

# Reálné funkce

M1030 Matematika pro biology  
2. a 9. 11. 2021

## Definice a základní vlastnosti

Reálná čísla

Pojem funkce

Jednoduché vlastnosti funkcí

Operace s funkcemi

Elementární funkce

---

Další funkce

---

# Definice a základní vlastnosti

# Reálná čísla

Množina  $\mathbb{R}$ , aritmetické operace  $+$ ,  $\cdot$ , relace  $<$

# Reálná čísla

Množina  $\mathbb{R}$ , aritmetické operace  $+$ ,  $\cdot$ , relace  $<$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

$$(\exists 0)(\forall x) x + 0 = x$$

$$(\forall x)(\exists -x) x + (-x) = 0$$

$\mathbb{R}$  s operací  $+$  je abelovská grupa

---

$$(xy)z = x(yz)$$

$$xy = yx$$

$$(\exists 1 \neq 0)(\forall x) 1x = x$$

$$(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1}) x^{-1}x = 1$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  s operací  $\cdot$  je abelovská grupa

---

$$x(y + z) = xy + xz$$

distributivita

---

$$x < y \text{ a } y < z \Rightarrow x < z$$

$$x < y \text{ nebo } y < x \text{ nebo } x = y$$

lineární uspořádání

---

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$x < y \text{ a } 0 < z \Rightarrow xz < yz$$

operace  $+$  a  $\cdot$  jsou slučitelné s uspořádáním

---

množina  $\mathbb{R}$  tvoří kontinuum, „nejsou v ní díry“, jedno-jednoznačným obrazem  $\mathbb{R}$  je přímka

Podmnožiny  $\mathbb{R}$ :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

přirozená čísla

- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

celá čísla

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

racionální čísla

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

iracionální čísla

# Reálná čísla

Množina  $\mathbb{R}$ , aritmetické operace  $+$ ,  $\cdot$ , relace  $<$

Rozšířená množina reálných čísel:  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ;  $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$

# Reálná čísla

Množina  $\mathbb{R}$ , aritmetické operace  $+$ ,  $\cdot$ , relace  $<$

Rozšířená množina reálných čísel:  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ;  $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$

*Intervaly* v  $\mathbb{R}^*$ :

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$

# Reálná čísla

Množina  $\mathbb{R}$ , aritmetické operace  $+$ ,  $\cdot$ , relace  $<$

Rozšířená množina reálných čísel:  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ;  $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$

*Intervaly* v  $\mathbb{R}^*$ :

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$

*Okolí bodů* z  $\mathbb{R}^*$ :

- Symetrické  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$
- Ryzí symetrické  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, x \neq a\}$
- Levé  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon \leq x\}$
- Pravé  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a + \varepsilon\}$
- Ryzí levé  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x\}$
- Ryzí pravé  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ :  $\{x \in \mathbb{R} : x < a + \varepsilon\}$
- $h$ -okolí bodu  $\infty$ :  $\{x \in \mathbb{R} : h < x\}$
- $h$ -okolí bodu  $-\infty$ :  $\{x \in \mathbb{R} : x < h\}$

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:



# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

*definiční obor funkce  $f$*  – množina  $D(f)$ , z níž lze vybrat hodnoty argumentu

*obor hodnot funkce  $f$*  – množina  $H(f)$  funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

*definiční obor funkce  $f$*  – množina  $D(f)$ , z níž lze vybrat hodnoty argumentu

*obor hodnot funkce  $f$*  – množina  $H(f)$  funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

$$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$$

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

*definiční obor funkce  $f$*  – množina  $D(f)$ , z níž lze vybrat hodnoty argumentu

*obor hodnot funkce  $f$*  – množina  $H(f)$  funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

$$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$$

# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

*definiční obor funkce  $f$*  – množina  $D(f)$ , z níž lze vybrat hodnoty argumentu

*obor hodnot funkce  $f$*  – množina  $H(f)$  funkčních hodnot,

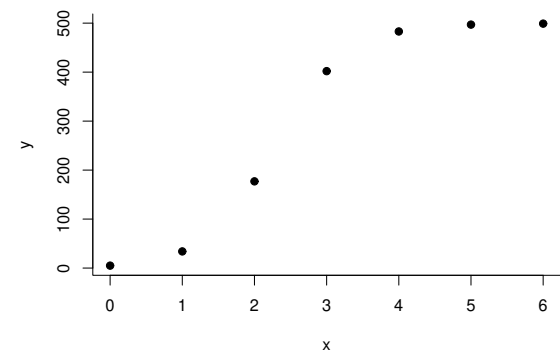
$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou, grafem

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

$$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$$



# Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla  $y$  nějakému reálnému číslu  $x$

$$x \mapsto y, \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x)$$

$x$  – nezávisle proměnná, argument funkce

$y$  – závisle proměnná, funkční hodnota

*definiční obor funkce  $f$*  – množina  $D(f)$ , z níž lze vybrat hodnoty argumentu

*obor hodnot funkce  $f$*  – množina  $H(f)$  funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

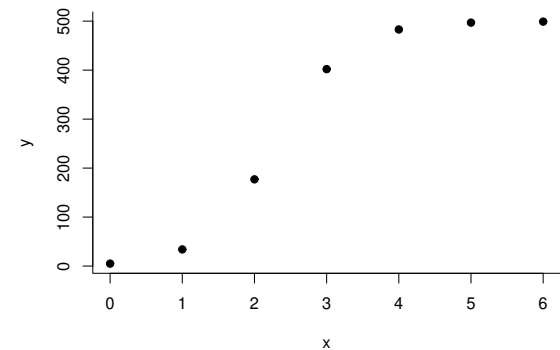
Zadávání funkce: tabulkou, grafem, obecným předpisem

**Motivace:** Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	5	34	177	402	483	497	499

$$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$$

$$y = f(x) = \frac{500}{1 + 99 \cdot 0,1353^x}$$





# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

## Periodičnost:

$f$  je periodická s periodou  $p > 0$  (je  $p$ -periodická, má periodu  $p$ ), pokud

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \text{ a } f(x + p) = f(x)$$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

## Periodičnost:

$f$  je periodická s periodou  $p > 0$  (je  $p$ -periodická, má periodu  $p$ ), pokud

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \text{ a } f(x + p) = f(x)$$

Platí: Je-li  $f$   $p$ -periodická a  $k \in \mathbb{N}$ , pak je  $f$  také  $kp$ -periodická

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

## Periodičnost:

$f$  je periodická s periodou  $p > 0$  (je  $p$ -periodická, má periodu  $p$ ), pokud

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \text{ a } f(x + p) = f(x)$$

Platí: Je-li  $f$   $p$ -periodická a  $k \in \mathbb{N}$ , pak je  $f$  také  $kp$ -periodická

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \Rightarrow x + 2p = (x + p) + p \in D(f) \Rightarrow \dots$$

$$f(x + 2p) = f((x + p) + p) = f(x + p) = f(x), \dots$$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

## Periodičnost:

$f$  je periodická s periodou  $p > 0$  (je  $p$ -periodická, má periodu  $p$ ), pokud

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \text{ a } f(x + p) = f(x)$$

## Parita:

$f$  je lichá, pokud  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  a  $f(-x) = -f(x)$

$f$  je sudá, pokud  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  a  $f(-x) = f(x)$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Ohraničenost:

$f$  je ohraničená shora, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) f(x) \leq h$

$f$  je ohraničená zdola, pokud  $(\exists h)(\forall x \in D(f)) h \leq f(x)$

$f$  je ohraničená, pokud  $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f)) h_1 \leq f(x) \leq h_2$

## Periodičnost:

$f$  je periodická s periodou  $p > 0$  (je  $p$ -periodická, má periodu  $p$ ), pokud

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \text{ a } f(x + p) = f(x)$$

## Parita:

$f$  je lichá, pokud  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  a  $f(-x) = -f(x)$

$f$  je sudá, pokud  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  a  $f(-x) = f(x)$

## Monotonnost:

$f$  je rostoucí, pokud  $(\forall x_1, x_2 \in D(f)) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f$  je klesající, pokud  $(\forall x_1, x_2 \in D(f)) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f$  je nerostoucí, pokud  $(\forall x_1, x_2 \in D(f)) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f$  je neklesající, pokud  $(\forall x_1, x_2 \in D(f)) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Monotonnost:

$f$  je rostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f$  je klesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f$  je nerostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f$  je neklesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Monotonnost:

$f$  je rostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f$  je klesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f$  je nerostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f$  je neklesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f$  je rostoucí v bodě  $x_0 \in D(f)$ , pokud

$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$  pro  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  a  $f(x_0) < f(x)$  pro  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

$f$  je klesající v bodě  $x_0 \in D(f)$ , pokud

$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$  pro  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  a  $f(x_0) < f(x)$  pro  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$



# Jednoduché vlastnosti funkcí

## Monotonnost:

$f$  je rostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f$  je klesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f$  je nerostoucí na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f$  je neklesající na intervalu  $J$ , pokud  $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f$  je rostoucí v bodě  $x_0 \in D(f)$ , pokud

$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$  pro  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  a  $f(x_0) < f(x)$  pro  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

$f$  je klesající v bodě  $x_0 \in D(f)$ , pokud

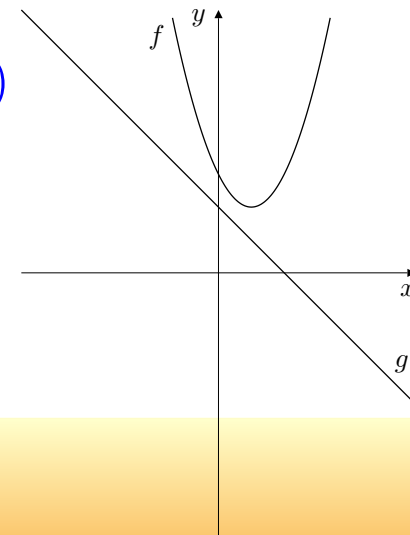
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$  pro  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  a  $f(x_0) < f(x)$  pro  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Platí: Funkce  $f$  je rostoucí (klesající) v každém bodě intervalu  $J$  právě tehdy, když je rostoucí (klesající) na intervalu  $J$ .

