

# 1 Označení rozdělovacích funkcí

Rozdělovací funkci rychlosti částic budu označovat  $g(\vec{v})$ , přičemž platí

$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} g(\vec{v}) dv_1 dv_2 dv_3,$$

kde  $n$  je koncentrace těchto částic. Pokud rozdělovací funkce není symetrická, tj. závisí na směru vektoru  $\vec{v}$ , je možné její tvar hledat ve tvaru nekonečné řady obsahující Legendrovy polynomy kosinu  $\theta$ , např.

$$g(\vec{v}) = g_0(v) + \cos(\theta)g_1(v) + \dots,$$

kde  $\theta$  je úhel mezi rychlostí částice a nějakým význačným směrem, nebo v obecnějším případě rozvojem do sférických funkcí. Pokud ale rozdělovací funkce symetrická je, pak lze lehce spočítat rozdělovací funkci velikosti rychlosti částic  $g_v(v)$  a rozdělovací funkci energie částic  $f(E)$  (v případě elektronů označovaná např. EEDF, tj. *electron energy distribution function*):

$$\begin{aligned} g_v(v) &= 4\pi v^2 g(v) \\ f(E)dE &= g_v(v)dv \\ f(E) &= \frac{g_v\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)}{\sqrt{2mE}} = \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2E}{m}} g\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \end{aligned}$$

Často se místo vlastní rozdělovací funkce uvádí funkce

$$f_P(E) = \frac{f(E)}{\sqrt{E}}$$

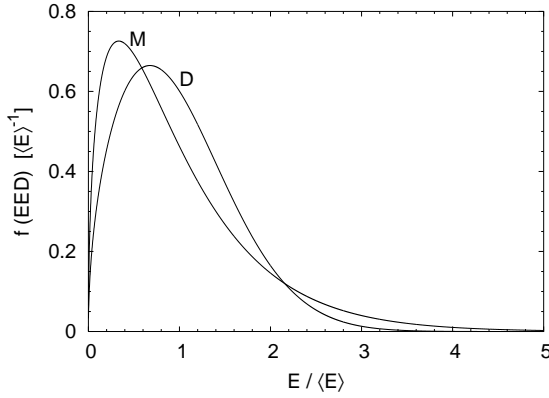
v případě elektronů označovaná EEPF (*electron energy probability function*).

Homogenní izotropní soubor částic, na které nepůsobí vnější síly a které se nesráží s jinými částicemi, by byl v rovnováze popsán Maxwellovou rozdělovací funkcí

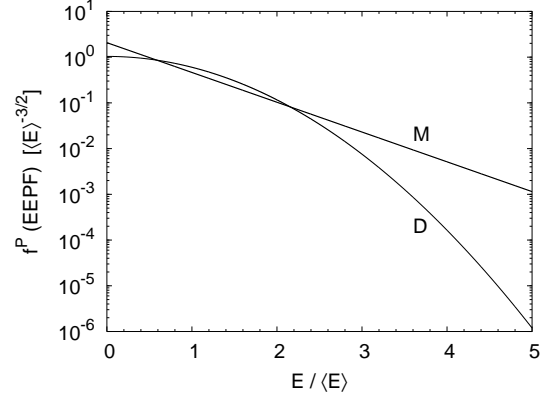
$$\begin{aligned} g(v) &= n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \\ f(E) &= n \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \end{aligned}$$

V plazmatu se nejčastěji zabýváme rozdělovací funkcí energie elektronů. Když je frekvence vzájemných srážek mezi elektrony vysoká, pak jejich rozdělovací funkce bývá blízka Maxwellově. Pružné srážky s neutrálními částicemi naopak způsobují odklon od Maxwellova rozdělení např. k Druyvesteynovu rozdělení

$$f(E) \propto n \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E^2}{K}\right),$$



Obrázek 1: Maxwelllovo (M) a Druyvesteynovo (D) rozdělení energií.



Obrázek 2: Maxwelllova (M) a Druyvesteynovo (D) EEPF.

