6. cvičení z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. Nakreslete grafy funkcí a určete periodu těchto funkcí.

a) $f(x) = \sin(3x) - 4$,
b) $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2}) + 1$,
c) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$,
d) $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$,
e) $f(x) = \cot(\frac{x}{3})$.

Příklad. 2. Určete definiční obor, obor hodnot a nakreslete grafy funkcí

a) $f(x) = \arcsin x$.
b) $f(x) = \arcsin x + 2\pi$. Co je inverzní funkce?
c) $f(x) = \pi - \arcsin x$. Co je inverzní funkce?
d) $f(x) = \arccos x + 4\pi$. Co je inverzní funkce?
d) $f(x) = \pi - \arccos x$. Co je inverzní funkce?
e) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.
f) $f(x) = \arctan x + 3\pi$. Co je inverzní funkce?
g) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Co je inverzní funkce?
h) $f(x) = \arccos(\frac{x}{2})$. Co je inverzní funkce?

~~**Příklad. 3.**~~ Pro komplexní číslo $z = a + \mathrm{i}\, b$ definujeme hodnotu expenenciály $\exp^z = \mathrm{e}^z$ takto:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}\, b} = \mathrm{e}^a \cdot (\cos b + \mathrm{i} \sin b).$$

Pomocí součtových vzorců dokažte, že všechna komplexní čísla z_1, z_2 platí

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}\,.$$

Příklad. 4. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice:

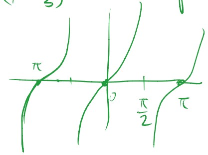
a) $\sin 2x = \sin x$,
b) $\cos 3x + \sin 3x = 0$,
c) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$,
d) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$,
e) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$,
f) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

Řešení. (a) Použijte vzorec pro dvojnásobný úhel.
(b) Vzpomeňte si na tangens.
(c) Vydělte dvěma a vzpomeňte si na součtové vzorce.
(d) Použijte vzorec pro rozdíl sinů.
(e) Převeďte na kvadratickou rovnici.
(f) Použijte vhodný vzorec. (Součet sinů.) $\square$

6-1-d :

Nakresli graf $\tan(x+\frac{\pi}{3})$ a urči periodu :

$\tan(x)$: $=$ $tg(x)$



perioda $tg(x)$ je π

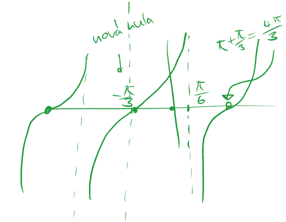
$x \rightsquigarrow x+\frac{\pi}{3}$

"posun doleva o $\frac{\pi}{3}$"

$\Downarrow$

perioda se nemění

$\tan(x+\frac{\pi}{3})$:



perioda $tg(x+\frac{\pi}{3})$ je π

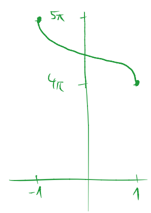
6-2-d :

Urči D_f, H_f a graf funkce $f(x) = \arccos(x) + 4\pi$, pak najdi inverzní funkci :

$g = \cos(x)$ má $H_g = [-1,1] \rightsquigarrow D_f = [-1,1]$

$H_{\arccos}(x) = [0,\pi] \Rightarrow H_{\arccos(x)+4\pi} = [4\pi, 5\pi]$

graf



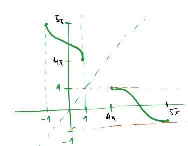
Inverzní funkce

$y = \arccos(x) + 4\pi$

$y - 4\pi = \arccos(x)$

$\cos(y-4\pi) = x \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \cos(y-4\pi)$

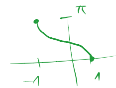
definováno na $[4\pi, 5\pi]$



$\boxed{6-2-h:}$

$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\arccos(x)$:

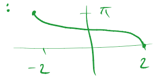


za x nahraď $\frac{x}{2}$

$\Downarrow$

$2\times$ roztáhni do stran

$\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$:



z grafu vidíme $H_f = [0, \pi]$ a $D_f = [-2, 2]$

inverze: $y = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos y = \frac{x}{2}$

