Lineární algebra

M1030 Matematika pro biology

19. a 26. 10. 2021

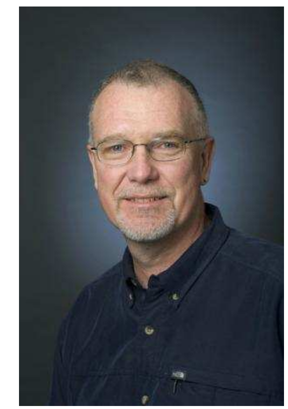
Základní pojmy

Motivace

- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

  $x(t)$ ... velikost populace v čase t

  r ... růstový koeficient ($r = 1 + b - d$, b porodnost, d úmrtnost)



- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t)\\
y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t)
\end{aligned}
$$

$x(t)$ ... množství juvenilních jedinců

$y(t)$ ... množství plodných jedinců

f ... očekávané (průměrné) množství potomků plodného jedince za jednotku času

γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje)

σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije časovou jednotku)

σ_1 ... P(plodný jedinec přežije časovou jednotku)

Motivace

- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

Motivace

- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti: $\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t)$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matice a vektory

Matice typu (m, n) . . . tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = (7)$$

A je matice typu $(2, 3)$, B a R jsou matice typu $(2, 2)$, C je matice typu $(1, 1)$.

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad C = (7)$$

A je matice typu $(2, 3)$, B a R jsou matice typu $(2, 2)$, C je matice typu $(1, 1)$.

Číslo lze považovat za speciální případ matice, matice jsou zobecněním čísel.

Matice a vektory

Matice typu (m,n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

m-*rozměrný sloupcový vektor* je matice typu $(m,1)$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

m-*rozměrný sloupcový vektor* je matice typu $(m, 1)$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

n-*rozměrný řádkový věktor* je matice typu $(1, n)$,

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3{,}1415927 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}1415927 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3{,}1415927 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$
- *nulová*, pokud $(\forall i, j) a_{ij} = 0$, $\quad \mathsf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$
- *nulová*, pokud $(\forall i, j) a_{ij} = 0$, $\quad \mathsf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- *jednotková*, pokud $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A . . . matice typu (m, n)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3{,}14 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

Příklad:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$

Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; $c, \mathsf{A} \mapsto \mathsf{B}$)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

- *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA = B

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

• *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA $=$ B

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Příklad:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1{,}57 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

- *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA = B

Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Platí

$$-\mathsf{A} = (-1)\mathsf{A}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0{,}86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0{,}86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A . . . matice typu (m,n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A},\mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součet matic*: $\mathsf{A}+\mathsf{B}=\mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m,n), $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0{,}86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0{,}86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) \quad \textit{asociativita}$$

Operace s maticemi

A ... matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) \quad \textit{asociativita}$$
$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} \quad \textit{komutativita}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$
\begin{array}{cl}
(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) & \textit{asociativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} & \textit{komutativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{O} = \mathsf{O} + \mathsf{A} = \mathsf{A} & \textit{existuje neutrální prvek}
\end{array}
$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$\begin{array}{cl}
(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) & \textit{asociativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} & \textit{komutativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{O} = \mathsf{O} + \mathsf{A} = \mathsf{A} & \textit{existuje neutrální prvek} \\
\mathsf{A} + (-\mathsf{A}) = \mathsf{O} & \textit{ke každé matici existuje opačný prvek}
\end{array}$$

Operace s maticemi

A ... matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$)

- *Součet matic*: $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $A + A^T$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$(A + B) + C = A + (B + C)$	*asociativita*
$A + B = B + A$	*komutativita*
$A + O = O + A = A$	*existuje neutrální prvek*
$A + (-A) = O$	*ke každé matici existuje opačný prvek*

Matice spolu s operací sčítání tvoří Abelovskou grupu.

