Integrální počet

M1030 Matematika pro biology

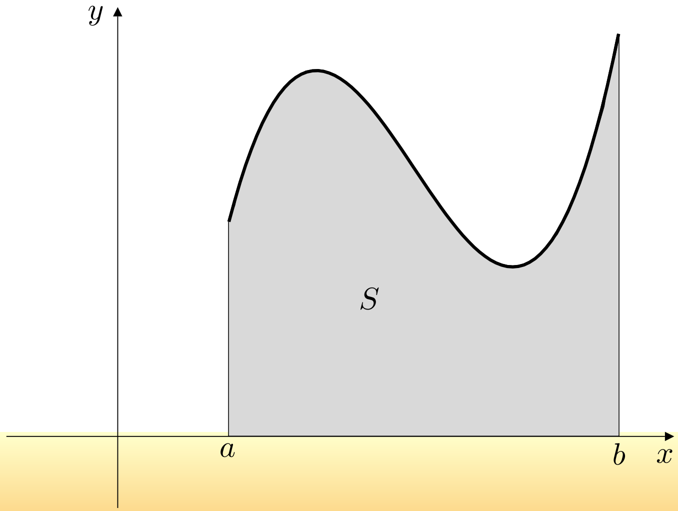
7. 12. 2021

Úvod

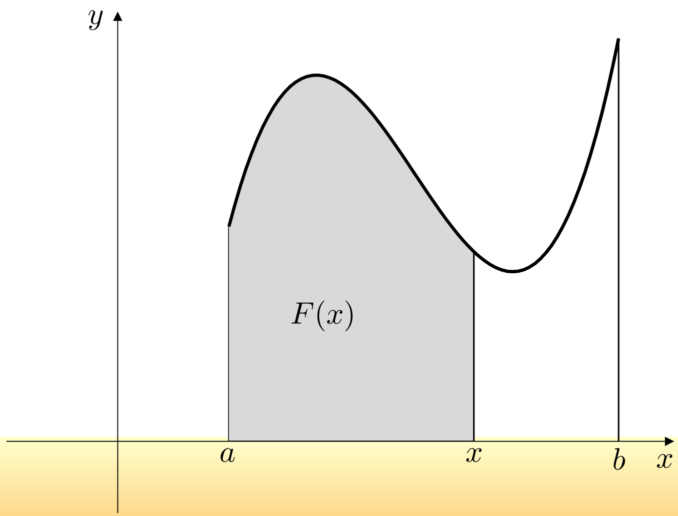
Základní úloha integrálního počtu

Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$



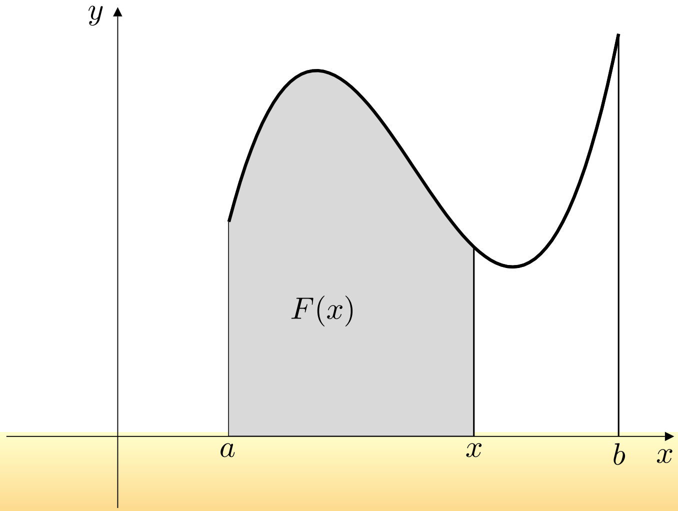
Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$



Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

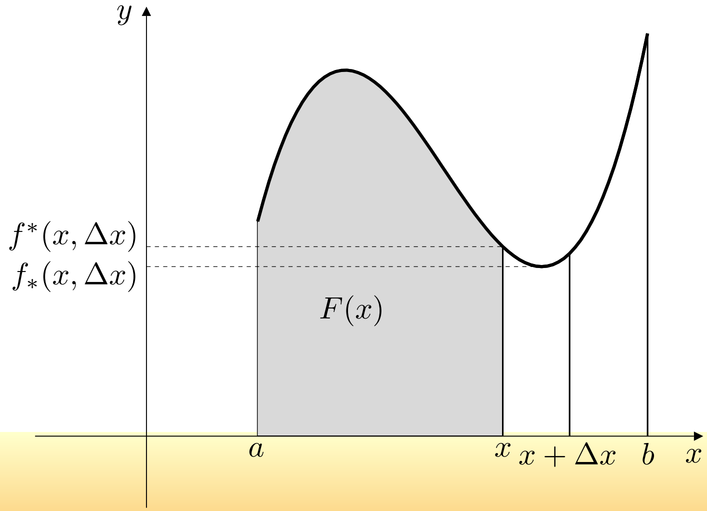
Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x



Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

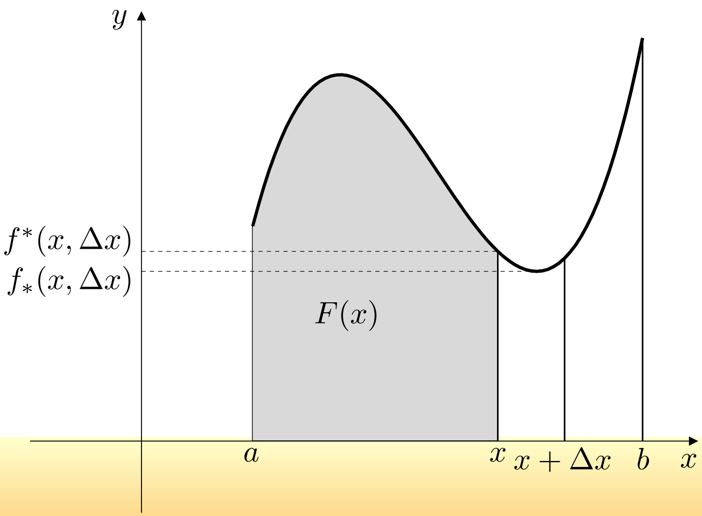


Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$



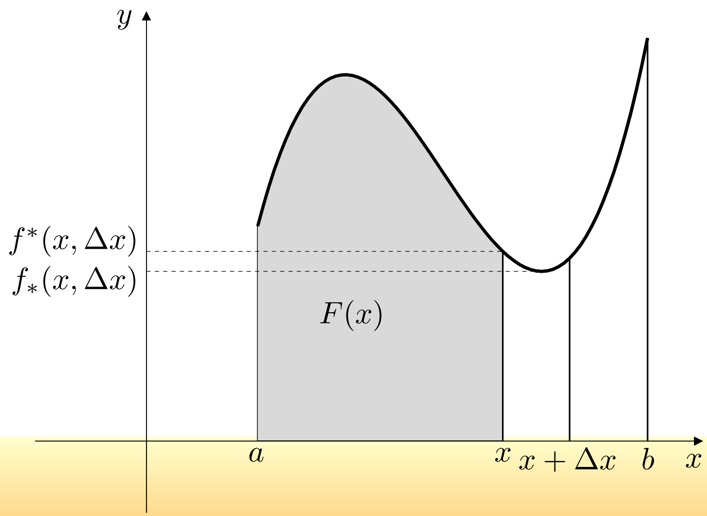
Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \le s \le x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \le s \le x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \le F(x + \Delta x) \le F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$



