

Kombinatorika

M1030 Matematika pro biology

14. a 21. 9. 2020

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Výběry bez opakování (vracení)

Výběry s opakováním (s vracením)

Příklady

Princip inkluze a exkluze

Příhradkový princip

Aplikace

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Výběry bez opakování (vracení)

Základní soubor – n různých rozlišitelných prvků

1. Variace k -té třídy z n prvků

Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

$$v(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Permutace n prvků

Vybíráme všechny prvky, přihlížíme k pořadí, tj. prvky uspořádáme

$$p(n) = v(n, n) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! \text{ (faktoriál)}$$

3. Kombinace k -té třídy z n prvků

Vybíráme k prvků, k pořadí nepřihlížíme

$$c(n, k) = \frac{v(n, k)}{p(k)} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k} \text{ (kombinační číslo)}$$

Výběry s opakováním (s vracením)

Základní soubor – prvky rozděleny do n druhů, v rámci druhu jsou nerozlišitelné

1. Variace k -té třídy z n prvků s opakováním

Prvků každého druhu je alespoň k . Vybíráme k prvků, přihlížíme k pořadí

$$V(n, k) = n \cdot n \cdots n = n^k$$

2. Permutace s opakováním v situaci (k_1, k_2, \dots, k_n)

Počet prvků prvního druhu je k_1 , druhého druhu k_2 , atd. až n -tého druhu je k_n

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{p(k_1 + k_2 + \dots + k_n)}{p(k_1)p(k_2) \cdots p(k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

3. Kombinace k -té třídy z n prvků s opakováním

Prvků každého druhu je alespoň k . Vybíráme k prvků a k pořadí nepřihlížíme

$$C(n, k) = P(k, n - 1) = \frac{(k + n - 1)!}{k! (n - 1)!} = \binom{k + n - 1}{k} = \binom{k + n - 1}{n - 1}$$

Příklady

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat
a) tříčlenné vedení?

$$c(58, 3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

$$c(58, 3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

Příklady

Spolek má 58 členů. Kolika způsoby si může vybrat

a) tříčlenné vedení?

$$c(58, 3) = \binom{58}{3} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 29 \cdot 19 \cdot 56 = 30\,856$$

b) předsedu, místopředsedu a tajemníka?

$$v(58, 3) = 58 \cdot 57 \cdot 56 = 185\,136$$

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$\begin{aligned}c(50, 35) &= \binom{50}{35} = \binom{50}{15} = \\ &= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 2,250\,829\,575 \cdot 10^{12}\end{aligned}$$

Příklady

V noclehárně je 50 lůžek. Kolika způsoby je možné na ně umístit 35 nocležníků?

- Z pohledu provozovatele ubytovny:

$$\begin{aligned}c(50, 35) &= \binom{50}{35} = \binom{50}{15} = \\ &= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 2,250\,829\,575 \cdot 10^{12}\end{aligned}$$

- Z hlediska ubytovaných:

$$v(50, 35) = \frac{50!}{15!} = 2,325\,815\,505 \cdot 10^{52}$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 604\,800$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$

Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8, 3)$

$$\text{Celkem: } p(7)c(8, 3) = 7! \binom{8}{3} = 7! \frac{8!}{5! 3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 282\,240$$

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$

Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8, 3)$

$$\text{Celkem: } p(7)c(8, 3) = 7! \binom{8}{3} = 7! \frac{8!}{5! 3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 282\,240$$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Příklady

Kolik různých slov je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově LOKOMOTIVA?

$$P(1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! 3! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 604\,800$$

- Tak, aby nebyla žádná dvě stejná písmena vedle sebe?

Počet seřazení písmen A, I, K, L, M, T, V: $p(7)$

Tři písmena O lze umístit na 8 pozic, tj. vybíráme 3 pozice z 8: $c(8, 3)$

$$\text{Celkem: } p(7)c(8, 3) = 7! \binom{8}{3} = 7! \frac{8!}{5! 3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 282\,240$$

- Tak, aby se pravidelně střídaly souhlásky a samohlásky?

Souhlásky: K, L, M, T, V, samohlásky: A, I, O, O, O

$$2 \cdot p(5) \cdot P(1, 1, 3) = 2 \cdot 5! \cdot \frac{5!}{3!} = \frac{(5!)^2}{3} = 4\,800$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3, 50) = \frac{53!}{3! 50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4, 50)$$

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3, 50) = \frac{53!}{3! 50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4, 50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Příklady

Kolika způsoby lze mezi čtyři děti rozdělit 50 kuliček?

$$P(3, 50) = \frac{53!}{3!50!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426 = C(4, 50)$$

- Tak, aby každé dostalo aspoň 5 kuliček?