# Operace s funkcemi

**Aritmetické operace:**  $f, g$  funkce takové, že  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$



# Operace s funkcemi

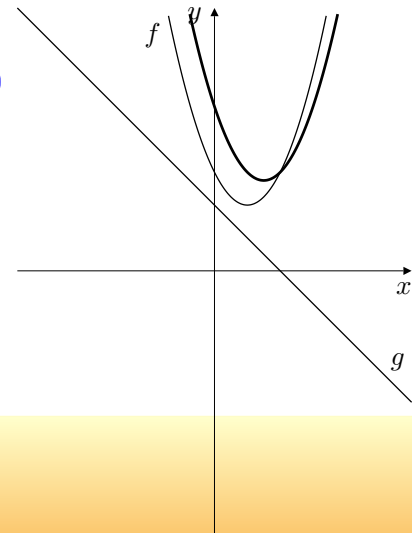
**Aritmetické operace:**  $f, g$  funkce takové, že  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f + g)(x) = x^2 - 3x + 5$$



# Operace s funkcemi

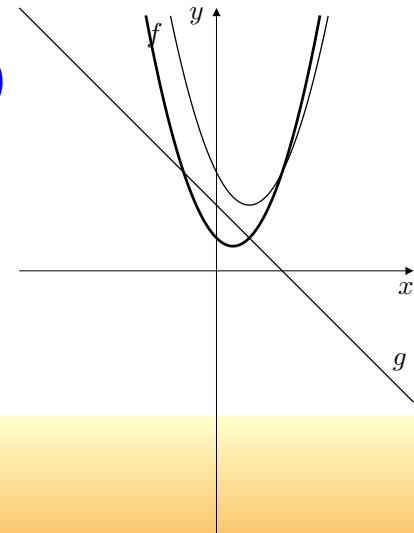
**Aritmetické operace:**  $f, g$  funkce takové, že  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D(f - g) = D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f - g)(x) = x^2 - x + 1$$



# Operace s funkcemi

**Aritmetické operace:**  $f, g$  funkce takové, že  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

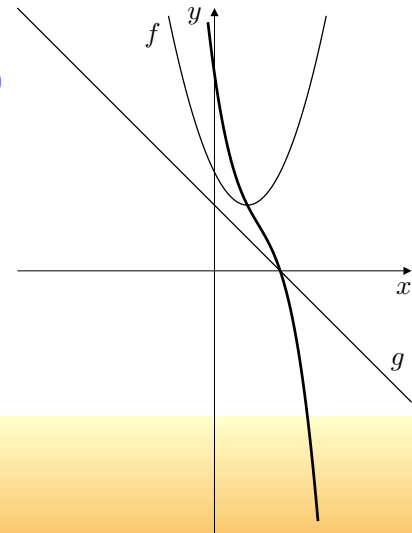
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$D(f \cdot g) = D(f - g) = D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f \cdot g)(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 6$$



# Operace s funkcemi

**Aritmetické operace:**  $f, g$  funkce takové, že  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

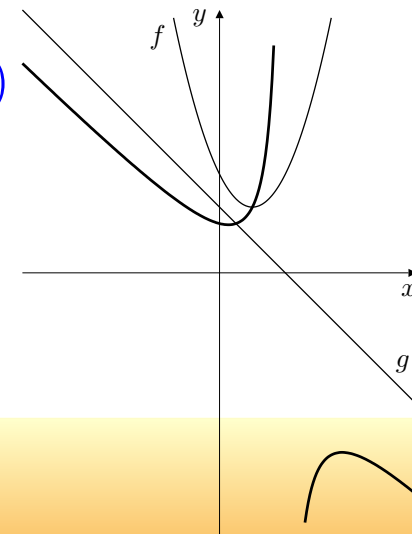
$$D(f \cdot g) = D(f - g) = D(f + g) = D(f) \cap D(g),$$

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f/g)(x) = \frac{3}{2-x} - x,$$

$$D(f/g) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$



# Operace s funkcemi

**Skládání funkcí:**  $f, g$  funkce takové, že  $H(g) \subseteq D(f)$

# Operace s funkcemi

**Skládání funkcí:**  $f, g$  funkce takové, že  $H(g) \subseteq D(f)$

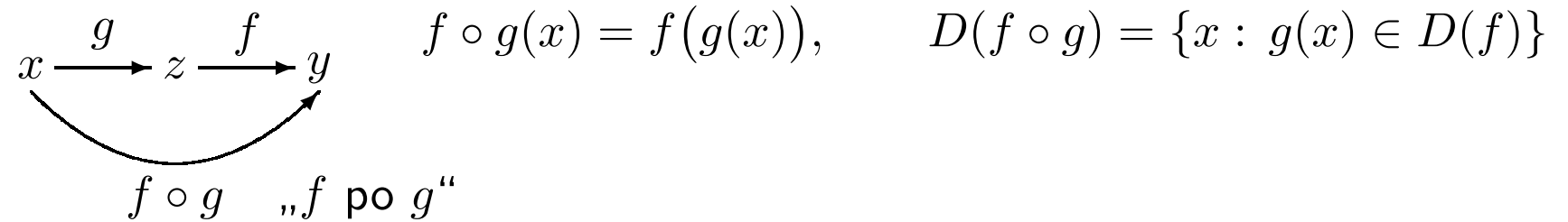
$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & z & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & & \end{array} \quad f \circ g(x) = f(g(x)), \quad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

$f \circ g$  „ $f$  po  $g$ “



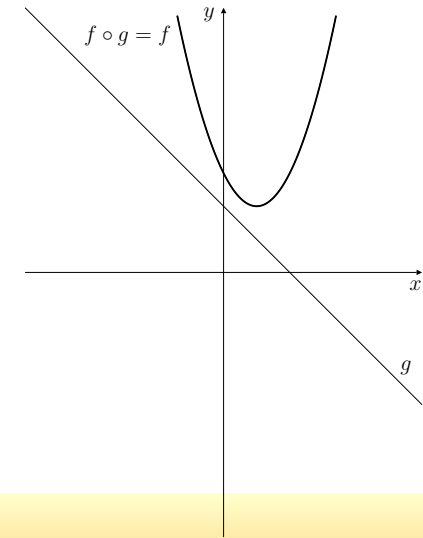
# Operace s funkcemi

**Skládání funkcí:**  $f, g$  funkce takové, že  $H(g) \subseteq D(f)$



Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $H(g) = (-\infty, \infty) = D(f)$

$$(f \circ g)(x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 = x^2 - 2x + 3$$



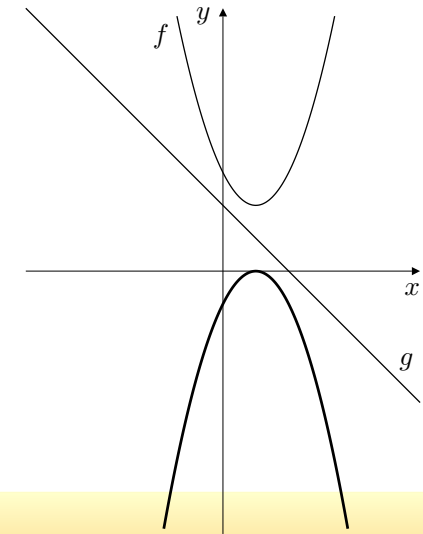
# Operace s funkcemi

**Skládání funkcí:**  $f, g$  funkce takové, že  $H(g) \subseteq D(f)$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & z & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & \text{„}f \text{ po } g\text{“} & \end{array} \quad f \circ g(x) = f(g(x)), \quad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

Příklad:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 2 - x$ ,  $H(f) = (2, \infty) \subseteq (-\infty, \infty) = D(g)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= 2 - (x^2 - 2x + 3) = \\ &= -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \end{aligned}$$



# Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce  $f$  je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f)) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

# Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce  $f$  je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f)) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce  $f$  je *prostá na intervalu  $J$* , pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

# Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce  $f$  je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f)) \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce  $f$  je *prostá na intervalu  $J$* , pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J) \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Platí: Je-li funkce  $f$  rostocí (resp. klesající) na intervalu  $J$ , pak je na tomto intervalu *prostá*.

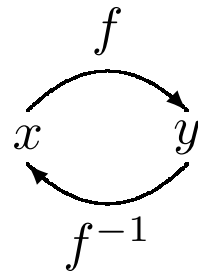
Obrácené tvrzení neplatí.

