6. cvičení z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. Nakreslete grafy funkcí a určete periodu těchto funkcí.

a) $f(x) = \sin(3x) - 4$,
b) $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2}) + 1$,
c) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$,
d) $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$,
e) $f(x) = \cot(\frac{x}{3})$.

Příklad. 2. Určete definiční obor, obor hodnot a nakreslete grafy funkcí

a) $f(x) = \arcsin x$.
b) $f(x) = \arcsin x + 2\pi$. Co je inverzní funkce?
c) $f(x) = \pi - \arcsin x$. Co je inverzní funkce?
d) $f(x) = \arccos x + 4\pi$. Co je inverzní funkce?
d) $f(x) = \pi - \arccos x$. Co je inverzní funkce?
e) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.
f) $f(x) = \arctan x + 3\pi$. Co je inverzní funkce?
g) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Co je inverzní funkce?
h) $f(x) = \arccos(\frac{x}{2})$. Co je inverzní funkce?

~~**Příklad. 3.**~~ Pro komplexní číslo $z = a + \mathrm{i}\, b$ definujeme hodnotu expenenciály $\exp^z = \mathrm{e}^z$ takto:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}\, b} = \mathrm{e}^a \cdot (\cos b + \mathrm{i} \sin b).$$

Pomocí součtových vzorců dokažte, že všechna komplexní čísla z_1, z_2 platí

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}.$$

Příklad. 4. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice:

a) $\sin 2x = \sin x$,
b) $\cos 3x + \sin 3x = 0$,
c) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$,
d) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$,
e) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$,
f) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

Řešení. (a) Použijte vzorec pro dvojnásobný úhel.
(b) Vzpomeňte si na tangens.
(c) Vydělte dvěma a vzpomeňte si na součtové vzorce.
(d) Použijte vzorec pro rozdíl sinů.
(e) Převeďte na kvadratickou rovnici.
(f) Použijte vhodný vzorec. (Součet sinů.) □

Příklad. 0. Najděte inv. funkci k $f(x) = \ln(2(x-1)^3)$

7. cvičení z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. Vypočtěte následující limity, případně limity zleva a zprava v hraničních bodech definičních oborů:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2+x-30}$, $a = 5, 6, \infty. -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$, $a = -2, \infty. -\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, $a = -2, \infty, -\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3+x^2+8}{6x^3+12}$, $a = -\sqrt[3]{2}, \infty, -\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x}{x^2-1}$, $a = 1, -1, \infty, -\infty.$

Příklad. 2. Pomocí vhodné úpravy převeďte na známou limitu

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_z(x+1)}{x}$.

Nápověda: $\log_z(x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln z}$ a víme: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{\sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{4-4\,\mathrm{e}^x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x+x}{x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0+} (\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.