Každém dítěti přidělíme 5 kuliček a rozdělujeme pouze zbývající:

$$P(50 - 4 \cdot 5, 3) = P(30, 3) = \frac{33!}{30!3!} = \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2} = 11 \cdot 16 \cdot 31 = 5\,456$$

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25, 2)$$

způsoby.

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25, 2)$$

způsoby.

Libovolnou dvojici pohlednic lze poslat libovolné osobě, tj.

$$V(c(25, 2), 3)$$

způsoby.

Příklady

V trafice je 25 druhů pohlednic, všechny v dostatečném množství. Třem přátelům pošleme po dvou různých pohlednicích. Kolika způsoby to lze udělat?

Dvojici různých pohlednic lze vybrat

$$c(25, 2) = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

způsoby.

Libovolnou dvojici pohlednic lze poslat libovolné osobě, tj.

$$V(c(25, 2), 3) = c(25, 2)^3 = 300^3 = 27\,000\,000$$

způsoby.

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5^5 = 4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5^5 = 4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 5^6 = 5^6 \frac{5!}{2! 3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5^5 = 4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 5^6 = 5^6 \frac{5!}{2! 3!}$$

Celkem:

$$4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!} + 5^6 \frac{5!}{2! 3!}$$

Příklady

Kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytnou tři liché a tři sudé cifry?

sudé cifry: 0, 2, 4, 6, 8 liché cifry: 1, 3, 5, 7, 9

Číslo začínající sudou cifrou nemůže mít na prvním místě 0.

Počet čísel, začínajících sudou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 4 \cdot 5^5 = 4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!}$$

Počet čísel, začínajících lichou cifrou:

$$P(2, 3) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = P(2, 3) \cdot 5^6 = 5^6 \frac{5!}{2! 3!}$$

Celkem:

$$4 \cdot 5^5 \frac{5!}{2! 3!} + 5^6 \frac{5!}{2! 3!} = (4 + 5) 5^5 \frac{5!}{2! 3!} = 9 \cdot 5^5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^6 = 281\,250$$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10, i) = \binom{10}{i}$

Příklady

V pytlíku je 10 různých kuliček, dítěti se do hrsti vejde nejvýše 5 kuliček. Kolik existuje takových hrstí?

Počet hrstí, obsahujících i kuliček: $c(10, i) = \binom{10}{i}$

Celkem:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 = 638$$

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1024$$

Jiná úvaha:

| | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Konkrétní hrst | ○ | ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ● | ○ |
| zakódujeme | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

| | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Konkrétní hrst | ○ | ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ● | ○ |
| zakódujeme | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Příklady

Modifikace: V pytlíku je 10 různých kuliček, staršímu dítěti se do hrsti vejde všech 10 kuliček. Kolik existuje možných hrstí?

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 1\,024$$

Jiná úvaha:

| | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Konkrétní hrst | ○ | ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ● | ○ |
| zakódujeme | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Počet hrstí: $V(2, 10) = 2^{10} = 1\,024$

Závěr:

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10}$$

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Příklady

Zobecnění: Kolik existuje podmnožin n prvkové množiny?

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n = (1 + 1)^n$$

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Princip inkluze a exkluze

Dvě vlastnosti

Tři vlastnosti

Příhrádkový princip

Aplikace

Princip inkluze a exkluze

Dvě vlastnosti

Množina – souhrn nějakých prvků, značení A, B, \dots

Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení A, B, \dots

Dvě vlastnosti

Množina – souhrn nějakých prvků, značení A, B, \dots

Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení A, B, \dots

$|A|$ – počet prvků množiny A , počet objektů s vlastností A

$A \cup B$ – sjednocení množin A a B , objekty mající vlastnost A nebo B

$A \cap B$ – průnik množin A a B , objekty mající obě vlastnosti A a B

Dvě vlastnosti

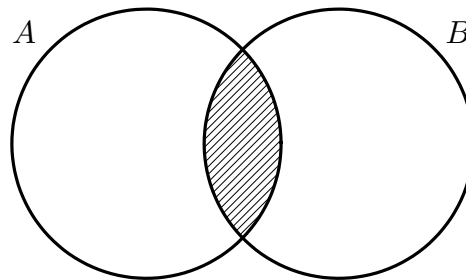
Množina – souhrn nějakých prvků, značení A, B, \dots

Vlastnost – to, co mají všechny prvky společné, značení A, B, \dots

$|A|$ – počet prvků množiny A , počet objektů s vlastností A

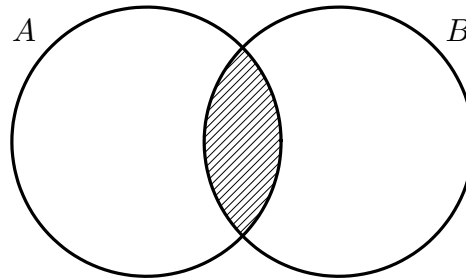
$A \cup B$ – sjednocení množin A a B , objekty mající vlastnost A nebo B