# Operace s funkcemi

**Inverzní funkce:**  $f$  prostá funkce

# Operace s funkcemi

**Inverzní funkce:**  $f$  prostá funkce

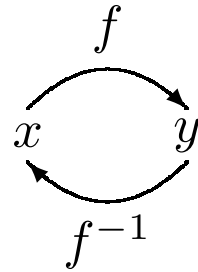


$$y = f(x) \rightarrow \text{„vyřešení rovnice“} \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

# Operace s funkcemi

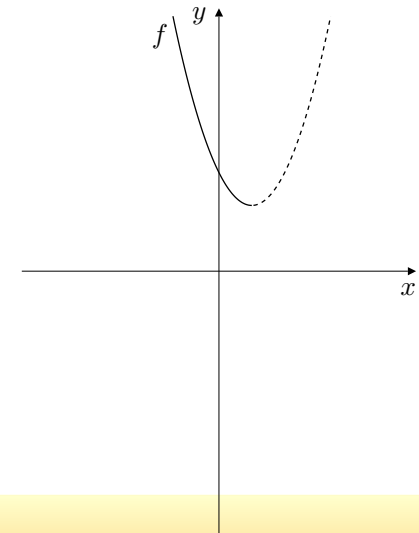
**Inverzní funkce:**  $f$  prostá funkce



$$y = f(x) \rightarrow \text{„vyřešení rovnice“} \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

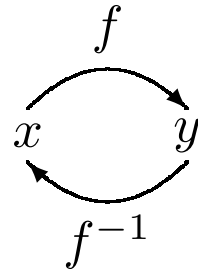
**Příklad:** Najděte funkci inverzní k funkci  $f$  definované na intervalu  $(-\infty, 1)$  předpisem  
 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .





# Operace s funkcemi

**Inverzní funkce:**  $f$  prostá funkce



$$y = f(x) \rightarrow \text{„vyřešení rovnice“} \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

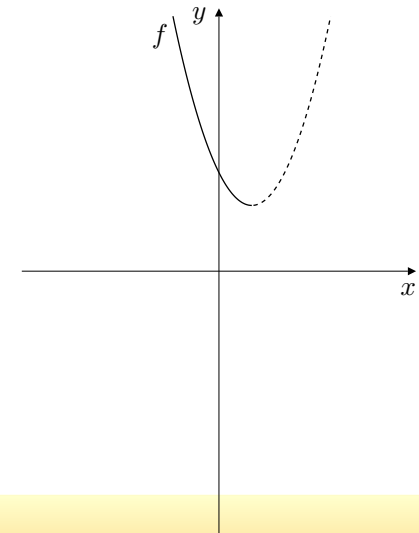
**Příklad:** Najděte funkci inverzní k funkci  $f$  definované na intervalu  $(-\infty, 1)$  předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

$$x^2 - 2x + 3 = y, \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y - 2}$$

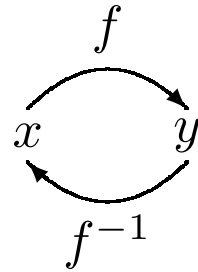
Pro  $x = 0$  je  $y = f(0) = 3$ , vyhovuje pouze znaménko  $-$ .

$$\text{Tedy } f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y - 2}$$



# Operace s funkcemi

**Inverzní funkce:**  $f$  prostá funkce



$$y = f(x) \rightarrow \text{„vyřešení rovnice“} \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

**Příklad:** Najděte funkci inverzní k funkci  $f$  definované na intervalu  $(-\infty, 1)$  předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

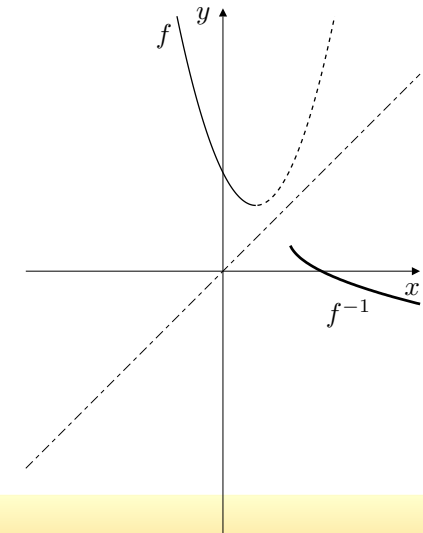
$$x^2 - 2x + 3 = y, \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y - 2}$$

Pro  $x = 0$  je  $y = f(0) = 3$ , vyhovuje pouze znaménko  $-$ .

$$\text{Tedy } f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y - 2}$$

Obvykle se nezávisle proměnná označuje symbolem  $x$ ,

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 2}.$$



Definice a základní vlastnosti

---

**Elementární funkce**

Polynomy

Lomené funkce

Exponenciální funkce

Logaritmická funkce

Obecná mocnina

Goniometrické funkce

Cyklometrické funkce

Shrnutí

Další funkce

---

# Elementární funkce

# Polynomy

*Polynom stupně  $n$*  je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

# Polynomy

*Polynom stupně  $n$  je funkce daná předpisem*

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$$D(P) = \mathbb{R}$$

$$H(P) = \mathbb{R} \text{ nebo } H(P) = (-\infty, \omega) \text{ nebo } H(P) = \langle \alpha, \infty) \text{ nebo } H(P) = \{\gamma\}.$$

# Polynomy

*Polynom stupně  $n$*  je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$$D(P) = \mathbb{R}$$

Speciální případy:

# Polynomy

*Polynom stupně  $n$  je funkce daná předpisem*

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

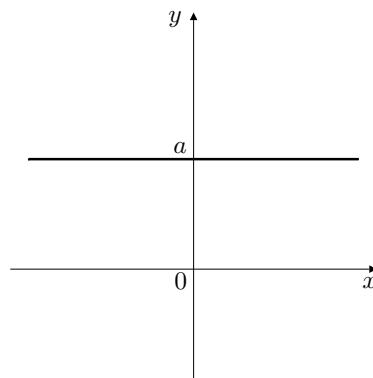
$$D(P) = \mathbb{R}$$

Speciální případy:

- $n = 0$ :  $y = P_0(x) = a$  – *konstantní funkce*

$$H(P_0) = \{a\}$$

ohraničená, periodická s libovolnou periodou, sudá, nerostoucí, neklesající



# Polynomy

Polynom stupně  $n$  je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

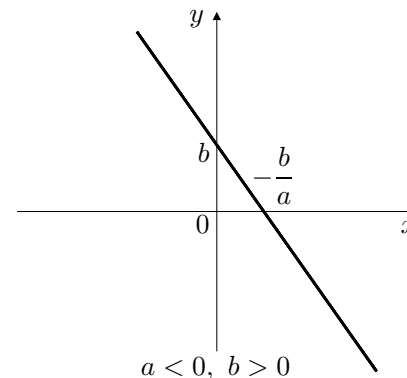
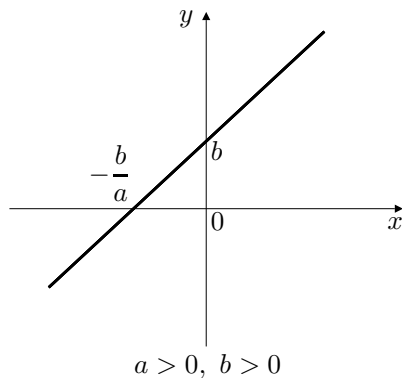
$$D(P) = \mathbb{R}$$

Speciální případy:

- $n = 1$ :  $y = P_1(x) = ax + b$  – lineární funkce

$$H(P_1) = (-\infty, \infty)$$

$b = 0 \Rightarrow$  lichá;  $a > 0 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 0 \Rightarrow$  klesající





# Polynomy

Polynom stupně  $n$  je funkce daná předpisem

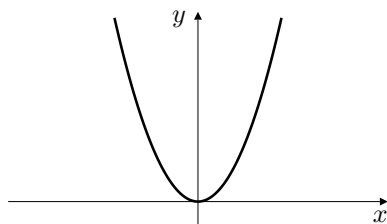
$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$$D(P) = \mathbb{R}$$

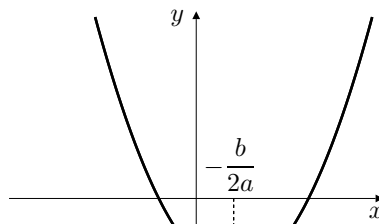
Speciální případy:

- $n = 2$ :  $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$  – kvadratická funkce  
 $b = c = 0 \Rightarrow$  sudá

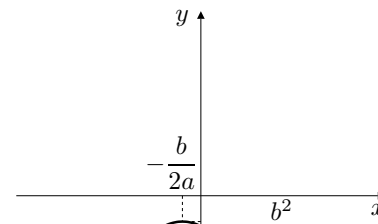
$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



$$a > 0, b = c = 0$$



$$a > 0, b < 0, b^2 > 4ac$$



$$a < 0, b < 0, b^2 < 4ac$$

# Polynomy

Polynom stupně  $n$  je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$$D(P) = \mathbb{R}$$

Speciální případy:

- $n = 2$ :  $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$  – kvadratická funkce

$b = c = 0 \Rightarrow$  sudá

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$a > 0 \Rightarrow$

$$H(P_2) = \left\langle \frac{4ac - b^2}{4a}, \infty \right\rangle, \text{ klesající na } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle, \text{ rostoucí na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right\rangle$$

$a < 0 \Rightarrow$

$$H(P_2) = \left\langle -\infty, \frac{4ac - b^2}{4a} \right\rangle, \text{ rostoucí na } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle, \text{ klesající na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right\rangle$$

# Polynomy

*Polynom stupně  $n$*  je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$$D(P) = \mathbb{R}$$

*kořen polynomu*: takové číslo  $x_0$ , že  $P(x_0) = 0$ .