Základní úloha integrálního počtu

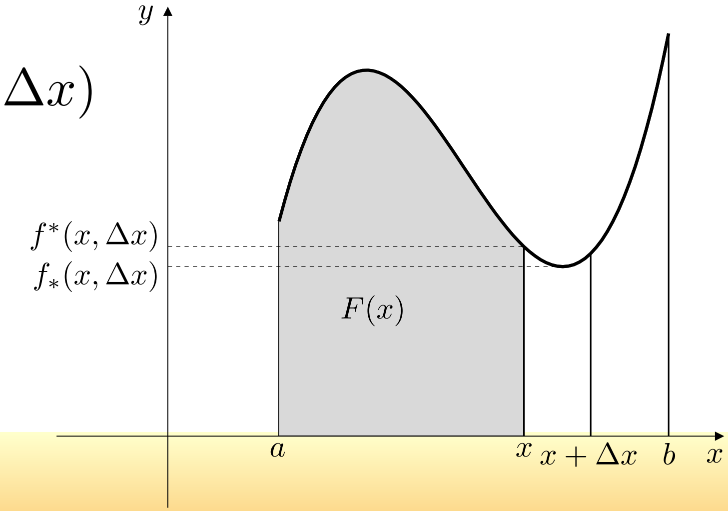
Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \leq F(x + \Delta x) \leq F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$

$$f_*(x, \Delta x) \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f^*(x, \Delta x)$$



Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \leq F(x + \Delta x) \leq F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$

$$f_*(x, \Delta x) \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f^*(x, \Delta x) \qquad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \leq F(x + \Delta x) \leq F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$

$$f_*(x, \Delta x) \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f^*(x, \Delta x) \qquad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \le s \le x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \le s \le x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \le F(x + \Delta x) \le F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$

$$f_*(x, \Delta x) \le \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le f^*(x, \Delta x) \qquad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$f(x) \le F'(x) \le f(x)$$

Odtud: $F'(x) = f(x)$

Základní úloha integrálního počtu

Určit obsah S obrazce pod grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$

Označení: $F(x)$ obsah obrazce pod grafem funkce f na intervalu od a do x
Δx přírůstek nezávisle proměnné
$f^*(x, \Delta x) = \max\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$
$f_*(x, \Delta x) = \min\{f(s) : x \leq s \leq x + \Delta x\}$

Platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f^*(x, \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_*(x, \Delta x) = f(x)$

Dále: $F(x) + f_*(x, \Delta x)\Delta x \leq F(x + \Delta x) \leq F(x) + f^*(x, \Delta x)\Delta x$

$$f_*(x, \Delta x) \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f^*(x, \Delta x) \qquad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

Odtud: $F'(x) = f(x)$
Přitom: $F(a) = 0$, $S = F(b)$

Neurčitý integrál

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Označení:

$$F = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí
$$F'(x) = f(x).$$

Označení:
$$F = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Alternativní názvy: Funkce F je *neurčitý integrál z funkce* f.
Funkce F je *antiderivace k funkci* f.

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
  Je-li F primitivní k f, pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c.

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
  Je-li F primitivní k f, pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c.
- Primitivní funkce je *aditivní*:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí
$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
  Je-li F primitivní k f, pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c.
- Primitivní funkce je *homogenní*:

$$\int \big(cf(x)\big)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkce a její vlastnosti

Funkce F je *primitivní k funkci* f na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li na tomto intervalu spojitá a pro každé $x \in (a, b)$ platí
$$F'(x) = f(x).$$

Vlastnosti primitivní funkce:

- Ke každé funkci spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje na tomto intervalu funkce primitivní.
- Primitivní funkce k dané funkci, pokud existuje, není určena jednoznačně.
  Je-li F primitivní k f, pak také $F + c$ je primitivní k f pro libovolnou konstantu c.
- Primitivní funkce je *lineární*:

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x.$$

„Tabulkové integrály“

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x = -\arccos x$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x = -\arccos x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x = -\arccos x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| = -\ln \left| x - \sqrt{x^2 \pm 1} \right|$$

„Tabulkové integrály“

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ pro } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x = -\arccos x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| = -\ln \left| x - \sqrt{x^2 \pm 1} \right|$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x \right)$$

Příklady:

„Tabulkové integrály“

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^2 - 2x$$

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^2 - 2x$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^2 - 2x$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x = \int \frac{2x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{4}{5}x^2 - \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$$

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^2 - 2x$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x = \int \frac{2x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{4}{5}x^2 - \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$$

$$\int \left(\frac{x-1}{3x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \left(3x^5 - 2x^3 + x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x = \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^2 - 2x$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 2x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x = \int \frac{2x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{4}{5}x^2 - \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$$

$$\int \left(\frac{x-1}{3x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{9x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{9}\int \left(1 - \frac{2}{x} + x^{-2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{9}\left(x - 2\ln|x| - \frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{9}\left(\frac{x^2-1}{x} - \ln x^2\right)$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Substituční metoda

$$F' = f, \qquad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce:

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce:

1. Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$
substituce: $\varphi(x) = s$, $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Substituční metoda

$$F' = f, \qquad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce: **1.** Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$
substituce: $\varphi(x) = s$, $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(s)\mathrm{d}s = F(s) = F\big(\varphi(x)\big)$$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce:

1. Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$
substituce: $\varphi(x) = s$, $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(s)\mathrm{d}s = F(s) = F\big(\varphi(x)\big)$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)\mathrm{d}x$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce:

1. Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$
substituce: $\varphi(x) = s$, $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(s)\mathrm{d}s = F(s) = F\big(\varphi(x)\big)$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)\mathrm{d}x$
substituce: $x = \varphi(s)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(s) = \varphi'(s)\mathrm{d}s$

Substituční metoda

$$F' = f, \quad F = \int f$$

Derivace složené funkce: $\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$

Odtud: $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$

Použití vzorce:

1. Výpočet integrálu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$
substituce: $\varphi(x) = s$, $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(s)\mathrm{d}s = F(s) = F\big(\varphi(x)\big)$$

2. Výpočet integrálu $\int f(x)\mathrm{d}x$
substituce: $x = \varphi(s)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(s) = \varphi'(s)\mathrm{d}s$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\mathrm{d}s = F\big(\varphi(s)\big) = F(x)$$