$A \cap B$ – průnik množin A a B , objekty mající obě vlastnosti A a B



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

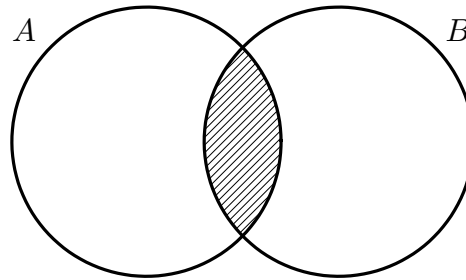
Dvě vlastnosti



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři loví v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

Dvě vlastnosti

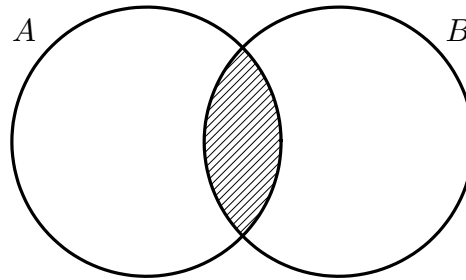


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři loví v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

$$|K| = 8, \quad |C| = 5, \quad |K \cap C| = 3$$

Dvě vlastnosti



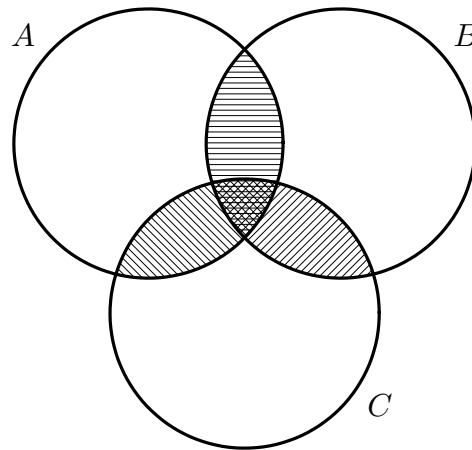
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad: Rybáři loví v rybníku, v němž žijí kapři a cejni. Každý z nich něco ulovil. Kapra si odnášelo 8 rybářů, cejna 5 rybářů a oba druhy měli 3 rybáři. Kolik je rybářů?

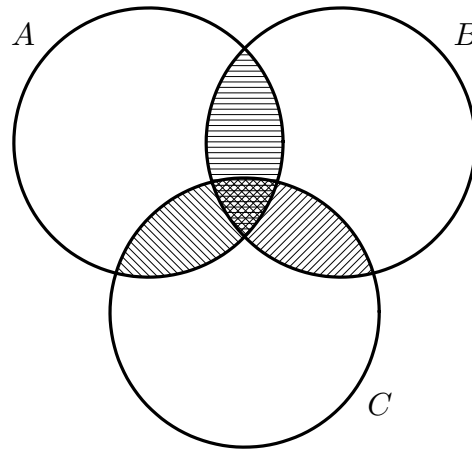
$$|K| = 8, \quad |C| = 5, \quad |K \cap C| = 3$$

$$|K \cup C| = |K| + |C| - |K \cap C| = 8 + 5 - 3 = 10$$

Tři vlastnosti



Tři vlastnosti



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8, 2) = 8 \binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32, 2) = 2 \binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8, 2) = 8 \binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32, 2) = 2 \binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

$$|R \cap S| = 0, \quad |R \cap B| = 8 \cdot 2 \cdot c(4, 2) = 8 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 96, \quad |S \cap B| = 96, \quad |R \cap S \cap B| = 0$$

Tři vlastnosti

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Příklad: Kolika způsoby je možno na šachovnici umístit dvě figury, nikoliv na jedno pole, tak, aby byly současně v jedné řadě, nebo v jednom sloupci, nebo na poli stejné barvy?

$$|R| = 8 \cdot c(8, 2) = 8 \binom{8}{2} = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 224, \quad |S| = 224$$

$$|B| = 2 \cdot c(32, 2) = 2 \binom{32}{2} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 992$$

$$|R \cap S| = 0, \quad |R \cap B| = 8 \cdot 2 \cdot c(4, 2) = 8 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 96, \quad |S \cap B| = 96, \quad |R \cap S \cap B| = 0$$

$$|R \cup S \cup B| = 224 + 224 + 992 - 0 - 96 - 96 + 0 = 1\,248$$

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Princip inkluze a exkluze

Příhradkový princip

Aplikace

Příhradkový princip

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299

Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299

Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000

Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299

Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000

Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Matematika zaručuje existenci nějakého objektu, přitom neexistuje efektivní postup, jak ho najít.

