

## A. Písemka v semestru z M1035, podzim 2021

**Příklad 1.** [ 3 body] Uvažujme funkci  $f(x) = |x - 2| - |2x + 3| + 1$ .

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci  $f$  jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce  $f$  na intervalu  $[-5, 5]$ . [1 bod]

*Řešení.* Na  $(-\infty, -3/2]$  je  $f(x) = x + 6$ , na  $[-3/2, 2]$  je  $f(x) = -3x$ , na  $[2, \infty)$  je  $f(x) = -x - 4$ . Graf funkce na intervalu  $[-5, 5]$  dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> `plot |x-2|-|2x+3|+1 from -5 to 5`

□

**Příklad 2.** [3 body] Racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{4x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 9}{2x^3 + 5x^2 + 3x + 2}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a parciálních zlomků.

*Řešení.*

$$R(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x + 2} + \frac{3x - 2}{2x^2 + x + 1}$$

□

**Příklad 3.** [3 body] Uvažujme funkci

$$f(x) = \log_2(x - 3).$$

- Napište její definiční obor, obor hodnot a její hodnotu ve třech bodech a načrtněte její graf na vhodně velkém intervalu . [1 bod]
- Najděte k funkci  $f(x)$  inverzní funkci  $g(y)$ , napište její předpis, definiční obor, obor hodnot a spočítejte  $f(g(y))$ . [2 body]

*Řešení.* a)  $D(f) = (3, \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty, \infty)$ ,  $f(4) = 0$ ,  $f(5) = 1$ ,  $f(7) = 2$ . Její graf na intervalu  $[0, 9]$  najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li `plot log2(x - 3) from 0 to 9`

b) Inverzní funkce je  $x = g(y)$  s definičním oborem  $D(g) = (-\infty, \infty)$  a oborem hodnot  $H(g) = (3, \infty)$  spočítáme takto: pro  $y \in (-\infty, \infty)$  řešíme rovnici

$$\begin{aligned}\log_2(x - 3) &= y \\ 2^{\log_2(x-3)} &= 2^y \\ x - 3 &= 2^y \\ x &= 2^y + 3.\end{aligned}$$

Tedy  $g(y) = 2^y + 3$ . Dále platí

$$f(g(y)) = \log_2((2^y + 3) - 3) = \log_2(2^y) = y.$$

□

**Příklad. 4.** [3 body] Uvažujme funkci

$$F(x) = 2 \arccos \frac{x-1}{3}.$$

- a) Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]  
 b) Načrtněte její graf. [1 bod]  
 c) Vyřešte rovnici

$$2 \arccos \frac{x-1}{3} = \frac{3}{2}\pi. \quad [1 \text{ bod}]$$

*Řešení.* a) Definiční obor získáme řešením nerovnic

$$-1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1.$$

Dostaneme  $D(F) = [-2, 4]$ . Obor hodnot je  $H(F) = [0, 2\pi]$ .

b) Její graf na intervalu  $[-2, 4]$  najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li `plot 2 ArcCos[Divide[x-1,3]]`

c) Řešíme rovnici

$$2 \arccos \frac{x-1}{3} = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\arccos \frac{x-1}{3} = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\frac{x-1}{3} = \cos \left( \frac{3}{4}\pi \right),$$

$$\frac{x-1}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x-1 = -\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

□