$x = 2\cos y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = 2\cos y$, f^{-1} definována pouze na $[0, \pi]$

Příklad. 0. Najděte inv. funkci k $f(x) = \ln(2(x-1)^3)$

7. cvičení z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. Vypočtěte následující limity, případně limity zleva a zprava v hraničních bodech definičních oborů:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2+x-30}$, $a = 5, 6, \infty. -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$, $a = -2, \infty. -\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, $a = -2, \infty, -\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3+x^2+8}{6x^3+12}$, $a = -\sqrt[3]{2}, \infty, -\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x}{x^2-1}$, $a = 1, -1, \infty, -\infty.$

Příklad. 2. Pomocí vhodné úpravy převeďte na známou limitu

Nápověda: $\log_z(x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln z}$ a víme: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_z(x+1)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{\sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{4-4\,\mathrm{e}^x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x+x}{x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0+} (\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

$\boxed{7-0:}$ Najdi inverzi k $f(x) = \ln(2(x-1)^3)$

- rychlý způsob – dělám opačné věci v opačném pořadí

$$x \xrightarrow{-1} x-1 \xrightarrow{(\,)^3} (x-1)^3 \xrightarrow{\cdot 2} 2(x-1)^3 \xrightarrow{\ln(\,)} \ln(2(x-1)^3)$$

$$\sqrt[3]{\frac{e^y}{2}}+1 \xleftarrow{+1} \sqrt[3]{\frac{e^y}{2}} \xleftarrow{\sqrt[3]{\,}} \frac{e^y}{2} \xleftarrow{:2} e^y \xleftarrow{e^{(\,)}} y$$

- formálněji

$$\ln(2(x-1)^3) = y$$

$$\cancel{e^{\ln}}(2(x-1)^3) = e^y$$

$$2(x-1)^3 = e^y$$

$$(x-1)^3 = \frac{e^y}{2}$$

$$x-1 = \sqrt[3]{\frac{e^y}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{e^y}{2}} + 1 \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{e^y}{2}} + 1$$

... proč se naše proměnná najednou jmenuje y?

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{e^x}{2}} + 1 \quad \checkmark$$

$\boxed{7-1-a}$

- $\lim_{x\to 5} \underbrace{\frac{x^2-7x+10}{x^2+x-30}}_{f(x)} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x+6)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-2}{x+6} = \frac{5-2}{5+6} = \frac{3}{11}$

- $\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{x\to 6} \frac{x-2}{x+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

zajímavější je $x\to -6$, neboť $D_f = \mathbb{R} - \{5, -6\}$

- $\lim_{x\to -6} f(x) = \lim_{x\to -6} \frac{x-2}{x+6} = \text{"}\frac{-8}{0}\text{"} = ?$

Musíme vyzkoušet 2 případy:

A) $\lim_{x\to -6^-} f(x) = \lim_{x\to -6^-} \frac{x-2}{x+6} = \text{"}\frac{-6^- - 2}{-6^- + 6}\text{"} = \text{"}\frac{-8^-}{0^-}\text{"} = +\infty$

-6^-: $-6{,}0\ldots01$; $-6{,}0\ldots01 - 2 = -8{,}0\ldots01$; $-6{,}0\ldots01 + 6 = -0{,}0\ldots01$

B) $\lim_{x\to -6^+} f(x) = \lim_{x\to -6^+} \frac{x-2}{x+6} = \text{"}\frac{-6^+ - 2}{-6^+ + 6}\text{"} = \text{"}\frac{-8^+}{0^+}\text{"} = -\infty$

-6^+: $-5{,}9\ldots9$; $-5{,}9\ldots9 - 2 = -7{,}9\ldots9$; $-5{,}9\ldots9 + 6 = 0{,}0\ldots01$

$\lim_{x\to -6^-} f(x) \neq \lim_{x\to -6^+} f(x)$

proto $\lim_{x\to -6} f(x)$ neexistuje

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+6} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$?