Příklady:

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x$$

substituce: $\ln x = s, \; \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3} s^3 = \tfrac{1}{3} (\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int 2x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s,\ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

substituce: $x^2 = s,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3} s^3 = \tfrac{1}{3} (\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int 2x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s, \ 2x \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3} s^3 = \tfrac{1}{3} (\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int 2x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s, \ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s, \ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3} s^3 = \tfrac{1}{3} (\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int 2x \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s, \ 2x \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x \qquad \tfrac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 + 1} \mathrm{d}x$$

substituce 1: $x^4 + 1 = s, \ 4x^3 \mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s, \ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s, \ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x \qquad \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x \qquad = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|s|$$

substituce 1: $x^4+1 = s, \ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s,\ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^s \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x \qquad \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|s|$$

substituce 1: $x^4+1 = s,\ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$
substituce 2: $x^2 = t,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2\mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s,\ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x \qquad \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln|s| + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$

substituce 1: $x^4+1 = s,\ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$
substituce 2: $x^2 = t,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Příklady:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int s^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}s^3 = \tfrac{1}{3}(\ln x)^3$$

substituce: $\ln x = s,\ \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^s = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

substituce: $x^2 = s,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|s| + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \tfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$$

substituce 1: $x^4+1 = s,\ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$
substituce 2: $x^2 = t,\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x$$

substituce: $3-5x = s,\ -5\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x =$$

$$= x + \tfrac{2}{5}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = x + \tfrac{2}{5}\ln|s| = x + \tfrac{2}{5}\ln|3-5x|$$

substituce: $3-5x = s, \; -5\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x =$$

$$= x + \tfrac{2}{5}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = x + \tfrac{2}{5}\ln|s| = x + \tfrac{2}{5}\ln|3-5x|$$

substituce: $3-5x=s,\ -5\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int (\sin x)^2\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x =$$

$$= x + \tfrac{2}{5}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = x + \tfrac{2}{5}\ln|s| = x + \tfrac{2}{5}\ln|3-5x|$$

substituce: $3-5x = s,\ -5\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int (\sin x)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x =$$

$$= x + \tfrac{2}{5}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = x + \tfrac{2}{5}\ln|s| = x + \tfrac{2}{5}\ln|3-5x|$$

substituce: $3-5x = s, \ -5\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int (\sin x)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x$$

substituce: $2x = s$, $2\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{1-5x}{3-5x}\mathrm{d}x = \int \frac{3-5x-2}{3-5x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x = x + \tfrac{2}{5}\int \frac{-5}{3-5x}\mathrm{d}x =$$

$$= x + \tfrac{2}{5}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = x + \tfrac{2}{5}\ln|s| = x + \tfrac{2}{5}\ln|3-5x|$$

substituce: $3-5x = s,\ -5\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int (\sin x)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\int \cos s\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin s = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x = \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$$

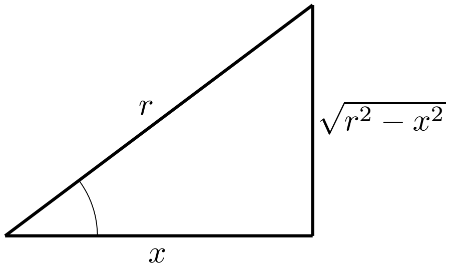
substituce: $2x = s$, $2\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

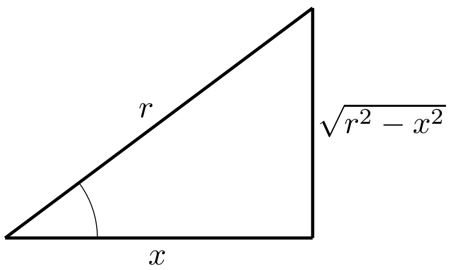


substituce: $x = r\cos s$, $\mathrm{d}x = -r\sin s\,\mathrm{d}s$

$$\sqrt{r^2 - (r\cos s)^2} = \sqrt{r^2\bigl(1 - (\cos s)^2\bigr)} = r\sin s$$

Příklady:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -r^2 \int (\sin s)^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} r^2 (\sin s \cos s - s)$$



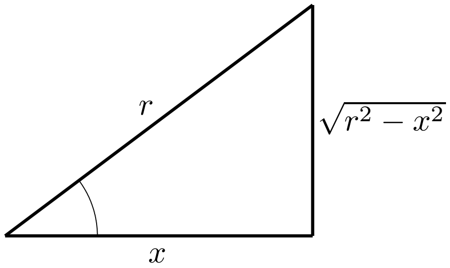
substituce: $x = r\cos s,\ \mathrm{d}x = -r\sin s\,\mathrm{d}s$

$$\sqrt{r^2 - (r\cos s)^2} = \sqrt{r^2\big(1 - (\cos s)^2\big)} = r\sin s$$

Substituční metoda

Příklady:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -r^2 \int (\sin s)^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} r^2 (\sin s \cos s - s)$$



substituce: $x = r\cos s,\ \mathrm{d}x = -r\sin s\,\mathrm{d}s$

$$\sqrt{r^2 - (r\cos s)^2} = \sqrt{r^2\big(1 - (\cos s)^2\big)} = r\sin s$$

$$s = \arccos\frac{x}{r},\ \sin s = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

Příklady:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -r^2 \int (\sin s)^2 \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} r^2 (\sin s \cos s - s) =$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} - \arccos \frac{x}{r} \right) = \tfrac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2} r^2 \arccos \frac{x}{r}$$

substituce: $x = r \cos s,\ \mathrm{d}x = -r \sin s\,\mathrm{d}s$

$$\sqrt{r^2 - (r \cos s)^2} = \sqrt{r^2\bigl(1 - (\cos s)^2\bigr)} = r \sin s$$

$$s = \arccos \frac{x}{r},\ \sin s = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

Příklady:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

substituce: $x = s^2$, $\mathrm{d}x = 2s\,\mathrm{d}s$

Příklady:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{s}{1+s}2s\,\mathrm{d}s = 2\int \frac{s^2}{1+s}\mathrm{d}s = 2\int \frac{s^2-1+1}{s+1}\mathrm{d}s =$$

$$= \int \left(2s - 2 + 2\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s = s^2 - 2s + 2\ln|s+1| = x - 2\sqrt{x} + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2$$

substituce: $x = s^2$, $\mathrm{d}x = 2s\,\mathrm{d}s$

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x$$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x$$

substituce: $ax+b=s$, $a\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}s$

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{a}F(s) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

substituce: $ax+b=s$, $a\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}s$

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

substituce: $\ln|f(x)| = s,\ \frac{1}{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}s = s = \ln|f(x)|$$

substituce: $\ln|f(x)| = s$, $\dfrac{1}{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Substituční metoda

Lineární substituce:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Logaritmická substituce:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$$