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$

Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto$ C)

- *Součin matic*: AB $=$ C

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součin matic*: AB = C

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -1 \\ 0 & 22 \end{pmatrix},$$

BA . . . nelze vynásobit

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}^2 = \mathsf{AA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto$ C)

• *Součin matic*: AB = C

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

(AB)C = A(BC) *asociativita*

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

• *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$

Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$	*asociativita*
$m = n \Rightarrow \mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$	k čtvercové matici existuje neutrální prvek

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \quad + \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}\right. \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad y = 1,\; x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \bigg| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Ještě stručnější zápis: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad + \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Ještě stručnější zápis: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Maticový zápis: A$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ... *matice soustavy*

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ ... *vektor pravých stran*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ ... *vektor neznámých*

Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

Maticový zápis: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Všechny informace o systému jsou obsaženy v *rozšířené matici soustavy*

$$(\mathsf{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému

Označení: $A \sim B$ … „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému

Označení: A $\sim$ B ... „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

Algoritmus metody:

1. Užitím elementárních řádkových transformací převedeme rozšířenou matici soustavy na vhodnou horní trojúhelníkovou.
2. Výslednou matici přepíšeme do tvaru soustavy rovnic a vypočítáme jednotlivé složky řešení.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

přehození 1. a 2. řádku

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

vynásobení 1. řádku číslem -3

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

přičtení 1. řádku ke 2.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

vynásobení 1. řádku číslem $\frac{2}{3}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

přičtení 1. řádku k 3.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

vynásobení 1. řádku číslem $-\frac{1}{2}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

vynásobení 2. řádku číslem 5

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

vynásobení 3. řádku číslem -7

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

přičtení 2. řádku k 3.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad\ \ &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

vynásobení 2. řádku číslem $\frac{1}{5}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

vynásobení 3. řádku číslem $\frac{1}{3}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + \ \ 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + \ \ 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$, $y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$, $y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3$, $x = 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -1$

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$z = 10,\ y = 0,\ x = -1$

Příklady:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5\\
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1\\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5
\end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+3y&=7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y&=4\\ y&=1 \end{aligned} \qquad y=1,\ x=2$$

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+4y&=7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y&=4\\ 0&=1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 2x+3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y=1,\ x=2$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 2x+4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 2x+4y &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+3y&=7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y&=4\\ y&=1 \end{aligned} \qquad y=1,\ x=2$$

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+4y&=7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y&=4\\ 0&=1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+4y&=8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y&=4\\ 0&=0 \end{aligned}$$

úloha je řešitelná, řešení není jednoznačné;
druhou neznámou volíme jako parametr: $x=4-2y$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:
počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

$h(\mathsf{A}) < h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b})$	$\Rightarrow$	úloha nemá řešení
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b}) < n$	$\Rightarrow$	úloha má řešení, řešení není jednoznačné
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b}) = n$	$\Rightarrow$	úloha má jednoznačné řešení

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:
počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

$h(\mathsf{A}) < h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b})$	$\Rightarrow$	úloha nemá řešení
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b}) < n$	$\Rightarrow$	úloha má řešení, řešení není jednoznačné
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\vert\boldsymbol{b}) = n$	$\Rightarrow$	úloha má jednoznačné řešení

Ve druhém případě lze řešení vyjádřit pomocí $n - h(\mathsf{A})$ parametrů.

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení není jednoznačné, $y = 1 + z$, $x = 1 - 2y = 1 - 2(1 + z) = -1 - 2z$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Předpokládáme, že matice soustavy je typu m, n, tj. jedná se o soustavu m rovnic o n neznámých.

Pro zjednodušení zápisu budeme v rozšířené matici soustavy prvky v posledním sloupci značit symboly $a_{i,j+1}$.

Algoritmus úpravy rozšířené matice soustavy:

1. $j := 1$ (indexu j přiřaď hodnotu 1)
2. mezi prvky $a_{j,j}, a_{j+1,j}, a_{j+2,j}, \ldots, a_{m,j}$ najdi $a_{k,j}$ takový, že $(\forall i = j, j+1, j+2, \ldots, m) |a_{k,j}| \geq |a_{i,j}|$ (v j-tém sloupci najdi prvek s největší absolutní hodnotou, příslušný řádek považuj za k-tý)
3. pokud $|a_{k,j}| = 0$, jdi na krok 7.
4. přehoď j-tý a k-tý řádek
5. j-tý řádek vynásob číslem $\dfrac{1}{a_{j,j}}$
6. dělej pro každé $i \neq j$: k i-tému řádku přičti j-tý řádek násobený číslem $-a_{i,j}$
7. $j := j + 1$ (index j zvětši o 1)
8. pokud $j \leq m$, jdi zpět na krok 2., jinak konec

