14. cvičení z M1035, podzim 2021

V pondělí na cvičení jsme udělali úlohy 1, 2, 4 (a), (b), 5 (a), (c).

Příklad. 1. Uvažujme jednoduchou chemickou reakci $A + B \to C$. Koncentrace $z(t)$ látky C se v průběhu reakce postupně mění podle diferenciální rovnice

$$z' = k(z - a)(z - a), \quad z(0) = 0.$$

Vyřešte tuto rovnici a načrtněte graf funkce $z(t)$ pro $t \geq 0$.

Řešení. $z(t) = \frac{a^2kt}{akt+1}$ □

Příklad. 2. Logistická diferenciální rovnice pro růst populace je

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(0) = P_o.$$

Vyřešte ji a nakreslete křivky, které jsou jejími řešeními pro různé počáteční hodnoty. (Tato rovnice je modifikací rovnice $P' = kP$, která řílá, že když poúpulace dosáhne hodnoty K, přestane růst.)

Řešení. $P(t) = \frac{K}{1+A\,\mathrm{e}^{kt}}$, $A = \frac{K-P_o}{P_o}$. □

Příklad. 3. Zjistěte, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice:

a) $y(t) = \mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t}$, $y'' + 2y' + y = 0$,

b) $y(x) = \frac{1}{\sqrt{c-x^2}}$, $y' = xy^3$,

c) $y = \frac{1+C\,\mathrm{e}^t}{1-C\,\mathrm{e}^t}$, $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Příklad. 4. Řešte rovnice se separovanými proměnnými a v rovině se pokuste nakreslete grafy těchto řešení:

a) $2y - x^3y' = 0$. Všimněte si, že $y(x) \equiv 0$ je řešení.

b) $1 + y^2 + xyy' = 0$,

c) $xyy' = 1 - x^2$,

Řešení. (a) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$
(b) $C = (y^2 + 1)x^2$
(c) $y^2 = -x^2 + 2\ln|x| + C$ □

Příklad. 5. Řešte dané počáteční úlohy:

a) $xy' + y = y^2$, $y(-1) = \frac{1}{2}$. Všimněte si, že $y(x) \equiv 0$ a $y(x) \equiv 1$ jsou řešení a že pro $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = 1$ může být derivace $y'(0)$ jakákoliv.

b) $\sin y \cos x \, dy = \cos y \sin x \, dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$,

c) $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$, $y(0) = 0$.

Řešení. (a) $y = \frac{1}{1-x}$.
(b) $\sqrt{2}\cos y = \cos x$.
(c) $y^2 = \ln(\frac{\mathrm{e}^x + 1}{2})$. $\square$

Příklad. **6.** Spočtěte nevlastní integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$,

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$,

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|$,

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$,

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin x$.