Neformálně: …Tady je ale jasné, že pro $x = 1\,000\,000$ $\frac{1\,000\,000 - \cancel{2}}{1\,000\,000 + \cancel{6}} \approx 1$ … 2 a 6 jsou zanedbatelně malé oproti velkým x $\Big\}$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Formálně: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}} = \text{"}\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{6}{\infty}}\text{"} = \text{"}\frac{1-0}{1+0}\text{"} = 1$

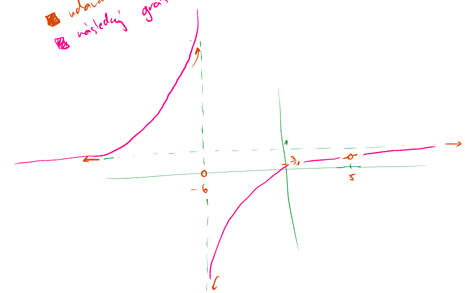
($\lim \frac{2}{x} \to 0$, $\lim \frac{6}{x} \to 0$)

obdobně
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}} = 1$

zkusme z těchto informací poskládat graf f(x):

■ udává informace z limit

■ následný graf



7-1-b:

$$f(x) = \frac{3x+6}{x^3+8}$$

- $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{3}{x^2-2x+4} \overset{\text{dosazení } -2}{=} \frac{3}{4+4+4} = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2-2x+4} = \text{"}\frac{3}{\infty - \infty + 4}\text{"} \ldots ?$

Neformálně: $x = 1\,000\,000$, $\frac{3}{1\,000\,000\,000\,000 \underbrace{- 2\cdot 1\,000\,000 + 4}_{\text{nepodstatné vzhledem k}}} \approx \text{"}\frac{3}{\infty}\text{"} = 0$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})} = \text{"}\frac{3}{\infty}\text{"} = 0$

Formálně:

$= \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})} = \text{"}\frac{3}{\infty\cdot(1-0+0)}\text{"} = \text{"}\frac{3}{\infty}\text{"} = 0$

7-1-c

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} = \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x+6}+2} = \frac{x+6-4}{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{x-2}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+6}+2}$$

- $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{\sqrt{x+6}+2} = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x+6}} - \frac{2}{x+6}\right)}{\underbrace{\frac{x+2}{x+6}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1}} = \frac{0-0}{1} = 0$

Neformálně: x roste rychleji než $\sqrt{x}$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}$ X … $D_f = [-6, \infty] - \{-2\}$

$\to$ můžeme spočítat aspoň $\lim\limits_{x\to -6^+} f(x) = \text{"}\frac{0^+-2}{-4^+}\text{"} = 2$

7-1-e

$\frac{x}{x^2-1}$ není definovaná v 1 a −1, podíváme se na limity v těchto bodech z obou stran

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \text{"}\frac{1^+}{1^+-1}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \text{"}\frac{1^+}{1^--1}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \text{"}\frac{-1^+}{1^--1}\text{"} = \text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"} = \infty$

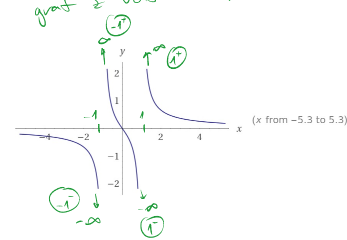
$\hookrightarrow -0{,}999 \to (-0{,}999\ldots)^2 = 0{,}999$

- $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \text{"}\frac{-1^-}{1^+-1}\text{"} = \text{"}\frac{-1}{0^+}\text{"} = -\infty$

$\hookrightarrow -1{,}0\ldots01$

$-1{,}0\ldots01^2 = 1{,}0\ldots\ldots01$

graf z Wolframu:



$\boxed{7-2-a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_z(x+1)}{x}.$$

využijeme známé limity

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1,}$$

pravidla $\log_z(x+1)=\boxed{\frac{\ln x+1}{\ln z}}$

a přeznačíme si proměnnou $\boxed{y=x+1}$ ⇝ potom $\underline{\lim_{x\to 0}}$ můžeme nahradit $\lim_{x+1\to 1} \approx \underline{\lim_{y\to 1}}$

a $x=y-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_z(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{\ln z}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{x}\cdot\frac{1}{\ln z}=\lim_{y\to 1}\underbrace{\frac{\ln y}{y-1}}_{1}\cdot\frac{1}{\ln z}=\frac{1}{\ln z}$$