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x-2y+4z&=5\\ -5x+7y-8z&=2\\ 5x-6y+7z&=-3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5\\ -5 & 7 & -8 & 2\\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2\\ 3 & -2 & 4 & 5\\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5}\\ 3 & -2 & 4 & 5\\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5}\\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11}\\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11}\\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11}\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$x = -3,\ y = 5,\ z = 6$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\text{vynásobení 2. řádku číslem } -2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\text{přičtení 2. řádku ke 3.:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

přehození 2. a 3. řádku: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Determinanty

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \\ x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \\ y &= \frac{1}{d}\left(f - \frac{c(ed - bf)}{ad - bc}\right) = \frac{1}{d}\frac{adf - ced}{ad - bc} = \frac{af - ce}{ad - bc} \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \; y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc},\ y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \; y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant matice A:

$$\det \mathsf{A} = |\mathsf{A}| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc},\ y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant matice A:

$$\det \mathsf{A} = |\mathsf{A}| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pokud $\det \mathsf{A} \neq 0$, pak jediné řešení dané soustavy rovnic je:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1.$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) &= k \\ dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) &= l \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) &= k \\ dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) &= l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\ (dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} (aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\ (dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} (aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\ (dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm \end{aligned}$$

O jednoznačné řešitelnosti dané soustavy rovnic tedy rozhoduje

$$\det \begin{pmatrix} aj - cg & bj - ch \\ dj - fg & ej - fh \end{pmatrix} =$$

$$= aej^2 - ajfh - cgej + cgfh - (bj^2d - bjfg - chdj + chfg) =$$

$$= j(aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ d & \color{red}{e} & f \\ g & h & \color{red}{j} \end{vmatrix} = \color{red}{aej} + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & \color{red}{b} & c \\ d & e & \color{red}{f} \\ \color{red}{g} & h & j \end{vmatrix} = aej + \color{red}{bfg} + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \color{red}{c} \\ \color{red}{d} & e & f \\ g & \color{red}{h} & j \end{vmatrix} = aej + bfg + \color{red}{cdh} - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \color{red}{c} \\ d & \color{red}{e} & f \\ \color{red}{g} & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - \color{red}{ceg} - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ d & e & \color{red}{f} \\ g & \color{red}{h} & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - \color{red}{afh} - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus \\ \searrow & \searrow & \searrow \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array}\right| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array} \qquad = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \ominus & \ominus & \ominus \end{array}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc|cc} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & j & g & h \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{array} \qquad = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj =$$

$$= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc|cc} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ \hline a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & j & g & h \\ \hline \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{array} \qquad = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj =$$

$$= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

Pokud $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} \neq 0$ pak má daná soustava rovnic jednoznačné řešení;

složky řešení jsou dány výrazy

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & j \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & j \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{vmatrix}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+12-1-(8+1+3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+1+4-(-1+8-1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 1 - (2 - 2 + 12) = 2.$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+12-1-(8+1+3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+1+4-(-1+8-1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 1 - (2 - 2 + 12) = 2.$$

$x = 3,\ y = -1,\ z = -2$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Determinant čtvercové matice A řádu 1 je číslo $|\mathsf{A}| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = a_{11}|\mathsf{A}_{11}| - a_{12}|\mathsf{A}_{12}| + a_{13}|\mathsf{A}_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathsf{A}_{1n}|$$

kde A_{1j} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j tého sloupce.

Determinant čtvercové matice řádu n

Determinant čtvercové matice A řádu 1 je číslo $|\mathsf{A}| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = a_{11}|\mathsf{A}_{11}| - a_{12}|\mathsf{A}_{12}| + a_{13}|\mathsf{A}_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathsf{A}_{1n}|$$

kde A_{1j} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j tého sloupce.

