transformací standardně používá k měření spekter v infračervené oblasti (FTIR). Místo mřížkového spektrometru vyžadujícího skenování přes rozsáhlou oblast vlnových délek se použije Michelsonův interferometr, který skenuje přes dráhový rozdíl změnou pozice jednoho zrcadla. Tím se naměří funkce  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  (viz rovnice 27), původní spektrum se zpětně získá numericky z rovnice (28). Metoda FTIR má oproti užití mřížkového spektrometru i další výhody. Příklad interferogramu a spektra, které z něj bylo vypočteno, udává obrázek 7.<sup>7</sup>

## 8 Vyhodnocení experimentu

Zatímco v teoretických výpočtech je výhodné používat časové zpoždění  $\tau$ , v experimentu obvykle měříme viditelnosti jako funkci optického dráhového rozdílu  $\mathcal{S}$ . Pro Gaussův profil z rovnice 26 dostaneme

$$\gamma_t = e^{-\frac{\pi}{2} \left( \frac{\mathcal{S}}{l_c} \right)^2}, \quad (29)$$

kde  $l_c$  je koherenční délka. Dráhový rozdíl i koherenční délku můžeme s výhodou měřit v jednotkách  $\lambda_0$  (počet proužků). Nafitujeme-li průběh  $\gamma_t(\mathcal{S})$  funkcí

$$Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{2w^2}}, \quad (30)$$

<sup>7</sup>Zajímavostí je, že Michelsonův interferometr je v FTIR spektrometru obvykle použit hned dvakrát. Jeden analyzuje přímo IR záření, druhý je osvětlený He-Ne laserem a počítáním proužků laserového světla ve viditelné oblasti určuje polohu posuvného zrcadla prvního interferometru. To dovoluje velmi přesné měření dráhového rozdílu.

bude koherenční délka

$$l_c = \sqrt{\pi w}. \quad (31)$$

Spektrální šířka Gaussova zdroje ve smyslu směrodatné odchylky v jednotkách úhlové frekvence bude podle (25)

$$\sigma_\omega \equiv \sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{l_c/c} = \frac{c}{w}. \quad (32)$$

Protože

$$\sigma_\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \sigma_\lambda, \quad (33)$$

bude spektrální šířka ve stejném smyslu ve vlnové délce

$$\sigma_\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi w}. \quad (34)$$

Plná šířka spektrálního profilu v polovině výšky bude podle (12)

$$\Delta\lambda_{1/2} = 2\sqrt{2 \ln 2} \frac{\lambda^2}{2\pi w} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi} \frac{\lambda^2}{w} \approx 0,37 \frac{\lambda^2}{w}. \quad (35)$$

Poznamenejme závěrem, že koherenční délka je v tomto případě rovna

$$l_c = 0,66 \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}}.$$

## 9 Vybavení

V praktiku je k dispozici Michelsonův interferometr k sestavení na optické desce. Pro záznam obrazců je připravena CCD kamera, která dokáže snímat záření v rozsahu 350 – 1100 nm. Vzdálenost pixelů v čipu kamery je 14  $\mu\text{m}$ . Tuto hodnotu lze případně využít při kalibraci dráhového rozdílu v interferenčním obrazci.

### Úkoly

1. Připravte optickou desku pro pozorování interference na Michelsonově interferometru. Vyzkoušejte různá uspořádání (proužky stejné tloušťky, stejného sklonu). Použijte laser. Při justaci můžete využít návod [4].
2. Zkontrolujte převod polohy mezi mikrometrickým šroubem a polohou zrcadla pomocí světelného zdroje se známou vlnovou délkou. Kalibraci otestujte na jiném známém zdroji.
3. Proměřte viditelnost interference s vysoce svítivou LED diodou. Pro záznam interferenčních obrazců a vyhodnocení viditelnosti použijte CCD kameru a dostupný software. Stanovte viditelnost jako funkci dráhového rozdílu, kterého dosáhnete změnou polohy zrcadla nebo úhlu v samotném interferenčním obrazci. Stanovte koherenční délku, odhadněte spektrální profil zdroje a jeho šířku.
4. Proměřte viditelnost interference s vysokotlakou sodíkovou výbojkou. Opět stanovte koherenční délku, spektrální profil zdroje a jeho šířku.
5. Pozorujte alternace ve viditelnosti interferenčního obrazce při použití laseru. Jak je vysvětlíme?
6. Své odhady spektrálních profilů porovnejte s výsledky měření spekter zdrojů mřížkovým spektrometrem.

**Reference**

- [1] Malý Petr 2008 Optika. Praha: Karolinum.
- [2] Born M and Wolf E 1970 Principles of Optics. Pergamon Press.
- [3] Loudon R 2000 The Quantum Theory of Light. Oxford University Press.
- [4] [https://www.thorlabs.com/\\_sd.cfm?fileName=MTN013132-D02.pdf&partNumber=EDU-MINT2](https://www.thorlabs.com/_sd.cfm?fileName=MTN013132-D02.pdf&partNumber=EDU-MINT2)
- [5] Kauppinen J and Partanen J 2001 Fourier Transforms in Spectroscopy. Wiley-VCH Verlag.