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce  $R$  neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce  $R$  neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad:  $R(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$



# Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce  $R$  neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad:  $R(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 1) + x}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

# Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce*  $y = R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ,  $a \neq 0 \neq c$

$$D(R) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right), \quad H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

# Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce*  $y = R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ,  $a \neq 0 \neq c$

$$D(R) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right), \quad H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a x + \frac{b}{a}}{c x + \frac{d}{c}} = \frac{a x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{c x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{a \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{c x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$$

# Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

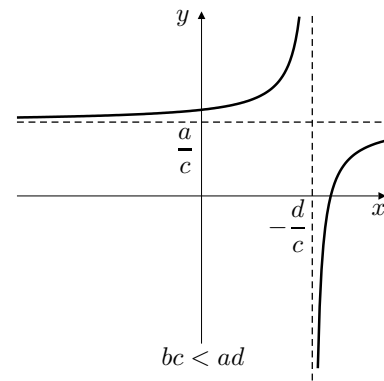
$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

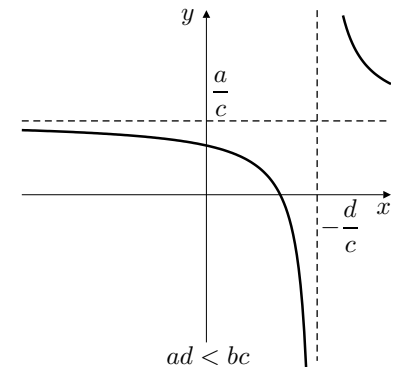
Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce*  $y = R(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$ ,  $a \neq 0 \neq c$ ,  $bc - ad \neq 0$

$$D(R) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right), \quad H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$



$$a, b, c > 0, \quad d < 0$$



# Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce*  $y = R(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$ ,  $a \neq 0 \neq c$ ,  $bc - ad \neq 0$

$$D(R) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, \infty\right), \quad H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$bc < ad \Rightarrow \text{klesající na intervalu } \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \text{ a na intervalu } \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$$

$$bc > ad \Rightarrow \text{rostoucí na intervalu } \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \text{ a na intervalu } \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$$

# Lomené funkce

*Lomená funkce* je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$$

Je-li stupeň polynomu  $Q$  větší než stupeň polynomu  $P$ , funkce se nazývá *ryze lomená*.

Polynomy a lomené funkce se nazývají *racionální funkce*

Polynom – *racionální funkce celistvá*

Lomená funkce – *racionální funkce lomená*

# Exponenciální funkce

*Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem*

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$



# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$

$$x = 0: a^0 = 1$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$

$$x = 0: a^0 = 1$$

$$x = -n, n \in \mathbb{N}: 1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$

$$x = 0: a^0 = 1$$

$$x = -n, n \in \mathbb{N}: 1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n. \text{ Tedy } \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \text{ je řešením rovnice } a = x^n.$$

# Exponenciální funkce

*Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem*

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**

# Exponenciální funkce

*Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem*

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$



# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

$$x = \frac{11}{8}: \quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1221}{512} > 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

$$x = \frac{11}{8}: \quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$$

$$x = \frac{21}{16}: \quad \left(\frac{21}{16}\right)^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

$$x = \frac{11}{8}: \quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$$

$$x = \frac{21}{16}: \quad \left(\frac{21}{16}\right)^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$$

$$x = \frac{41}{32}: \quad \left(\frac{41}{32}\right)^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

$$\text{Tedy } 1,25 = \frac{5}{4} < 2^{\frac{1}{3}} < \frac{41}{32} = 1,28125$$

$$x = \frac{11}{8}: \quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$$

$$x = \frac{21}{16}: \quad \left(\frac{21}{16}\right)^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$$

$$x = \frac{41}{32}: \quad \left(\frac{41}{32}\right)^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Nalezení  $2^{\frac{1}{3}}$  „postupným přiblížením“:**  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$ ,  $2 = x^3$

$$x = 1: \quad 1^3 = 1 < 2$$

$$x = 2: \quad 2^3 = 8 > 2$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$$

$$x = \frac{5}{4}: \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

$$\text{Tedy } 1,25 = \frac{5}{4} < 2^{\frac{1}{3}} < \frac{41}{32} = 1,28125$$

$$x = \frac{11}{8}: \quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$$

$$x = \frac{21}{16}: \quad \left(\frac{21}{16}\right)^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$$

$$x = \frac{41}{32}: \quad \left(\frac{41}{32}\right)^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$$

Je  $\sqrt[3]{2} \doteq 1,2599$ .

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$

$$x = 0: a^0 = 1$$

$$x = -n, n \in \mathbb{N}: 1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n. \text{ Tedy } \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \text{ je řešením rovnice } a = x^n.$$

$$x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$x = n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}$$

$$\text{Platí: } a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-krát}} = a^{mn}$$

$$x = 0: a^0 = 1$$

$$x = -n, n \in \mathbb{N}: 1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n. \text{ Tedy } \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \text{ je řešením rovnice } a = x^n.$$

$$x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

$x \in \mathbb{I}$ : iracionální číslo lze libovolně přesně aproximovat číslem racionálním



# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Příklad: aproximace čísla  $\pi$ :**

$$\begin{aligned} 3,14 &< \pi < 3,15 \\ 3,141 &< \pi < 3,142 \\ 3,1415 &< \pi < 3,1416 \\ 3,141592 &< \pi < 3,141593 \\ 3,1415926 &< \pi < 3,1415927 \\ 3,14159265 &< \pi < 3,14159266 \\ 3,141592653 &< \pi < 3,141592654 \\ &\vdots \end{aligned}$$

# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad H(f) = (0, \infty), \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

# Exponenciální funkce

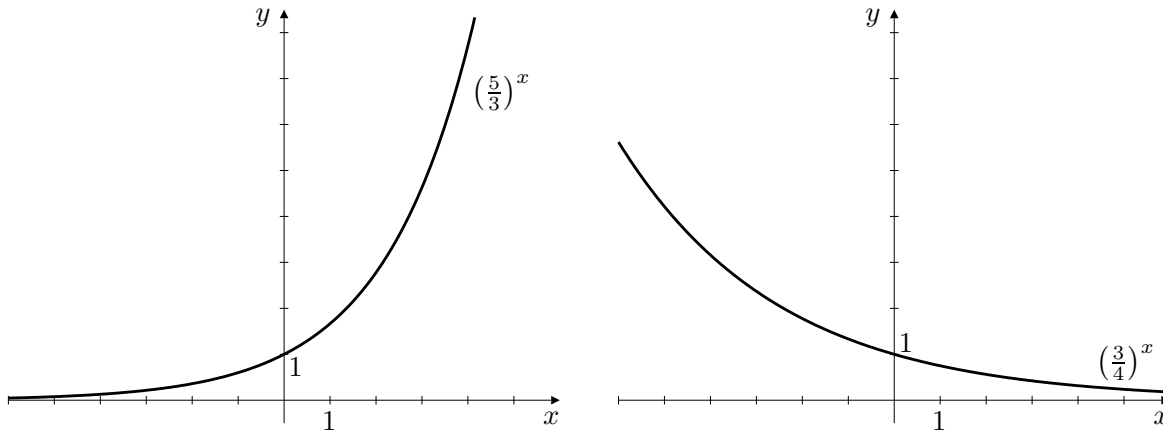
Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $H(f) = (0, \infty)$ ,  $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ ,  $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ .

$a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající



# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

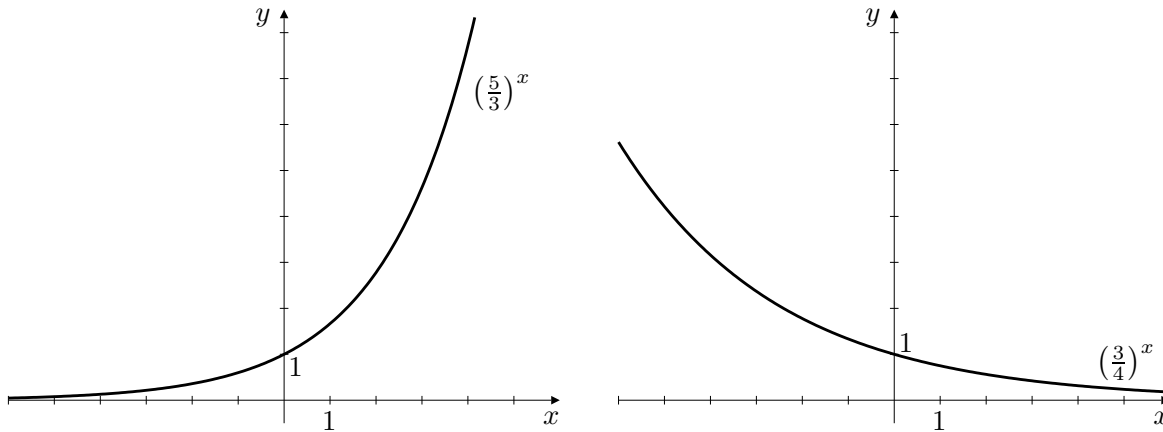
$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $H(f) = (0, \infty)$ ,  $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ ,  $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ .

$a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající

Přirozená exponenciální funkce  $\exp(x) = e^x$ ,  $e \doteq 2,718281828$  – Eulerovo číslo



# Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem  $a$  je funkce daná předpisem

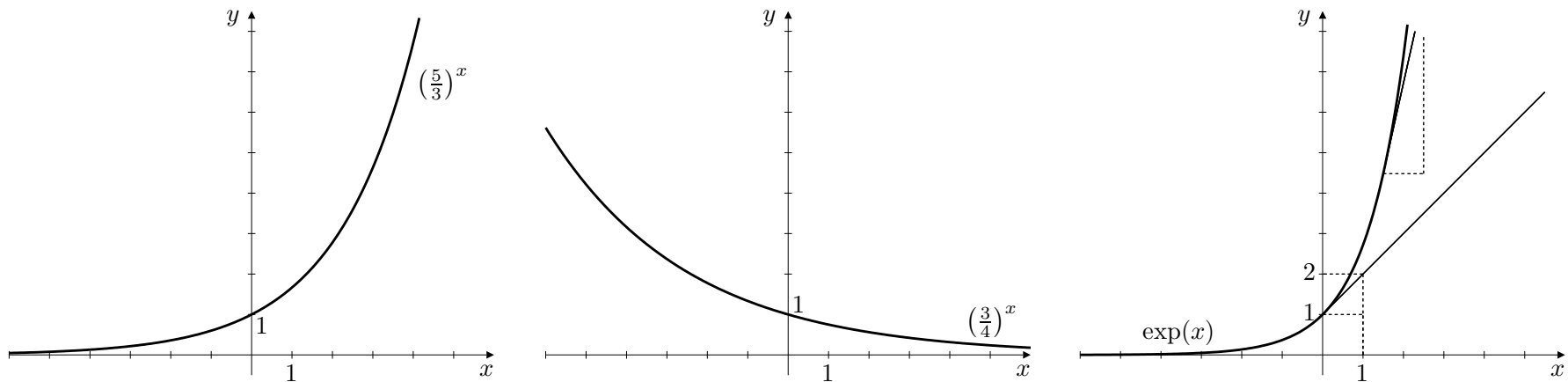
$$f(x) = a^x.$$

Přitom  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $H(f) = (0, \infty)$ ,  $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ ,  $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ .

$a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající

Přirozená exponenciální funkce  $\exp(x) = e^x$ ,  $e \doteq 2,718281828$  – Eulerovo číslo



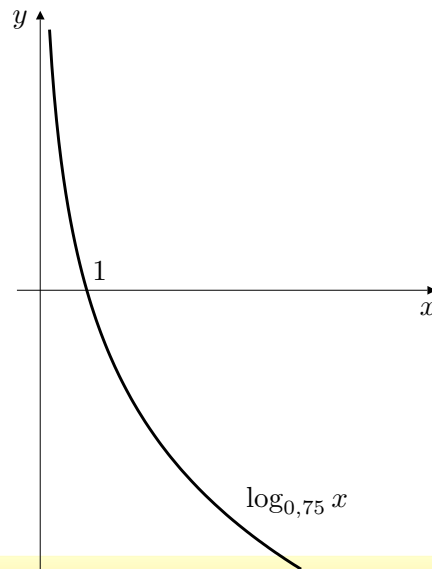
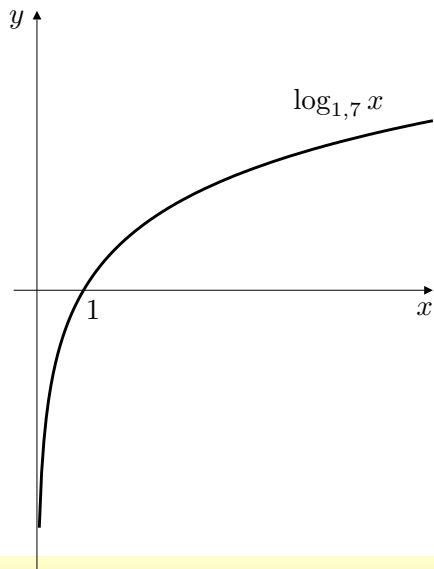
Směrnice tečny ke grafu funkce v bodě  $[x, e^x]$  je rovna funkční hodnotě  $e^x$ .

# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.



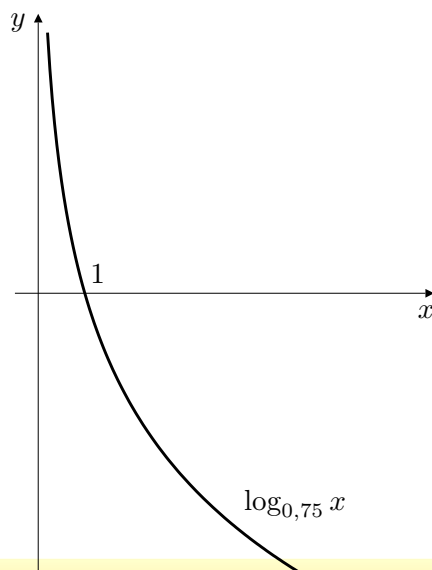
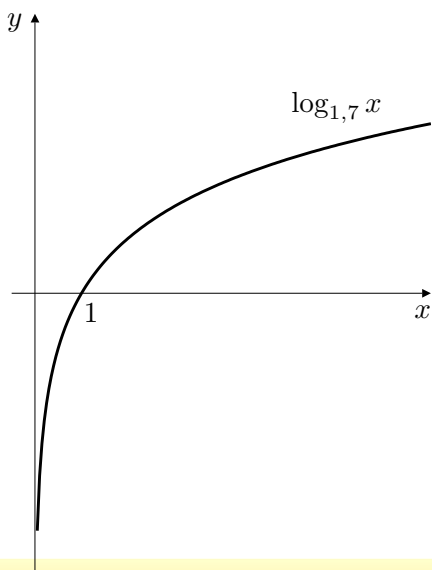
# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$



# Logaritmická funkce

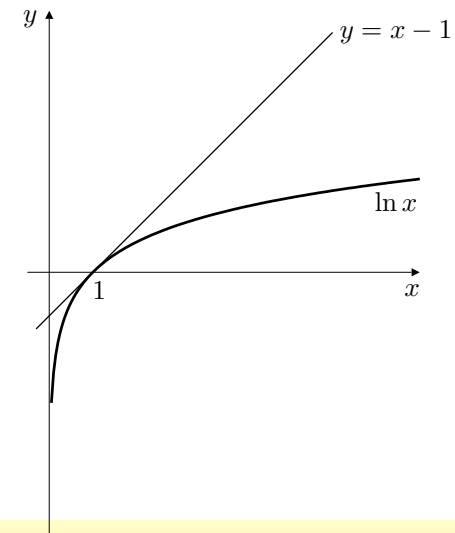
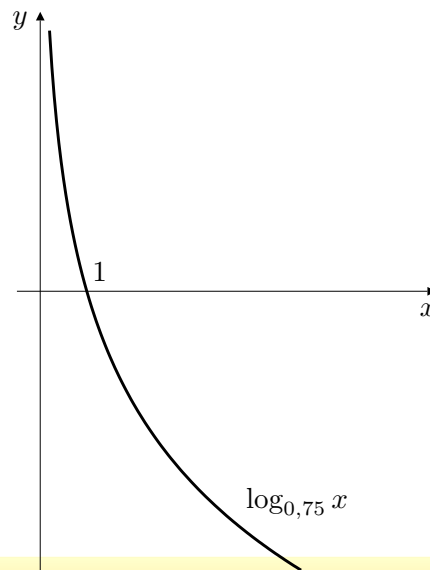
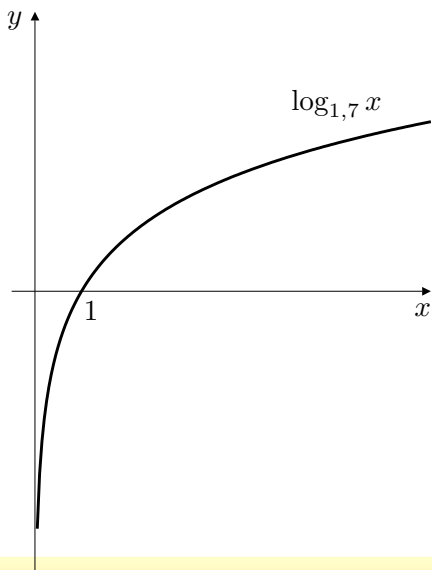
Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

Přirozená logaritmická funkce:  $\log_e x = \ln x (= \lg x = \log x)$





# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$y = \log_a x$$

$$a^y = x$$

$$y \log_b a = \log_b x$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$y = \log_a x$$

$$a^y = x$$

$$y \log_b a = \log_b x$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y = x^a$$

$$\ln y = a \ln x$$

$$y = e^{a \ln x}$$

# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y = x^a$$

$$\ln y = a \ln x$$

$$y = e^{a \ln x}$$

$$x^a = e^{a \ln x}$$

# Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $a > 1 \Rightarrow$  rostoucí,  $a < 1 \Rightarrow$  klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$x^a = e^{a \ln x}$$

# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

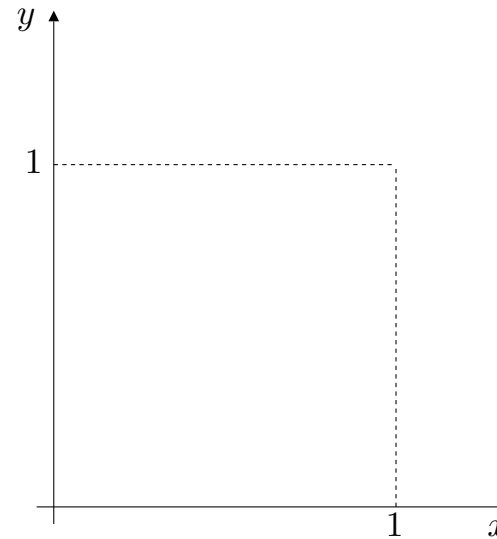
$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$