Obecněji: Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathsf{A}_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathsf{A}_{ij}|$$

kde A_{ij} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j tého sloupce.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 6 + 6 - (3 - 6 - 2) - 2[-2 + 2 + 3 - (1 + 12 - 1)] + 3[-4 - 2 + 3 - (2 + 12 + 1)] = -18$$

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

Soustava n rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$, pak soustava rovnic má jediné řešení, jehož složky jsou dány rovnostmi

$$x_i = \frac{1}{|\mathsf{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 5\\
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1\\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5
\end{aligned}$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Soustava n rovnic o n neznámých

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2\big(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)\big) + 3\big(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)\big) -$$
$$-5\big(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)\big) = 18$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2\big(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)\big) + 3\big(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)\big) - \\ -5\big(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)\big) = 18$$

$$x_4 = \frac{18}{-18} = -1$$

Regulární matice

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{b}$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{b}$ | násobení maticí A^{-1} zleva

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \mid \text{násobení maticí } \mathsf{A}^{-1} \text{ zleva} \\ \boldsymbol{x} &= \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet: $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet: $\mathsf{X} \quad = \quad \mathsf{A}^{-1}$ | násobení maticí A zleva

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \mid \text{násobení maticí A zleva} \\ \mathsf{A}\mathsf{X} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{AX} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:
$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{AX} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:
$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava n rovnic o n neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{A}\mathsf{X} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava n rovnic o n neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Inverzní matici najdeme řešením n soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

Příklady:

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -33 & 0 & -9 & -6 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -21 & -47 & 22 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -21 & -47 & 22 \\ 0 & -3 & 2 \\ -14 & -33 & 15 \end{pmatrix}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}) \quad \textit{asociativita}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}) \quad \textit{asociativita}$$
$$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A} \quad \textit{existuje neutrální prvek}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$	*asociativita*
$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$	*existuje neutrální prvek*
$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{E}$	*ke každé regulární matici existuje inverzní prvek*

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

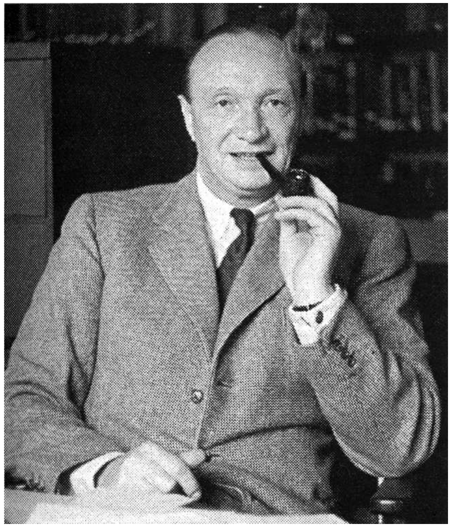
Vlastnosti násobení regulárních matic:

$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$	*asociativita*
$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$	*existuje neutrální prvek*
$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{E}$	*ke každé regulární matici existuje inverzní prvek*

Regulární matice spolu s operací násobení tvoří grupu.

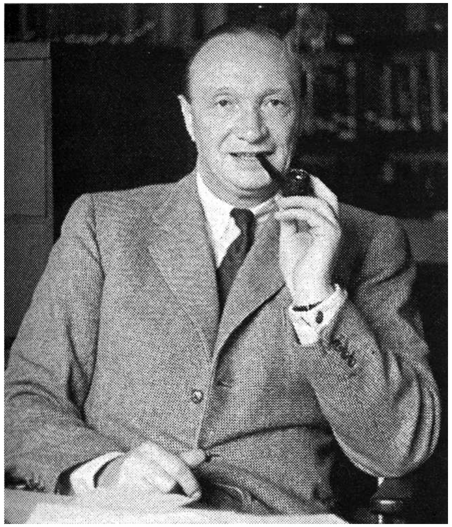
Aplikace – maticové populační modely

Patrick Holt Leslie (1900–1972)