Integrace „per partes“

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

odtud

$$u(x)v'(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u'(x)v(x),$$

Integrace „per partes“

Derivace součinu funkcí:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

odtud

$$u(x)v'(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u'(x)v(x),$$

tedy

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$$

$u = 2 - 3x$
$v' = \mathrm{e}^{1-x}$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = 2-3x & u' = -3 \\ v' = \mathrm{e}^{1-x} & v = -\mathrm{e}^{1-x} \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$

$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\begin{array}{ll} u = 2-3x & u' = -3 \\ v' = \mathrm{e}^{1-x} & v = -\mathrm{e}^{1-x} \end{array}$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x\mathrm{d}x$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$

$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

Integrace „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x\right)$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int (2-3x)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -(2-3x)\mathrm{e}^{1-x} - \int 3\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = (3x-2)\mathrm{e}^{1-x} + 3\mathrm{e}^{1-x} =$$
$$= (3x+1)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x = \left(x^2 - 2\right)\sin x + 2x\cos x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\,\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$
$$= -\arccos x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arccos x = -\tfrac{1}{2}\left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$
$$= -\arccos x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arccos x = -\tfrac{1}{2}\left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\int 3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x = $$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$
$$= -\arccos x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arccos x = -\tfrac{1}{2}\left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\int 3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-x}$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \\ = -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = -\arccos x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arccos x = -\tfrac{1}{2}\left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\int 3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-x}$$

$$\int (3x-7)^{14}\,\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{2+\frac{1}{2}-5}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \left(7\mathrm{e}^x - \frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x = 7\mathrm{e}^x - 6\ln|x| = 7\mathrm{e}^x - \ln x^6$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x = $$
$$= -\operatorname{cotg} x - x$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =$$
$$= -\arccos x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arccos x = -\tfrac{1}{2}\left(\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\int 3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-x}$$

$$\int (3x-7)^{14}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\frac{(3x-7)^{15}}{15} = \frac{(3x-7)^{15}}{45}$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} \mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2 - 1 = s$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x$$

substituce: $2+\cos x = s$, $-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s = -\int s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2+\cos x}$$

substituce: $2+\cos x = s$, $-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s = -\int s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2+\cos x}$$

substituce: $2+\cos x = s$, $-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s = -\int s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2+\cos x}$$

substituce: $2+\cos x = s$, $-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$$

substituce: $\mathrm{e}^x-1=s$, $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

Příklady

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\ln|s| = \ln\sqrt{|x^2-1|}$$

substituce: $x^2-1=s$, $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}s = -s = -\ln|\cos x|$$

substituce: $\ln|\cos x| = s$, $\dfrac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s = -\int s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = -\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{s} = -2\sqrt{2+\cos x}$$

substituce: $2+\cos x = s$, $-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{s+1}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s = \int \left(s^{\frac{1}{2}}+s^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}s = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}s^{\frac{1}{2}}(s+3) =$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}(\mathrm{e}^x+2)$$

substituce: $\mathrm{e}^x-1=s$, $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^3 \mathrm{e}^x - 3 \int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} u &= x^3 & u' &= 3x^2 \\ v' &= \mathrm{e}^x & v &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^3 \mathrm{e}^x - 3 \int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x\right) =$$
$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}$$

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

$$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^2 \qquad v = \tfrac{1}{3}x^3$$

Příklady

$$\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$u = \ln x \qquad u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = x^2 \qquad v = \tfrac{1}{3}x^3$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin\ln x \, \mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - e^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) e^x$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sin \ln x & u' = \dfrac{1}{x}\cos \ln x \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} u &= \sin\ln x & u' &= \frac{1}{x}\cos\ln x \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin\ln x \,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$u = \cos\ln x \qquad u' = -\frac{1}{x}\sin\ln x$$

$$v' = 1 \qquad v = x$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x\right) = x\sin\ln x - x\cos\ln x - I$$

$$\begin{aligned} u &= \cos\ln x & u' &= -\frac{1}{x}\sin\ln x \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$

Příklady

$$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x\right) =$$
$$= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$
$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x$$

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 = \tfrac{1}{9}x^3\left(\ln x^3 - 1\right)$$

$$I = \int \sin\ln x \, \mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x \, \mathrm{d}x =$$
$$= x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int \sin\ln x \, \mathrm{d}x\right) = x\sin\ln x - x\cos\ln x - I$$

Tedy $2I = x\sin\ln x - x\cos\ln x$, odtud $I = \frac{1}{2}x\left(\sin\ln x - \cos\ln x\right)$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

substituce: $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

substituce: $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Příklady

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int t e^t dt$$

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array}$$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\left(t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right) = 2(t-1)\mathrm{e}^t$$

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^t & v = \mathrm{e}^t \end{array}$$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\left(t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right) = 2(t-1)\mathrm{e}^t$$

substituce: $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Příklady

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = 2\left(t\mathrm{e}^{t} - \int \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right) = 2(t-1)\mathrm{e}^{t} = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

substituce: $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{t} & v = \mathrm{e}^{t} \end{array}$$

Určitý integrál a jeho užití

Definice a základní vlastnosti

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Definice a základní vlastnosti

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f *v mezích od* a *do* b je definován jako

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Definice a základní vlastnosti

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f *v mezích od* a *do* b je definován jako

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Označení: $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_{x=a}^{b}$

Definice a základní vlastnosti

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f *v mezích od* a *do* b je definován jako

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Označení: $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_{x=a}^{b} = \big[F(x)\big]_{a}^{b}$

Definice a základní vlastnosti

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f,

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Newtonův určitý integrál z funkce f *v mezích od* a *do* b je definován jako

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Označení: $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_{x=a}^b = \big[F(x)\big]_a^b$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Linearita vzhledem k integrované funkci:

Definice a základní vlastnosti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Linearita vzhledem k integrované funkci:

  aditivita: $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Definice a základní vlastnosti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Linearita vzhledem k integrované funkci:

  aditivita: $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

  homogenita: $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Definice a základní vlastnosti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Linearita vzhledem k integrované funkci:

  aditivita: $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

  homogenita: $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- Aditivita vzhledem k integračnímu oboru:

  $c \in \langle a, b\rangle \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- Integrace „per partes" pro určité integrály:
  $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Definice a základní vlastnosti

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- Integrace „per partes“ pro určité integrály:
  $\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
- Substituční metoda pro určité integrály:
  $\int\limits_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\mathrm{d}s$

  substituce: $\varphi(x) = s$, $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

Definice a základní vlastnosti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

- Integrace „per partes“ pro určité integrály:
$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