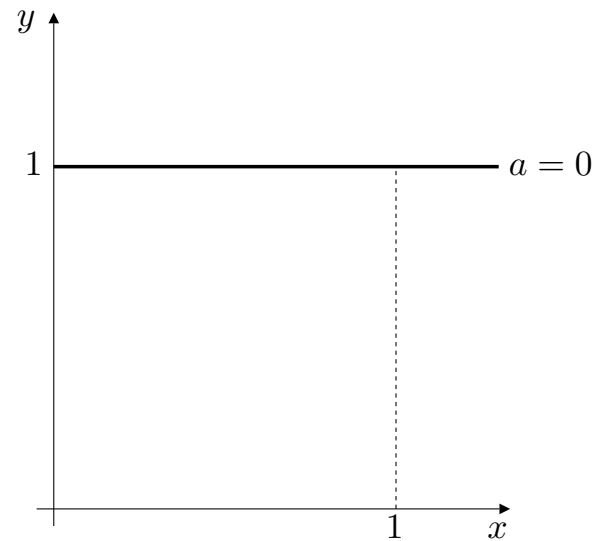


# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

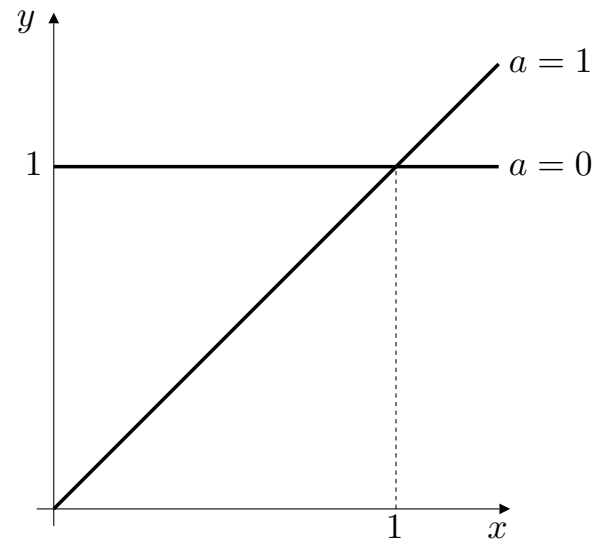


# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

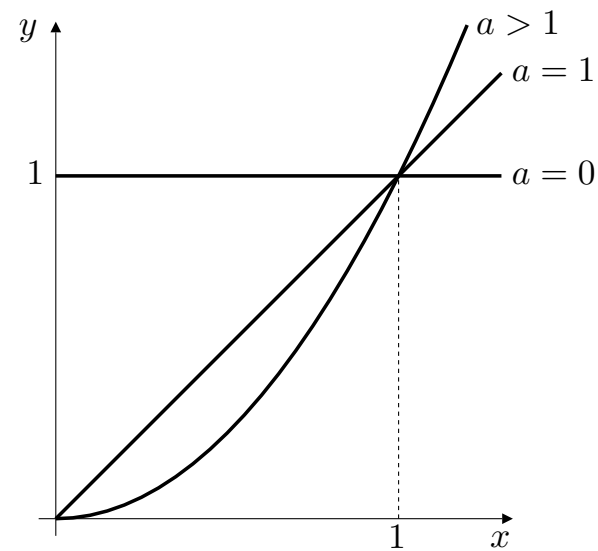


# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

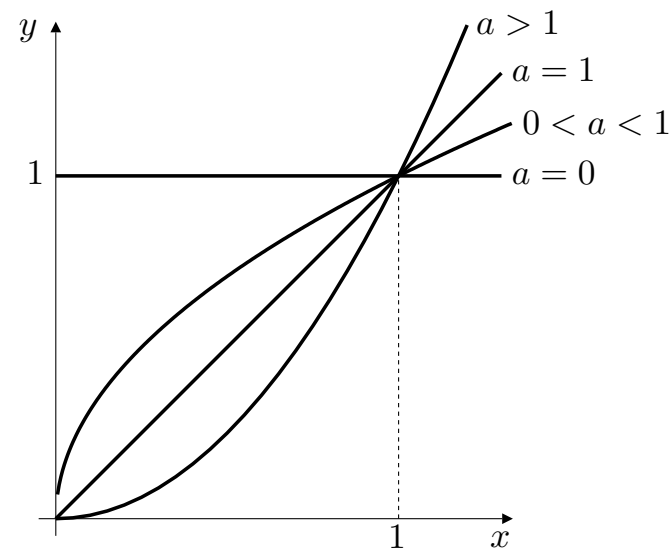


# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

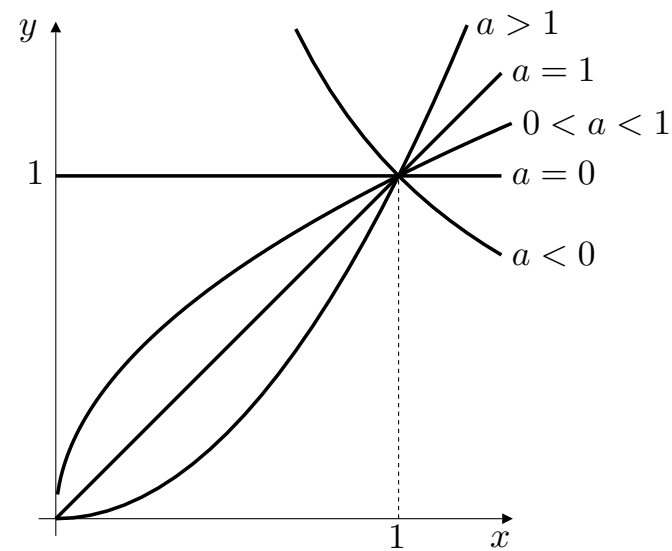


# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$



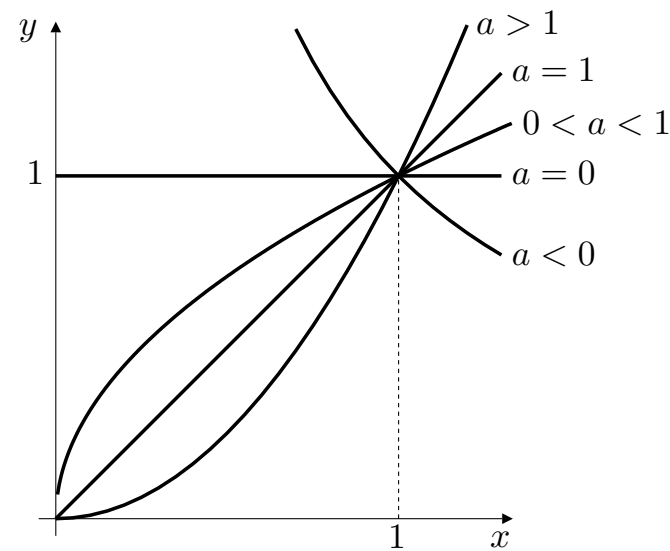
# Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („ $a$ -tá mocnina“) je pro  $a \in \mathbb{R}$  definována vztahem

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty), H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

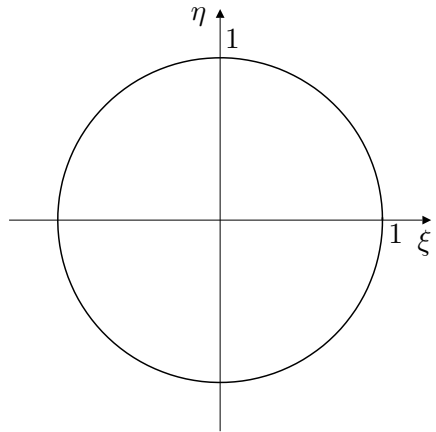
$a < 0 \Rightarrow$  klesající,  $a > 0 \Rightarrow$  rostoucí.



# Goniometrické funkce

# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi$ ,  $\eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

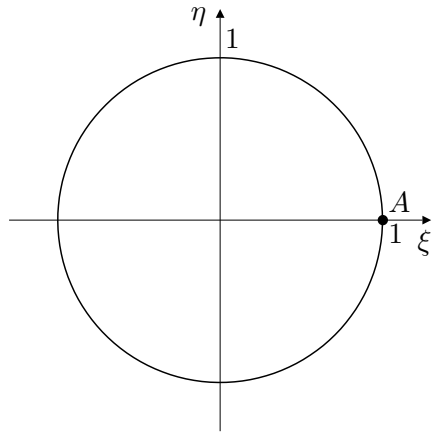




# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že  
 $x = 0: A = [1, 0]$



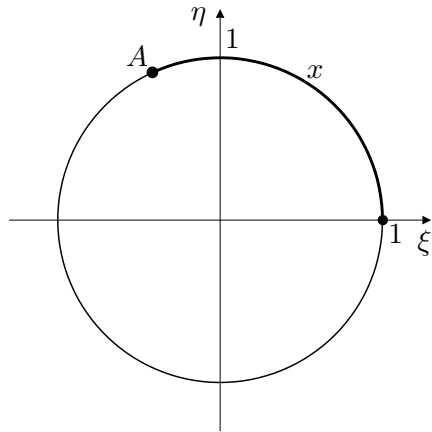
# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že

$x = 0$ :  $A = [1, 0]$

$x > 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v kladném smyslu má délku  $x$



# Goniometrické funkce

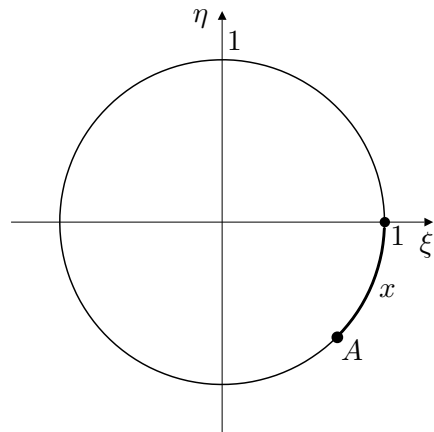
Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že

$x = 0$ :  $A = [1, 0]$

$x > 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v kladném smyslu má délku  $x$

$x < 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v záporném smyslu má délku  $-x$



# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že

$x = 0$ :  $A = [1, 0]$

$x > 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v kladném smyslu má délku  $x$

$x < 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v záporném smyslu má délku  $-x$

*Goniometrické funkce sinus a cosinus* jsou „definovány“:

$\sin x = 2.$  souřadnice bodu  $A$

# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že

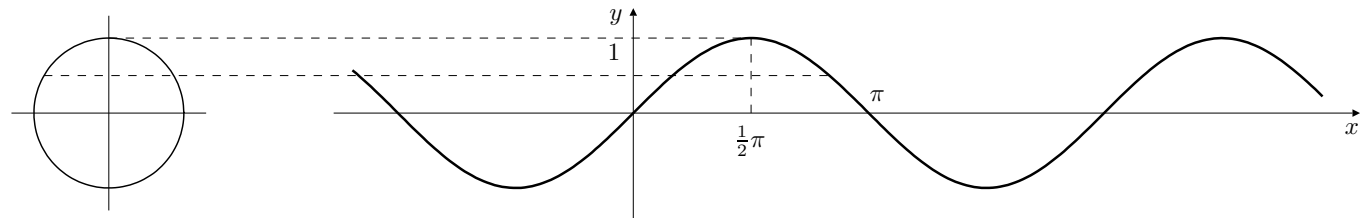
$x = 0$ :  $A = [1, 0]$

$x > 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v kladném smyslu má délku  $x$

$x < 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v záporném smyslu má délku  $-x$

*Goniometrické funkce sinus a cosinus* jsou „definovány“:

$\sin x = 2.$  souřadnice bodu  $A$



# Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici  $k$ , tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme  $\xi, \eta$ ) rovnici  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Nechť  $x \in \mathbb{R}$ . Bod  $A$  leží na kružnici  $k$  tak, že

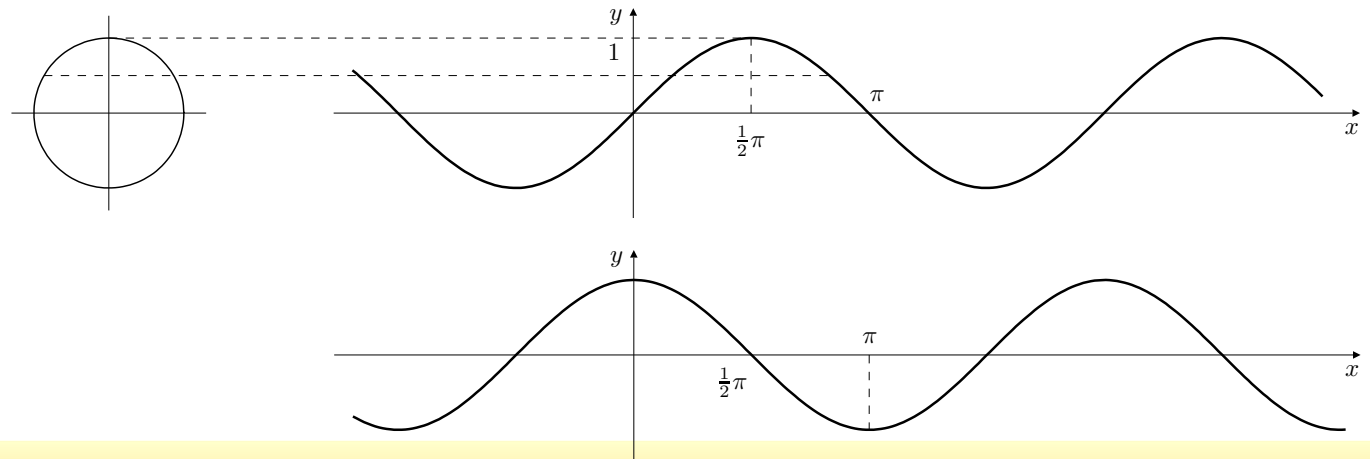
$$x = 0: A = [1, 0]$$

$x > 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v kladném smyslu má délku  $x$

$x < 0$ : oblouk kružnice  $k$  od bodu  $[1, 0]$  k bodu  $A$  braný v záporném smyslu má délku  $-x$

*Goniometrické funkce sinus a cosinus* jsou „definovány“:

$\sin x = 2$ . souřadnice bodu  $A$ ,       $\cos x = 1$ . souřadnice bodu  $A$ .



# Goniometrické funkce

$D(\sin) = \mathbb{R}$ ,  $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, lichá, periodická – základní perioda  $2\pi$

# Goniometrické funkce

$D(\sin) = \mathbb{R}$ ,  $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, lichá, periodická – základní perioda  $2\pi$

$D(\cos) = \mathbb{R}$ ,  $H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, sudá, periodická – základní perioda  $2\pi$



# Goniometrické funkce

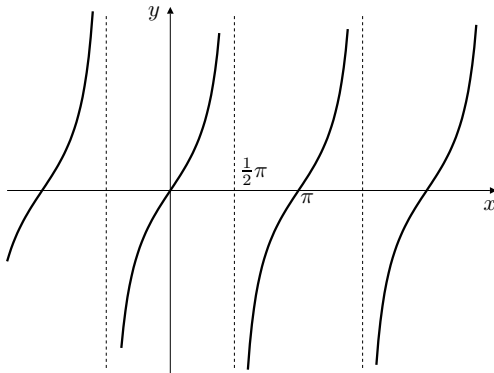
$D(\sin) = \mathbb{R}$ ,  $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, lichá, periodická – základní perioda  $2\pi$

$D(\cos) = \mathbb{R}$ ,  $H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, sudá, periodická – základní perioda  $2\pi$

---

*Goniometrické funkce tangens a cotangens jsou definovány:*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



# Goniometrické funkce

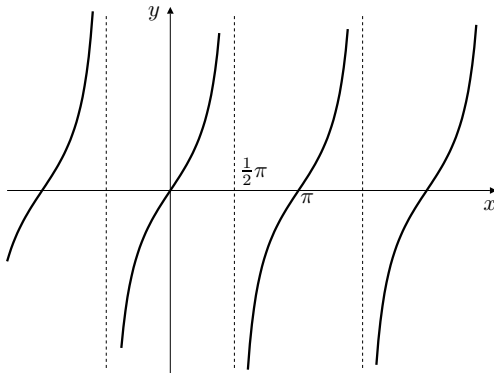
$D(\sin) = \mathbb{R}$ ,  $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, lichá, periodická – základní perioda  $2\pi$

$D(\cos) = \mathbb{R}$ ,  $H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, sudá, periodická – základní perioda  $2\pi$

---

*Goniometrické funkce tangens a cotangens jsou definovány:*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}(2k - 1)\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$ , lichá, periodická – základní perioda  $\pi$

# Goniometrické funkce

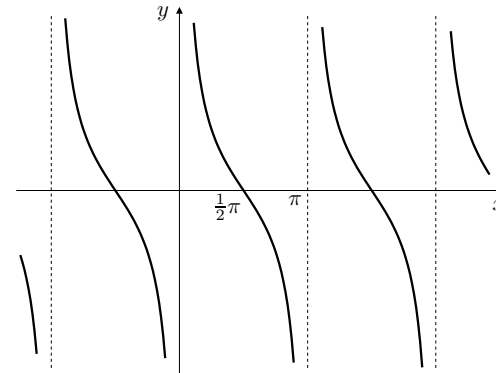
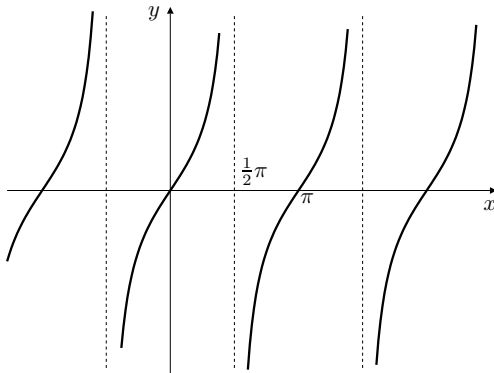
$D(\sin) = \mathbb{R}$ ,  $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, lichá, periodická – základní perioda  $2\pi$

$D(\cos) = \mathbb{R}$ ,  $H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$ , ohraničená, sudá, periodická – základní perioda  $2\pi$

---

*Goniometrické funkce tangens a cotangens jsou definovány:*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2}(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ ,  $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$ , lichá, periodická – základní perioda  $\pi$

$D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ ,  $H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$ , lichá, periodická – základní perioda  $\pi$

# Goniometrické funkce

Základní vzorce:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1, \quad \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos x, \quad \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin x$$

Součtové vzorce:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$$

$$\left(\sin \frac{1}{2}\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \left(\cos \frac{1}{2}\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

# Cyklometrické funkce

Funkce inverzní ke goniometrickým

# Cyklometrické funkce

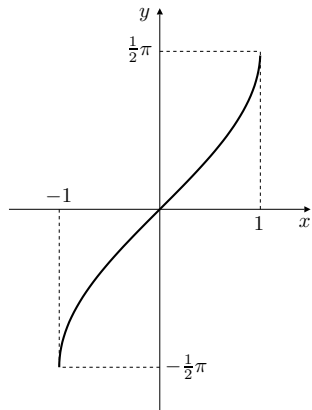
Funkce inverzní ke goniometrickým na zúženém definičním oboru:

goniometrická funkce	definiční obor	cyklometrická funkce
$\sin$	$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$	$\arcsin$
$\cos$	$(0, \pi)$	$\arccos$
$\operatorname{tg}$	$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$	$\operatorname{arctg}$
$\operatorname{cotg}$	$(0, \pi)$	$\operatorname{arccotg}$

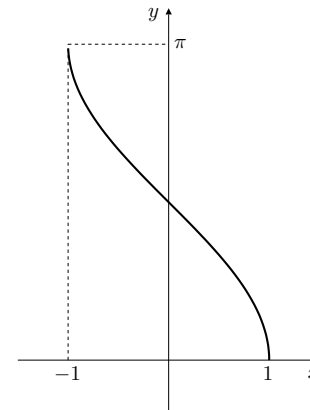
# Cyklometrické funkce

## Funkce inverzní ke goniometrickým

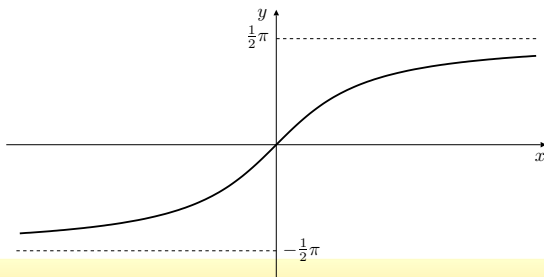
$D(\arcsin) = \langle -1, 1 \rangle$ ,  $H(\arcsin) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$   
ohraničená, rostoucí, lichá