Leslieho populace

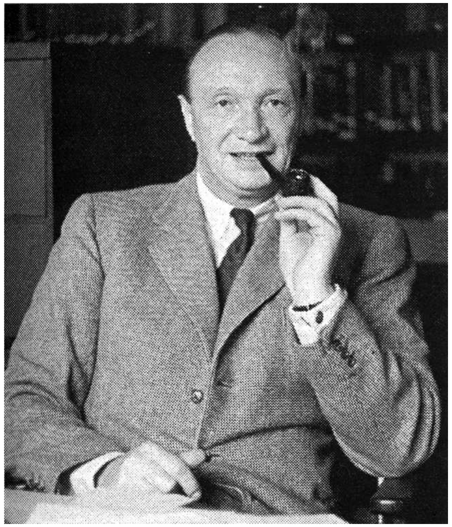
$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce

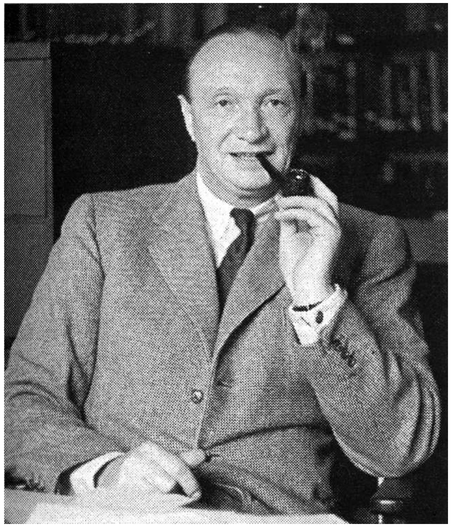
$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

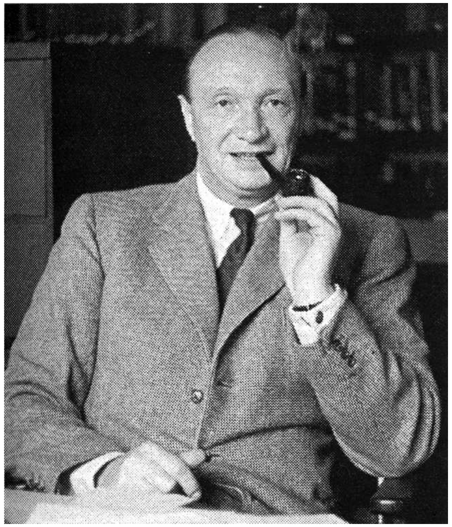
$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

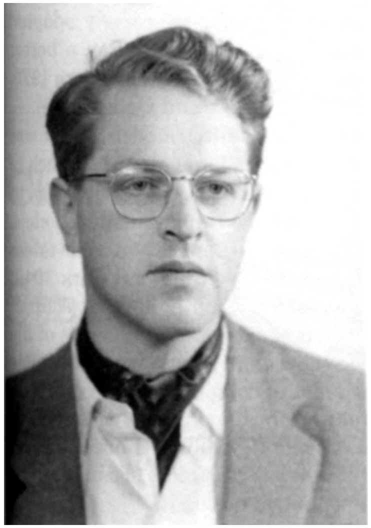
$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Populace strukturovaná podle stádií

Leonard Lefkowitch (1929–2010)



Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec

Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec

Hmyz: vajíčko – larva – kukla – imago




Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i+1$;

$$0 < p_i \leq 1,$$
$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i + 1$;

$0 < p_i \leq 1$,

$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \ldots, k$$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i + 1$;
$0 < p_i \leq 1$,
$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$
f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \ldots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i+1$;

$0 < p_i \leq 1,$

$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \dots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:

třída	popis	
1,2	semena	dormantní 1.rok, dormantní 2. rok
3,4,5	růžice	malá, střední, velká
6	kvetoucí rostlina	





Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:

třída	popis	
1,2	semena	dormantní 1.rok, dormantní 2. rok
3,4,5	růžice	malá, střední, velká
6	kvetoucí rostlina	

$$
\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 322{,}38 \\
0{,}966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}013 & 0{,}010 & 0{,}125 & 0 & 0 & 3{,}448 \\
0{,}007 & 0 & 0{,}125 & 0{,}238 & 0 & 30{,}170 \\
0{,}001 & 0 & 0{,}036 & 0{,}245 & 0{,}167 & 0{,}863 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}023 & 0{,}750 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}
$$