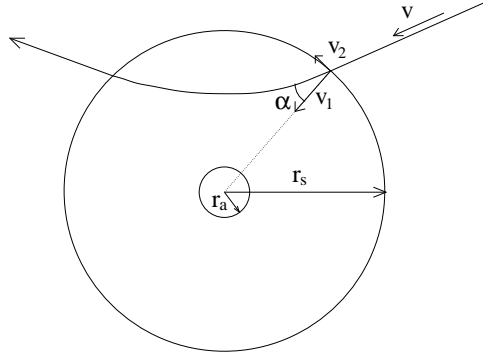
kde  $K$  je konstanta související se střední energií elektronů. Řadu rozdělovacích funkcí je možné psát ve tvaru nazývaném standardní rozdělovací funkce

$$\begin{aligned}
 f(E) &= C_{st} n \sqrt{E} \exp \left\{ -\frac{E^\kappa}{2\kappa E_p^\kappa} \right\} \\
 C_{st}^{-1} &= 2^{3/2\kappa} \kappa^{(3-2\kappa)/2\kappa} E_p^{3/2} \Gamma(3/(2\kappa)) \\
 \langle E \rangle &= E_p (2\kappa)^{1/\kappa} \frac{\Gamma(5/(2\kappa))}{\Gamma(3/(2\kappa))}
 \end{aligned}$$

( $E_p$  je nejpravděpodobnější a  $\langle E \rangle$  střední energie). Pro  $\kappa = 1$  přejde standardní rozdělení na Maxwelllovo, pro  $\kappa = 2$  na Druyvesteynovo. Ukázka Maxwelllova a Druyvesteynovo rozdělení energií je nakreslena na obr. 1, na obr. 2 jsou odpovídající  $f_P$  (EEPF). Mnohem výrazněji se ale neutrály projevují ve vysokoenergetické části rozdělovací funkce díky nepružným srážkám, které snižují koncentraci rychlých elektronů. Naopak vyražení elektronů z elektrod s následující ionizací ve stěnové vrstvě (*sheath*) nebo stochastický ohřev v silném elektrickém poli na okrajích plazmatu mohou vést ke vzniku skupiny extrémně rychlých elektronů. Skutečný tvar rozdělovací funkce tak může být komplikovaný a může nést mnoho informací o plazmatu.

## 2 Langmuirova sonda

Langmuirovou sondou se nazývá vodič vložený do plazmatu, z jehož V-A charakteristiky je možné určit některé parametry plazmatu, zejména koncentraci a střední energii elektronů, elektrický potenciál plazmatu a rozdělovací funkci energie elektronů. Když sonda není na potenciálu plazmatu, vznikne v jejím okolí vrstva prostorového náboje ovlivňující dráhy nabitých částic. Nedochozí-li v této vrstvě ke srážkám a předpokládáme-li, že za hranicí stěnové vrstvy není plazma sondou ovlivněno, lze relativně jednoduše spočítat, které částice na sondu dopadnou, a zjistit tak proud tekoucí na sondu. V této kapitole zatím uvedu jen základní vzorce pro výpočet elek-



Obrázek 3: Schéma dráhy částice ve stěnové vrstvě okolo sondy.

trického proudu tekoucího na Langmuirovu sondu. Sondy mívají různé tvary, nejčastější bývá sonda válcová. Zde budou uvedeny vztahy pro rovinnou, válcovou a kulovou sondu.

## 2.1 Tok částic odpuzovaných od sondy

Částice s nenulovou kinetickou energií mohou pronikat i na sondu, která je elektrostaticky odpuzuje, tj.  $q(\phi_a - \phi_{pl}) > 0$ , pokud mají rychlost větší než mezní hodnota

$$v^2 \geq \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{m},$$

kde  $q$  je náboj částice,  $\phi_a$  potenciál sondy a  $\phi_{pl}$  potenciál plazmatu. Dalším omezením je maximální rychlost  $v_2$  (viz obr. 3), při které částice nemine sondu. Ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti vyplývá podmínka pro dopad částice na sondu

$$v_2^2 \left( \frac{r_s^2}{r_a^2} - 1 \right) \leq v_1^2 - \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{m},$$

kde  $r_a$  je poloměr sondy a  $r_s$  poloměr stěnové vrstvy (sheathu) okolo sondy, takže ani úhel  $\alpha$  mezi počáteční rychlostí částice a její radiální složkou  $v_1$  nesmí překročit mezní hodnotu  $\alpha_m$  popsanou vztahem

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{r_a^2}{r_s^2} \left[ 1 - \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{mv^2} \right].$$

Podívejme se na příklad kulové sondy. Celkový proud částic na sondu pro bezsrážkovou stěnovou vrstvu lze počítat integrálem

$$I = qS_s \int_{v_{min}}^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha_m} d\alpha v^2 \sin \alpha g(v) v \cos \alpha,$$

kde  $S_s$  označuje plochu vnějšího povrchu stěnové vrstvy,  $v_{min} = \sqrt{2q(\phi_a - \phi_{pl})/m}$  a  $\alpha_m$  je maximální úhel  $\alpha$ , pod kterým může částice dopadnout na okraj stěnové vrstvy aby ještě dopadla na sondu.  $v^2 \sin \alpha$  je Jacobián transformace do sférických souřadnic a  $qg(v)v \cos \alpha$  vyjadřuje hustotu elektrického proudu částic ve směru složky rychlosti  $v_1$ .

