

1. cvičení z M1035, podzim 2021

Příklad 1. Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

- (1) Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitelná třemi.
- (2) Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
- (3) Množinu všech reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
- (4) Množinu všech reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
- (5) Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
- (6) Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
- (7) Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Příklad 2. Uvažujme lineární funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$f(x) = -3x + 7.$$

- (1) Nakreslete její graf.
- (2) Zjistěte pro které argumenty x je hodnota $f(x)$ menší než 11 a větší než -7 .
- (3) Existuje k f inverzní funkce? Pokud ano, najděte ji.

Příklad 3. Nakreslete postupně grafy funkcí s absolutní hodnotou:

$$y = |x|, \quad y = |-3x|, \quad y = |x - 2|, \quad y = |-3(x + 7)|, \quad y = 3 - |7 - 4x|.$$

Na kterých intervalech jsou rostoucí a na kterých klesající. Jsou tyto funkce ohraničené zdola nebo shora?

Příklad 4. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = |x + 1| - |x| + 2|x - 2|$$

a zjistěte,

- (1) na kterých intervalech je f prostá,
- (2) jaký je její obor hodnot,
- (3) pro která x nabývá hodnoty 2.

Příklad 5. Necht' f je nějaká funkce s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R} - \{2021\}$. Necht' $g(x) = x - 3$ a $h(x) = x + 5$.

- (1) Jaký je definiční obor složených funkcí $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ a $(f \circ h)(x) = f(h(x))$.
- (2) Máme-li graf funkce f , jak dostaneme grafy funkcí $f \circ g$ a $f \circ h$?
- (3) Je-li f rostoucí na $(-\infty, 2021)$ a klesající na $(2021, \infty)$, kde jsou rostoucí a klesající funkce složené?

Příklad 6. Uvažujme funkce

$$f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{5}{3-x}.$$

- (1) Zjistěte jejich definiční obory, obory hodnot a nakreslete jejich grafy.
- (2) Zjistěte, zda jsou tyto funkce prosté. Pokud ano, najděte inverzní funkce.

(3) Spočítejte složenou funkci $f \circ g$, najděte její definiční obor, obor hodnot a graf.

Příklad. 7. Uvažujme kvadratickou funkci

$$f(x) = -2x^2 + 7x - 4.$$

- (1) Načrtněte, jak přibližně vypadá její graf.
- (2) Zjistěte, na kterých intervalech je rostoucí a na kterých klesající.
- (3) Najděte její obor hodnot.
- (4) Na intervalu, kde je klesající, k ní najděte inverzní funkci.

Příklad. 8. Řešte v \mathbb{R} kvadratickou rovnici s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + 2x + 1 = 0.$$

Příklad. 9. Nakreslete grafy složených funkcí $h \circ f$ a $f \circ h$, jestliže

$$f(x) = x^2 + x - 1, \quad h(x) = |x|.$$

Příklad. 10. Řešte v \mathbb{R} nerovnici

$$|x^2 - 2x - 3| \leq 3(x - 1).$$