52. Gama funkce je definována integrálem
$$\Gamma(n) := \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t \, \exp(-t) t^{n-1}.$$
   (a) Dokažte vztah
   $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$
   (b) spočítejte $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}$,
   (c) spočítejte
   $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

53. S pomocí Gama funkce spočítejte přibližné vyjádření $\ln(n!)$ pro velké hodnoty n (Stirlingův vzorec).

54. Atom vodíku se nachází v hladině $n = 3$. Za předpokladu, že obsazení energiových hladin je dáno mikrokanonickým rozdělením, spočtěte pravděpodobnost toho, že se atom nachází ve stavech se stejným vedlejším kvantovým číslem l.

55. Entropie pro izolovanou soustavu je dána vztahem $S = k_\mathrm{B} \ln \Gamma$, kde Γ je počet mikrostavů. Pro uzavřenou soustavu $S = -k_\mathrm{B} \sum_n w_n \ln w_n$. Ukažte, že oba vztahy nejsou v rozporu.

56. Ukažte, že tepelná kapacita c_V je dána fluktuací energie, tj.
$$c_\mathrm{V} = \frac{1}{k_\mathrm{B} T^2} \left\langle \Delta E^2 \right\rangle.$$

57. Spočtěte termodynamické vlastnosti systému N rozlišitelných klasických harmonických oscilátorů s frekvencí ω.

58. Spočtěte rozložení hustoty ve sloupci plynu o základně A pod vlivem homogenního gravitačního pole (v atmosféře). Předpokládejte, že plyn je tvořen nerozlišitelnými částicemi, každá s hmotností m.

59. Uvažme plyn s dvouatomovými molekulami. Spočítejte molární tepelnou kapacitu daného plynu. Počítejte pouze s vibračním pohybem molekul, kdy je energie dána vztahem
$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$
Spočítejte nejprve statistickou sumu, ze které určíte volnou energii a z volné energie již lze určit hledanou tepelnou kapacitu. Výslednou tepelnou kapacitu můžete napsat v aproximaci nízkých a vysokých teplot.

60. Uvažme plyn s dvouatomovými molekulami. Spočítejte molární tepelnou kapacitu daného plynu. Počítejte pouze s rotačním pohybem molekul, kdy je energie dána vztahem
$$E_{j,m} = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}, \tag{2}$$
kde I je moment setrvačnosti molekuly. Jelikož nelze statistickou sumu spočítat analyticky, vyjádřete ji v aproximaci vysokých a nízkých teplot.

61. Ukažte, že tlak a hustota energie mají stejnou jednotku.

62. Spočtěte hustotu stavů pro relativistické částice a najděte limitní vztahy pro klasické a ultra relativistické částice.

63. Odvoďte stavovou rovnici ideálního plynu pomocí viriálového teorému.

64. Systém obsahuje N velmi slabě interagujících částic a jeho teplota je dostatečně velká nato, abychom mohli použít k popisu klasickou statistiku. Každá částice má hmotnost m a osciluje v daném směru kolem své rovnovážné polohy. Spočítejte tepelnou kapacitu systému za teploty T v následujících případech

(a) Vratná síla je přímo úměrná vychýlení x z rovnovážné polohy.

(b) Vratná síla je úměrná x^3.

Úlohy můžete počítat bez explicitního vyjádření příslušných integrálů. Určete pomocí viriálového teorému stavovou rovnici plynu.

65. Odhadněte, jak dlouho by musela základna Hvězdovrah čerpat energii hvězdy typu Slunce, aby zničila planetu typu Země.

66. Ukažte, že v klasickém případě je možné z grandkanonického rozdělení jedné částice odvodit Maxwellův-Boltzmanův zákon rozložení rychlostí.

67. Ukažte, že v klasickém případě je možné z grandkanonického rozdělení pro částice s $\mu = 0$ odvodit Planckův zákon.

Řešení: Pro počet bosonů v energiovém pásu platí vztah

$$\mathrm{d}N = \frac{\rho(E)\mathrm{d}E}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}.$$

Pro fotony platí $\mu = 0$, a energie je rovna $E = h\nu$. Přejdeme analogicky jako v předchozím příkladu k proměnným frekvence. Pro hustotu energie vyjde vztah

$$E\mathrm{d}N = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}. \tag{3}$$

68. Dokažte rovnost

$$I_\mathrm{f}(m) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \cdot \frac{x^{m-1}}{\exp(x)+1} = \left(1 - 2^{1-m}\right)\zeta(m)\cdot\Gamma(m), \tag{4}$$

a

$$I_\mathrm{b}(m) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \cdot \frac{x^{m-1}}{\exp(x)-1} = \zeta(m)\cdot\Gamma(m), \tag{5}$$

kde $\zeta(m)$ je Riemannova funkce

$$\zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}.$$

69. Definujme funkce

$$B_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^{n-1}}{\exp(x-y)-1}, \tag{6}$$

a

$$F_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^{n-1}}{\exp(x-y)+1}. \tag{7}$$

Pro tyto funkce dokažte

$$\frac{\mathrm{d}B_{n+1}(y)}{\mathrm{d}y} = B_n(y),$$

a

$$\frac{\mathrm{d}F_{n+1}(y)}{\mathrm{d}y} = F_n(y).$$

70. Ze vztahu

$$\Omega = -k_\mathrm{B}T\frac{gV}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi m k_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}B_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T}\right), \tag{8}$$

platného pro nerelativistický ideální bosonový plyn spočtěte počet částic N.

71. Nalezněte rovnici adiabaty pro ideální fotonový plyn v proměnných p a V.

72. Přepište podmínku degenerace fermionového plynu $k_B T \ll \varepsilon_F$ jako vztah mezi vlnovou délkou de Broglieho vlny tepelného pohybu a Fermiho vlnové délky.

73. Spočtěte c_V nerelativistického fermionového plynu a ověřte platnost klasické limity pro c_V/N.

74. Ověřte platnost klasické limity
$$E = \frac{3}{2} N k_B T,$$

75. Spočítejte:
   (a) hustotu stavů,
   (b) Fermiho energii, Fermiho hybnost,
   (c) počet částic,
   (d) vnitřní energii,
   (e) termodynamický potenciál,
   (f) stavovou rovnici

   pro relativistický (v případě 75f ultrarelativistický) plně degenerovaný fermionový plyn. Počet částic, vnitřní energii a termodynamický potenciál vyjádřete jako funkci Fermiho energie.

76. Spočítejte fluktuaci počtu částic pro případ grandkanonického rozdělení $\left(\Delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2\right)$. Aplikujte na případ nerelativistického fermionového a bosonového plynu.