Příklad: Existují mezi obyvateli Brna dvě osoby, které mají přesně stejný počet vlasů?

Počet obyvatel Brna: 369 299

Maximální možný počet vlasů na jedné hlavě: 150 000

Nejvýše existuje 150 001 hlav s různým počtem vlasů

Matematika zaručuje existenci nějakého objektu, přitom neexistuje efektivní postup, jak ho najít.

Princip: Necht' k, n jsou přirozená čísla, $k > n$. Při jakémkoliv rozdělení k předmětů do n přihrádek existuje přihrádka, v níž jsou alespoň dva předměty.

Počet možných výběrů z předem daného souboru

Princip inkluze a exkluze

Příhradkový princip

Aplikace

Počet prokaryotických chromozomů

Počet fylogenetických stromů

Aplikace

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$n!$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$n!$

Počet možností „nasměrování“ genu:

2^n

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$$n!$$

Počet možností „nasměrování“ genu:

$$2^n$$

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“):

$$\frac{1}{n}$$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$$n!$$

Počet možností „nasměrování“ genu:

$$2^n$$

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“):

$$\frac{1}{n}$$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky:

$$\frac{1}{2}$$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$n!$

Počet možností „nasměrování“ genu:

2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“):

$\frac{1}{n}$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky:

$\frac{1}{2}$

Celkem

$$\frac{2^n n!}{2n} = 2^{n-1} (n-1)!$$

Počet prokaryotických chromozomů

Počet genů: n

Gen má směr

Prokaryotický chromozom tvoří uzavřenou křivku

Počet možných uspořádání n genů:

$n!$

Počet možností „nasměrování“ genu:

2^n

Spojení řetězce genů do uzavřené křivky (nepoznáme, který gen je „první“):

$\frac{1}{n}$

Nezáleží na orientaci celé uzavřené křivky:

$\frac{1}{2}$

Celkem

$$\frac{2^n n!}{2n} = 2^{n-1} (n-1)!$$

Pro $n = 4000$ je výsledný počet $3,013\,417\,773 \cdot 10^{13\,873}$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Počet fylogenetických stromů



n taxonů

Stromy s kořenem

Počet fylogenetických stromů

n taxonů



Stromy s kořenem

| n | |
|-----|--|
| 2 |  |
| 3 |  |

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

| n | |
|-----|--|
| 2 |  |
| 3 |  |

x_n – počet stromů,

v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \quad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \quad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

x_n – počet stromů, v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \quad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \quad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

$$v_n = 2 + (n - 2) \cdot 2 = 2n - 2, \quad x_n = x_{n-1}(2n - 3)$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy s kořenem

x_n – počet stromů, v_n – počet větví

$$v_n = v_{n-1} + 2, \quad x_n = x_{n-1}(v_{n-1} + 1), \quad x_2 = 1, \quad v_2 = 2$$

$$v_n = 2 + (n - 2) \cdot 2 = 2n - 2, \quad x_n = x_{n-1}(2n - 3)$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3 \cdot 1$$

$$x_4 = 5 \cdot 3 \cdot 1$$

⋮

$$x_n = (2n - 3)(2n - 5) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n - 3)!}{(2n - 4)(2n - 6) \cdots 2} = \frac{(2n - 3)!}{2^{n-1}(n - 2)!}$$

Počet fylogenetických stromů

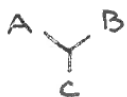

n taxonů

Stromy bez kořene

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

| n | |
|-----|--|
| 2 | A - B |
| 3 |  |
| 4 |  |

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

| n | |
|-----|-------|
| 2 | A - B |
| 3 | |
| 4 | |

y_n – počet stromů, w_n – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \quad y_n = y_{n-1}w_{n-1}, \quad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

y_n – počet stromů, w_n – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \quad y_n = y_{n-1}w_{n-1}, \quad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

$$w_n = 1 + (n - 2) \cdot 2 = 2n - 3, \quad y_n = y_{n-1}(2n - 5)$$

Počet fylogenetických stromů

n taxonů

Stromy bez kořene

y_n – počet stromů, w_n – počet větví

$$w_n = w_{n-1} + 2, \quad y_n = y_{n-1}w_{n-1}, \quad y_2 = 1, \quad w_2 = 1$$

$$w_n = 1 + (n - 2) \cdot 2 = 2n - 3, \quad y_n = y_{n-1}(2n - 5)$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = 1$$

$$y_4 = 3 \cdot 1$$

$$y_5 = 5 \cdot 3 \cdot 1$$

⋮

$$y_n = (2n - 5)(2n - 7) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n - 5)!}{(2n - 6)(2n - 8) \cdots 2} = \frac{(2n - 5)!}{2^{n-3}(n - 3)!}$$