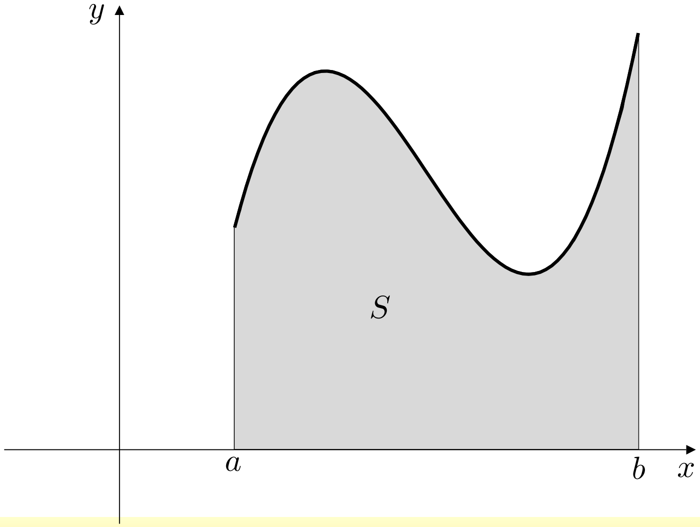
- Substituční metoda pro určité integrály:
$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\mathrm{d}s$

  substituce: $\varphi(x) = s$, $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

  $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\mathrm{d}s$

  substituce: $x = \varphi(s)$, tj. $\varphi^{-1}(x) = s$, $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$

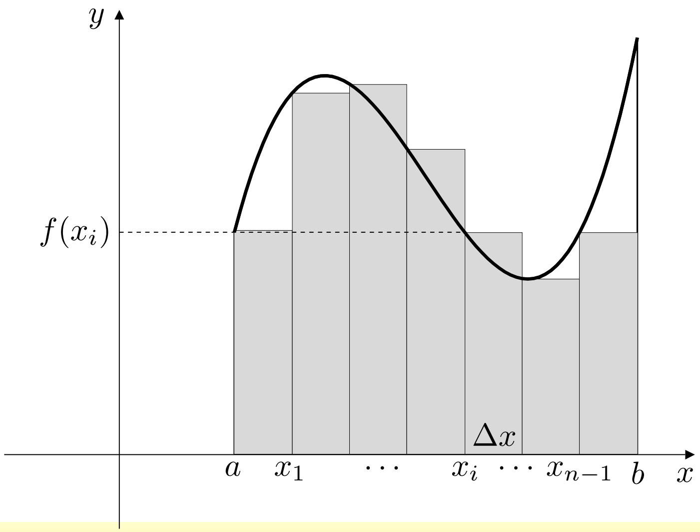
Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

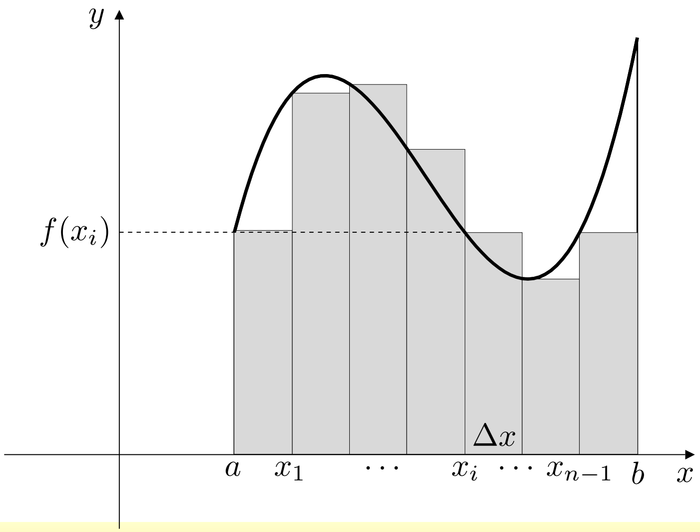


Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x,$$

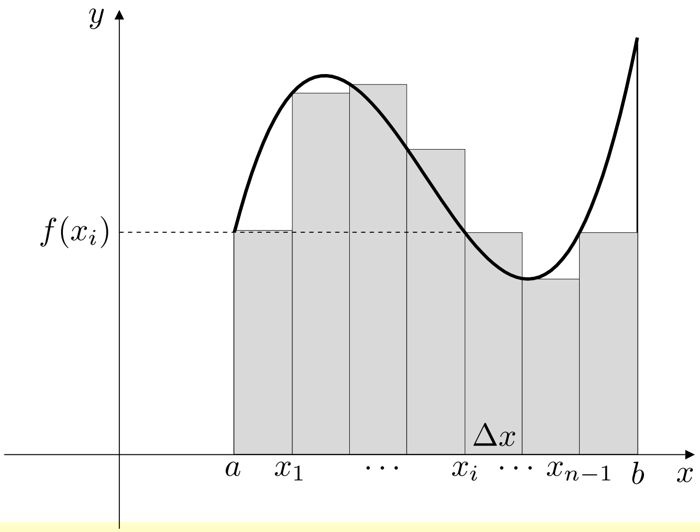


Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

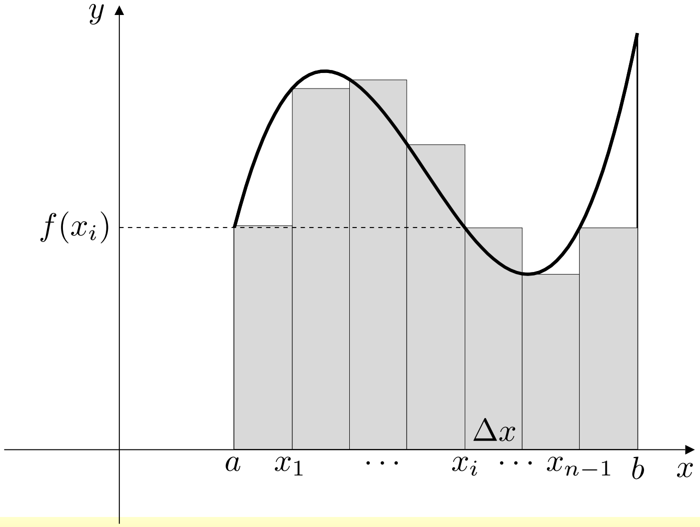


Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pak je

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady:

Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a.

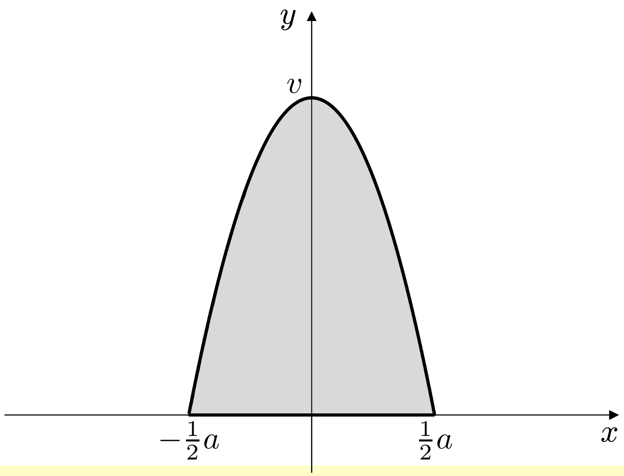
Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a.

