

## 8. cvičení z M1035, podzim 2021

V pondělní skupině jsme z příkladu 1 udělali a), b), f) a j) a z příkladu 2 části a) až e).

**Příklad 1.** Pomocí vhodné úpravy převed'te na známou limitu

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_z(x+1)}{x}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{4 - 4 e^x}$ ,

d)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ ,

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x}{x}$ ,

h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ ,

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$ ,

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$ .

*Návod.* a) Vyjádřete  $\log_z$  pomocí  $\ln$  a použijte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ .

b) Vyjádřete  $a^x = e^{x \ln a}$  a použijte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

c) Napište  $e^x = (e^x - 1) + 1$  a použijte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

d) Použijte vzorec  $\cos 2x$ .

e) Udělejte záměnu  $x = \frac{1}{y}$  pro  $y \rightarrow \infty$  a použijte, že  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ .

f) Vyjádřete  $\cos x$  pomocí polovičního úhlu a funkce  $\sin$ .

g) Je jiná zprava a zleva.

h) Počítejte limitu  $\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ .

i) Použijte f) a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

j) Počítejte limitu  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$ . □

**Příklad 2.** Derivujte následující funkce:

a)  $f(x) = \sqrt[6]{x^7}$ , derivace mocniny,

b)  $f(x) = e^x \cos x$ , zopakovat derivaci součinu funkcí, derivaci  $e^x$  a derivaci  $\cos$  a  $\sin$ ,

c)  $f(x) = x^2 e^x - \arctan x$ , zopakovat derivaci součtu a rozdílu funkcí, derivaci podílu funkcí a spočítat derivaci  $\tan x$ , zopakovat derivaci inverzní funkce a spočítat derivaci  $\arctan x$  a  $\arcsin x$ ,

- d)  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ , spočítat derivaci ln jako derivaci inverzní funkce, zopakovat derivaci složené funkce,
- e)  $f(x) = \sin^3 x^2$ , napsat explicitně jako složení tří funkcí,
- f)  $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$ ,
- g)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

**Příklad. 3.** Některé z limit v příkladu 1 spočítejte podle l'Hospitalova pravidla. To na přednášce ještě nebylo. Je potřeba vysvětlit.

**Příklad. 4.** Spočítejte limity podle l'Hospitalova pravidla:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$

**Příklad. 5.** Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$ : (Je potřeba říci jak, na přednášce to ještě nebylo.)

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $x_0 = 1$ .
- b)  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $x_0 = 3$ .