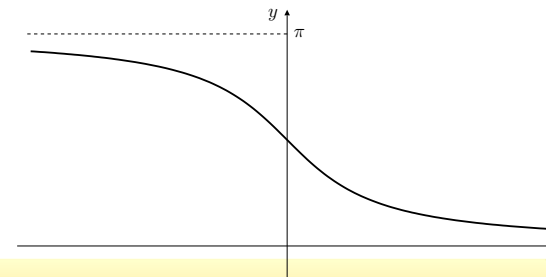
$D(\arccos) = \langle -1, 1 \rangle$ ,  $H(\arccos) = (0, \pi)$   
ohraničená, klesající



$D(\arctg) = \mathbb{R}$ ,  $H(\arctg) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$   
ohraničená, rostoucí, lichá



$D(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ ,  $H(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$   
ohraničená, klesající



# Cyklometrické funkce

Vztahy mezi goniometrickými a cyklometrickými funkcemi:

$$\cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \cos \operatorname{arccotg} x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \cos \operatorname{arctg} x = \sin \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$



# Shrnutí

Elementární funkce jsou

- Polynomy, přirozená exponenciála, funkce sinus
- Funkce, které z nich vzniknou pomocí aritmetických operací, operace skládání funkcí a operace tvoření inverzní funkce v **konečném** počtu

Na každém intervalu, který je částí definičního oboru, lze graf elementární funkce nakreslit plynulým pohybem bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou.

Definice a základní vlastnosti

---

Elementární funkce

---

**Další funkce**

Absolutní hodnota

Funkce signum

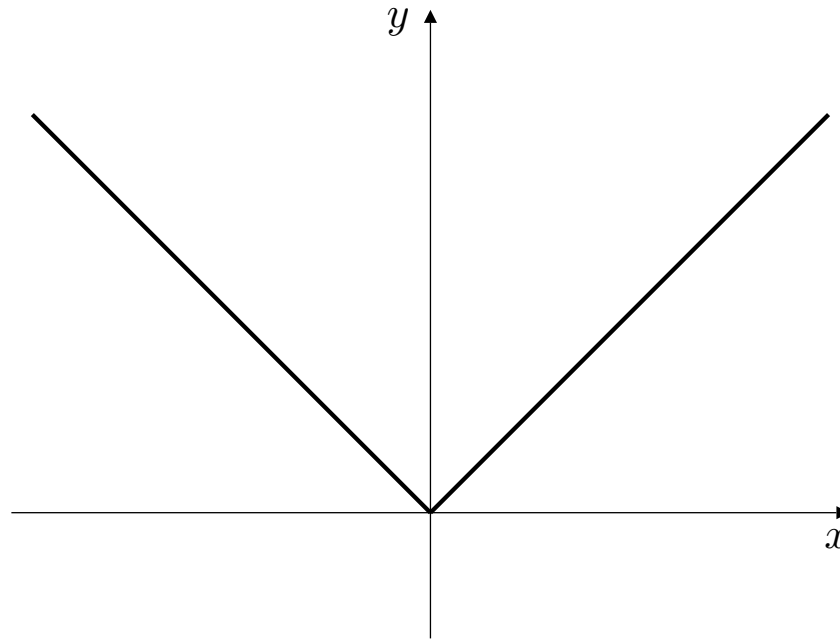
Funkce celá část

## Další funkce

# Absolutní hodnota

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

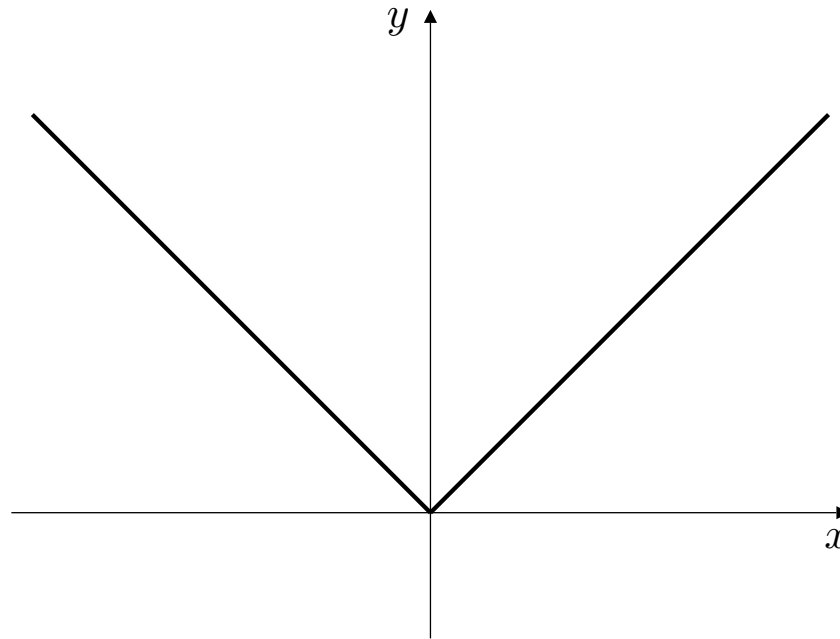
$D(| \cdot |) = \mathbb{R}$ ,  $H(| \cdot |) = \langle 0, \infty \rangle$ , sudá



# Absolutní hodnota

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

$D(| \cdot |) = \mathbb{R}$ ,  $H(| \cdot |) = \langle 0, \infty \rangle$ , sudá

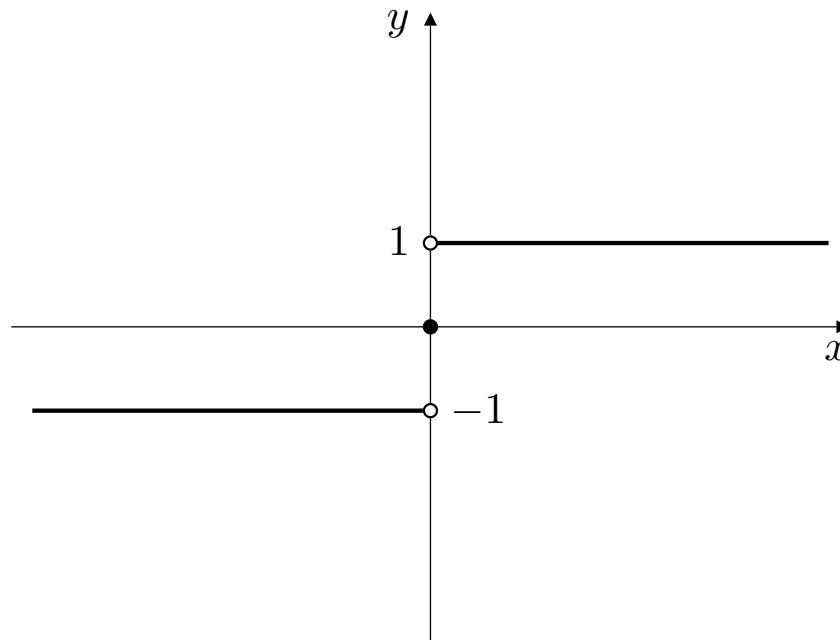


Graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, ale nelze ho nakreslit plynulým pohybem.

# Funkce signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

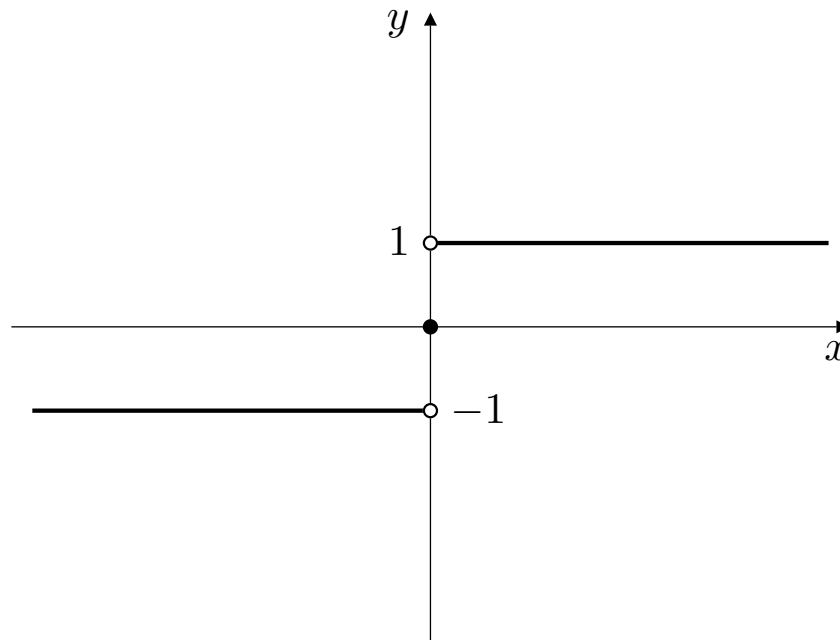
$D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}$ ,  $H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$ , lichá



# Funkce signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}$ ,  $H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$ , lichá



Graf nelze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou.

# Funkce celá část

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\},$$

$$D([\cdot]) = \mathbb{R}, H(|\cdot|) = \mathbb{Z}.$$