$f(x) = v\left(1 - \dfrac{4}{a^2}x^2\right)$



Obsah obrazce

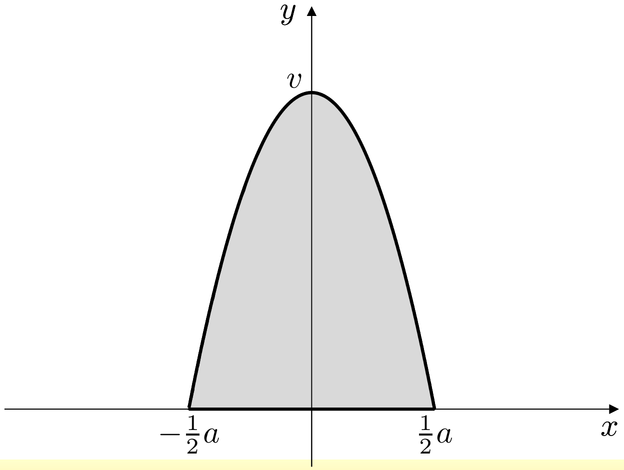
Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a.

$$f(x) = v\left(1 - \frac{4}{a^2}x^2\right)$$

$$S = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v\left(1 - \frac{4}{a^2}x^2\right)\mathrm{d}x$$



Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah parabolické úseče, která má výšku v a délku základny a.

$f(x) = v\left(1 - \frac{4}{a^2}x^2\right)$

$$S = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v\left(1 - \frac{4}{a^2}x^2\right)\mathrm{d}x = v\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x - \frac{4v}{a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\mathrm{d}x = v\left[x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - \frac{4v}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= v\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) - \frac{4v}{a^2}\left(\frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{24}\right) = \frac{2}{3}va$$

Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

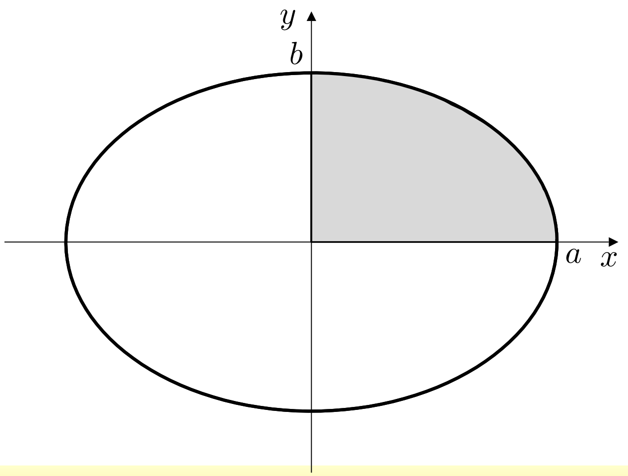
Příklady: Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b.

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

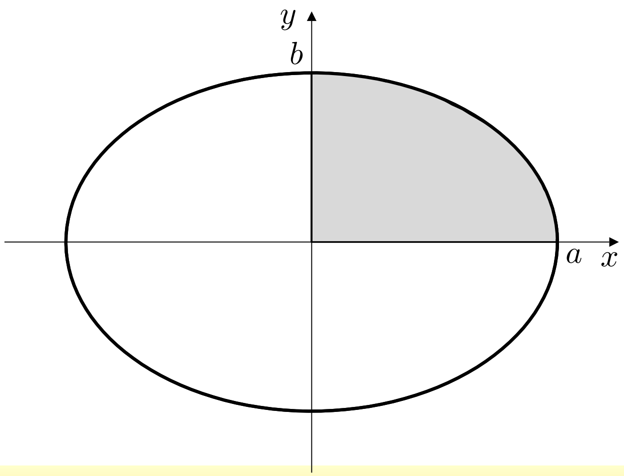


Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



Obsah obrazce

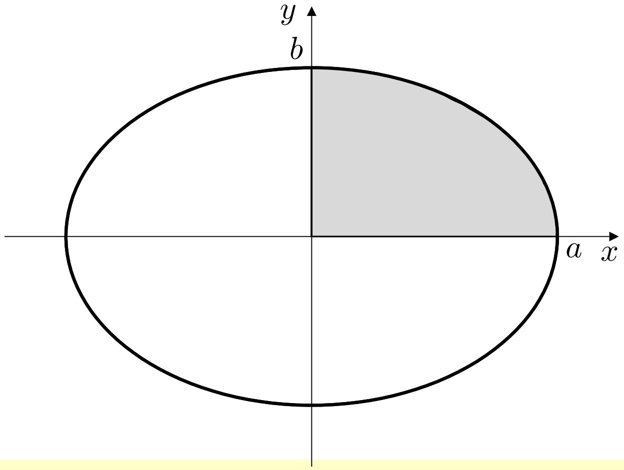
Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$S = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \to \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$



Obsah obrazce

Obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a grafem spojité funkce f definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Příklady: Vypočítejte obsah elipsy s poloosami a a b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

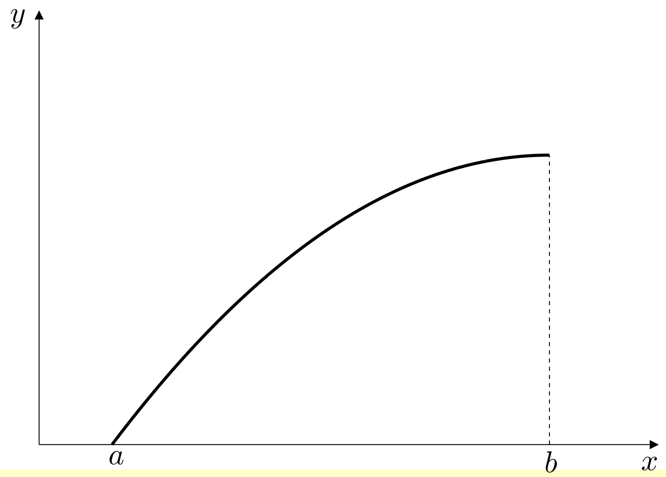
$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\cos s)^2 \mathrm{d}s = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2}\mathrm{d}s =$$

$$= 2ab\left[s + \frac{\sin 2s}{2}\right]_{s=0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

substituce: $x = a\sin s$, $\mathrm{d}x = a\cos s\,\mathrm{d}s$, $\quad a^2 - x^2 = a^2\big(1 - (\sin s)^2\big) = a^2(\cos s)^2$

Délka rovinné křivky

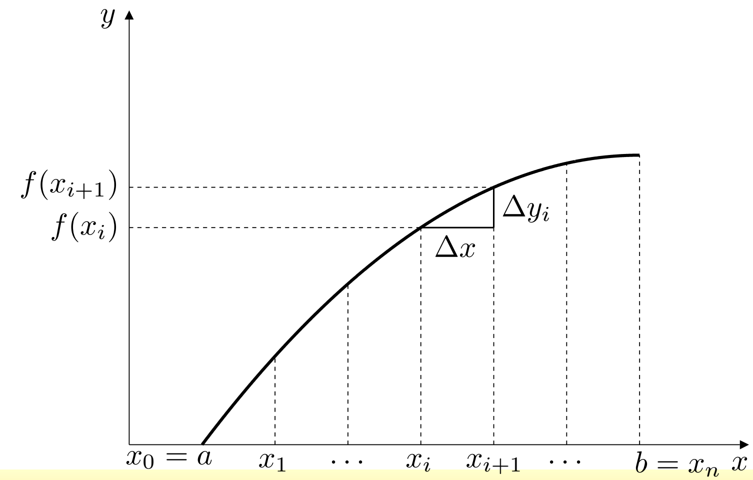
Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.



Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$,
$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.



Délka rovinné křivky

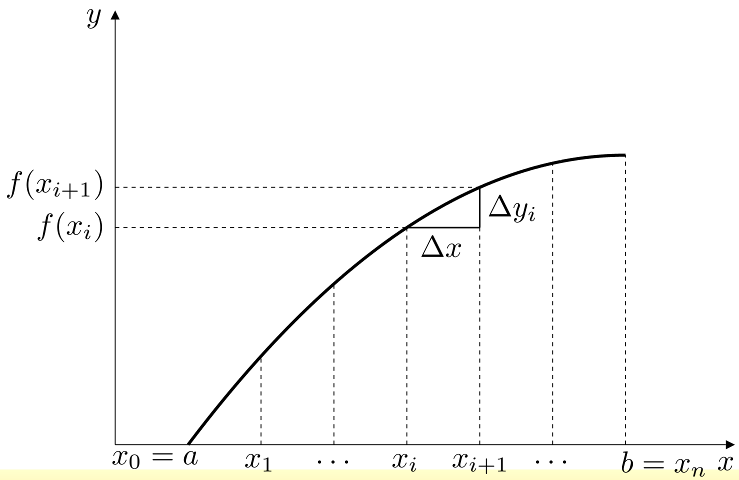
Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$,
$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pak je

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i)$, tedy $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x} \approx f'(x_i)$

$$\ell \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2}\,\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$



Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$n \in \mathbb{N}$, položíme $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$,
$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak je

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i)$, tedy $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x} \approx f'(x_i)$

$$\ell \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$, tedy

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Její délka je dána integrálem

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Příklad:

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $\left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $\left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

$$\ell = 4 \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x$$

Délka rovinné křivky

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $(f'(x))^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

$$\ell = 4 \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 4 \int\limits_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \mathrm{d}x$$

substituce: $x = r \sin s$, $\mathrm{d}x = r \cos s \, \mathrm{d}s$

Křivka je grafem spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte délku kružnice o poloměru r.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $\left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

$$\ell = 4 \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 4 \int\limits_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \mathrm{d}x = 4r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos s}{r\sqrt{1 - (\sin s)^2}} \mathrm{d}s =$$

$$= 4r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}s = 4r\tfrac{\pi}{2} = 2\pi r$$

substituce: $x = r \sin s$, $\mathrm{d}x = r \cos s \, \mathrm{d}s$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n-tou rovinou.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n-tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i-tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n-tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i-tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i-1)$-ní a i-tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n-tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i-tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i-1)$-ní a i-tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Pro objem tělesa tedy platí: $V \approx \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

Těleso umístěné v souřadné soustavě.
Uvažujeme jeho řezy rovinami kolmými k ose x, které jsou od sebe vzdáleny o Δx.

Nechť roviny protínají osu x v bodech $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.
Přitom $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, celé těleso se nachází mezi 0-tou a n-tou rovinou.

Obsah řezu (průniku) tělesa i-tou rovinou označíme $S(x_i)$.

Objem (tenké) vrstvy tělesa mezi $(i-1)$-ní a i-tou rovinou je přibližně roven $S(x_i)\Delta x$.

Pro objem tělesa tedy platí: $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c.
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1.$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x: $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c.
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1.$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x: $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

$S(x) = \pi bc \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem trojosého elipsoidu s poloosami a, b, c.
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1.$

Obvodová křivka řezu rovinou kolmou k ose x: $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$, tj.

$$\frac{y^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} + \frac{z^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) c^2} = 1$$

$S(x) = \pi bc \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$

$V = 2\int\limits_0^a \pi bc \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x = 2\pi bc \left[x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi bc \left(a - \dfrac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Speciální případ: těleso vzniklé rotací „podgrafu“ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ kolem osy x.
$S(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$, tj.

$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

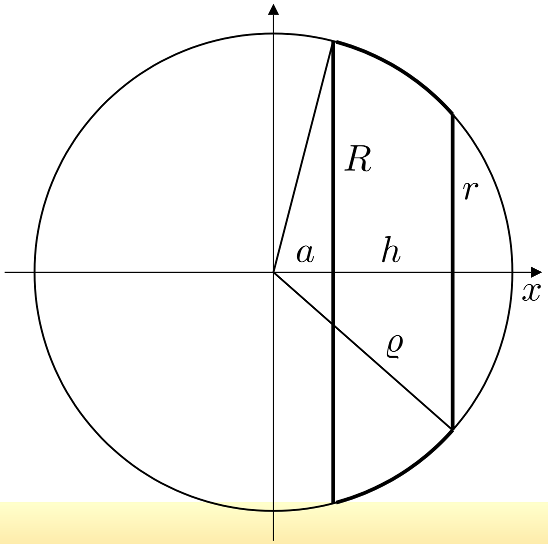
Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$



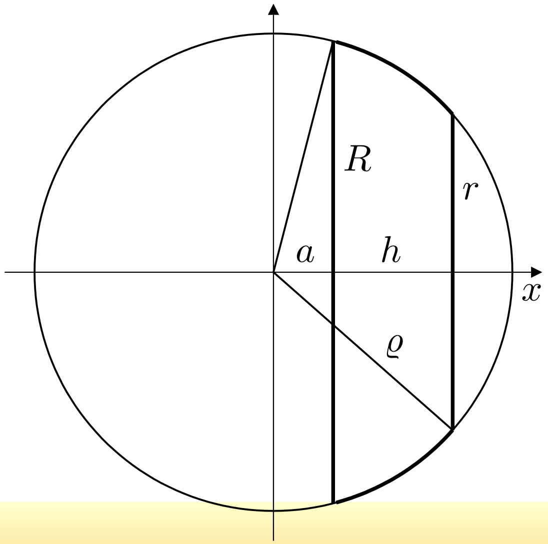
Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \left[x\right]_a^{a+h} - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$



Objem tělesa (exhaustivní metoda)