Uvedený postup vede k výsledku

$$I = Sq\pi \int_{\sqrt{\frac{2qU}{m}}}^{\infty} v^3 g(v) \left[ 1 - \frac{2qU}{mv^2} \right] dv = \quad (1)$$

$$= qS \frac{1}{2\sqrt{2m}} \int_{qU}^{\infty} \frac{E - qU}{\sqrt{E}} f(E) dE, \quad (2)$$

kde napětí mezi plazmatem a sondou  $\phi_a - \phi_{pl}$  bylo označeno  $U$  a  $S$  je plocha povrchu sondy. Tento výsledek platí pro rovinnou, válcovou i kulovou sondu. Pokud mají částice Maxwellovu rozdělovací funkci odpovídající teplotě  $T$ , vychází pro proud

$$I = qS \frac{1}{4} n \bar{v} \exp\left(-\frac{qU}{kT}\right) \quad (3)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

( $\bar{v}$  je střední velikost rychlosti částic).

Výhodou je, že libovolné rozdělení energií elektronů můžeme zjistit z druhé derivace elektronového proudu pomocí Druyvesteynovy formule

$$f(qU) = \frac{2\sqrt{2m|U|}}{q^{5/2}S} \frac{d^2I}{d|U|^2} \quad (4)$$

## 2.2 Tok částic přitahovaných k sondě

V případě částic sondou přitahovaných ( $qU < 0$ ) se už vztahy pro proud tekoucí na rovinnou, kulovou a válcovou sondu liší. Oproti předchozímu výpočtu odpadá potřeba vybírat jen částice, které mají dostatečnou energii, protože tentokrát se na sondu může dostat částice s jakoukoli počáteční energií. Na druhé straně ale musíme vzít v úvahu, že pro nízké vstupní rychlosti částic si sonda dokáže částici přitáhnout, i kdyby do stěnové vrstvy vstoupila s úhlem  $\alpha = 90^\circ$ . To platí pro rychlosti menší než  $v_c$  odvozené z podmínky  $\sin \alpha_m = 1$

$$v_c^2 = -\frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{m \left( \frac{r_s^2}{r_a^2} - 1 \right)}.$$

Pro kulovou sondu pak dostáváme

$$I = qS_s \int_0^{v_c} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\alpha v^2 \sin \alpha g(v) v \cos \alpha + qS_s \int_{v_c}^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha_m} d\alpha v^2 \sin \alpha g(v) v \cos \alpha =$$

$$= q4\pi r_s^2 \pi \left\{ \int_0^{v_c} v^3 g(v) dv + \int_{v_c}^{\infty} v^3 g(v) \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{mv^2} \right] dv \right\}. \quad (5)$$

Komplikací získaného vztahu je, že závisí nejen na poloměru sondy, ale také na poloměru stěnové vrstvy okolo sondy, což je veličina, kterou bez simulace stěnové vrstvy neznáme.

Pro případ Maxwellova rozdělení rychlostí vychází pro rovinnou, kulovou a válcovou sondu vztahy:

$$I_r = \frac{1}{4} S q n \bar{v} \quad (6)$$

$$I_k = \frac{1}{4} S q n \bar{v} \left\{ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^2 - \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left( \frac{r_a^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{qU}{kT} \right) \right\} \quad (7)$$

$$I_v = \frac{1}{4} S q n \bar{v} \left\{ \frac{r_s}{r_a} \sqrt{\operatorname{erf} \left( \frac{r_a^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{-qU}{kT} \right)} + \left[ 1 - \sqrt{\operatorname{erf} \left( \frac{r_s^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{-qU}{kT} \right)} \right] \exp \left( -\frac{qU}{kT} \right) \right\}, \quad (8)$$

kde

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Nevýhodou je stále ještě skutečnost, že vztahy závisí na poloměru  $r_s$ , který při měření není známý. Užitečná je limita pro  $r_s \gg r_a$ , tzv. OML (*orbital motion limited*) teorie, ve které vychází pro kulovou sondu

$$I_k \approx \frac{1}{4} S q n \bar{v} \left( 1 - \frac{qU}{kT} \right)$$

a pro válcovou

$$I_v \approx \frac{1}{4} S q n \bar{v} \sqrt{1 - \frac{qU}{kT}}.$$