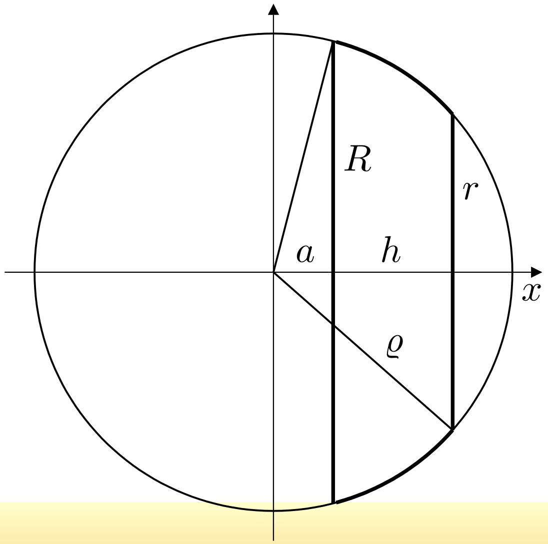
$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \left[x\right]_a^{a+h} - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned}\right\}$$



Objem tělesa (exhaustivní metoda)

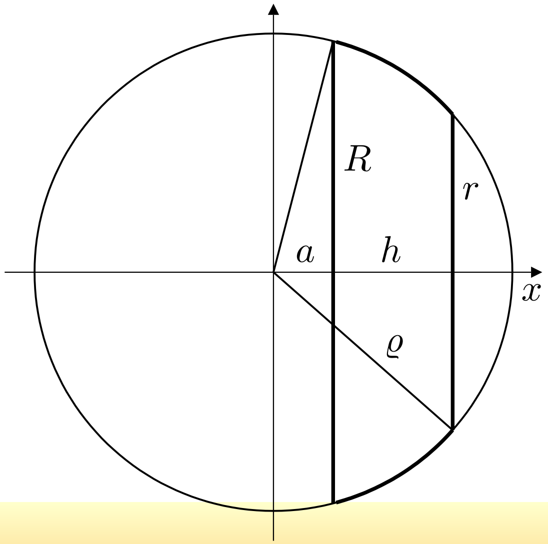
$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \left[x\right]_a^{a+h} - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned}\right\} \quad \to \quad 2ah + h^2 = R^2 - r^2$$



Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \left[x\right]_a^{a+h} - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\[2ex] \varrho^2 = \dfrac{\left(R^2 - r^2 - h^2\right)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}$$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \big[x\big]_a^{a+h} - \big[\tfrac{1}{3}x^3\big]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned}\right\} \quad \to \quad 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \quad \to \quad \begin{cases} a = \dfrac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\ \varrho^2 = \dfrac{\big(R^2 - r^2 - h^2\big)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}$$

Celkem: $V = \frac{1}{6}\pi h\big(3(R^2 + r^2) + h^2\big)$

Objem tělesa (exhaustivní metoda)

$$V = \pi \int\limits_0^b \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$

Příklad: Vypočítejte objem kulové vrstvy tloušťky h s poloměry podstav R a r.

$$V = \pi \int\limits_a^{a+h} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\varrho^2 \big[x\big]_a^{a+h} - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^{a+h}\right) =$$

$$= \pi \left(\varrho^2 h - \tfrac{1}{3}(3a^2h + 3ah^2 + h^3)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ (a+h)^2 &= \varrho^2 - r^2 \end{aligned}\right\} \quad \to \quad 2ah + h^2 = R^2 - r^2 \quad \to \quad \begin{cases} a = \dfrac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \\ \varrho^2 = \dfrac{\left(R^2 - r^2 - h^2\right)^2}{4h^2} + R^2 \end{cases}$$

Celkem: $V = \frac{1}{6}\pi h\big(3(R^2 + r^2) + h^2\big)$

Specielně – Kulová úseč ($r = 0$): $V = \frac{1}{6}\pi h\big(3R^2 + h^2\big)$

Polokoule ($r = 0,\ h = R$): $V = \frac{2}{3}\pi R^3$

Nevlastní integrál

Integrál na neomezeném intervalu

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$:

Integrál na neomezeném intervalu

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$: $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Integrál na neomezeném intervalu

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$: $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Funkce f spojitá na intervalu $(-\infty, b\rangle$: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Integrál na neomezeném intervalu

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$: $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Funkce f spojitá na intervalu $(-\infty, b\rangle$: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Funkce f spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x,$$

pokud obě limity existují a jsou vlastní.

Integrál na neomezeném intervalu

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$: $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Funkce f spojitá na intervalu $(-\infty, b\rangle$: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Funkce f spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x,$$

pokud obě limity existují a jsou vlastní.

Říkáme, že *nevlastní integrál konverguje.*

Příklady:

Příklady:

$$\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

Integrál na neomezeném intervalu

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b$$

Příklady:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-b} + 1\right)$$

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$a > 1, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$a > 1, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^a}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-a}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{a-1}} - 1\right) = \frac{1}{a-1}$$

Příklady:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$$

Integrál na neomezeném intervalu

Příklady:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$ nekonverguje

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Integrál z neohraničené funkce

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b)$ a neohraničená:

Integrál z neohraničené funkce

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b)$ a neohraničená:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x \quad \text{pokud tato limita existuje a je vlastní.}$$

Integrál z neohraničené funkce

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b)$ a neohraničená:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x \quad \text{pokud tato limita existuje a je vlastní.}$$

Funkce f spojitá na intervalu $(a, b\rangle$ a neohraničená:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a} \int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{pokud tato limita existuje a je vlastní.}$$

Integrál z neohraničené funkce

Funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b)$ a neohraničená:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b}\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x \quad \text{pokud tato limita existuje a je vlastní.}$$

Bod b se nazývá *singularita funkce* f.

Funkce f spojitá na intervalu $(a, b\rangle$ a neohraničená:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to a}\int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{pokud tato limita existuje a je vlastní.}$$

Bod a se nazývá *singularita funkce* f.

Říkáme, že *nevlastní integrál konverguje.*

Příklady:

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^{\beta} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^{\beta} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1} \ln x \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\Big[x(\ln x - 1)\Big]_\alpha^1$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\left[x(\ln x - 1)\right]_\alpha^1 = -1 - \lim_{\alpha\to 0}\alpha(\ln\alpha - 1)$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\big[x(\ln x - 1)\big]_\alpha^1 = -1 - \lim_{\alpha\to 0}\alpha(\ln\alpha - 1) =$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0} x\ln x$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\left[x(\ln x - 1)\right]_\alpha^1 = -1 - \lim_{\alpha\to 0}\alpha(\ln\alpha - 1) =$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0} x\ln x = -1 - \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\left[x(\ln x - 1)\right]_\alpha^1 = -1 - \lim_{\alpha\to 0}\alpha(\ln\alpha - 1) =$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0} x\ln x = -1 - \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -1 - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Příklady:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 1}\left[\arcsin x\right]_0^\beta =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\left[x(\ln x - 1)\right]_\alpha^1 = -1 - \lim_{\alpha\to 0}\alpha(\ln\alpha - 1) =$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0} x\ln x = -1 - \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -1 - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$