

B. Písemka v semestru z M1035, podzim 2021

Příklad 1. [3 body] Uvažujme funkci $h(x) = |x + 4| - |3x - 2| + 1$.

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci h jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce h na intervalu $[-6, 6]$. [1 bod]

Řešení. Na $(-\infty, -4]$ je $h(x) = 2x - 5$, na $[-4, 2/3]$ je $h(x) = 4x + 3$, na $[2/3, \infty)$ je $h(x) = -2x + 7$. Graf funkce na intervalu $[-6, 6]$ dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> `plot |x+4|-|3x-2|+1 from -6 to 6`

□

Příklad 2. [3 body] Racionální lomenou funkci

$$Q(x) = \frac{6x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 2x - 10}{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a parciálních zlomků.

Řešení.

$$Q(x) = 3x + 1 + \frac{2}{x - 2} + \frac{x + 5}{2x^2 - x + 1}$$

□

Příklad 3. [3 body] Uvažujme funkci

$$h(x) = \log_3(x + 5).$$

- Napište její definiční obor, obor hodnot a její hodnotu ve třech bodech a načrtněte její graf na vhodně velkém intervalu. [1 bod]
- Najděte k funkci $h(x)$ inverzní funkci $g(y)$, napište její předpis, definiční obor, obor hodnot a spočítejte $h(g(y))$. [2 body]

Řešení. a) $D(f) = (-5, \infty)$, $H(f) = (-\infty, \infty)$, $f(-4) = 0$, $f(-2) = 1$, $f(4) = 2$. Její graf na intervalu $[-6, 8]$ najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li

`plot log3(x + 5) from -6 to 8`

b) Inverzní funkce je $x = g(y)$ s definičním oborem $D(g) = (-\infty, \infty)$ a oborem hodnot $H(g) = (-5, \infty)$ spočítáme takto: pro $y \in (-\infty, \infty)$ řešíme rovnici

$$\begin{aligned}\log_3(x + 5) &= y \\ 3^{\log_3(x+5)} &= 3^y \\ x + 5 &= 3^y \\ x &= 3^y - 5.\end{aligned}$$

Tedy $g(y) = 3^y - 5$. Dále platí

$$h(g(y)) = \log_3((3^y - 5) + 5) = \log_3(3^y) = y.$$

□

Příklad. 4. [3 body] Uvažujme funkci

$$G(x) = 3 \arcsin \frac{x+1}{2}.$$

- a) Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]
 b) Načrtněte její graf. [1 bod]
 c) Vyřešte rovnici

$$3 \arcsin \frac{x+1}{2} = -\frac{3}{4}\pi. \quad [1 \text{ bod}]$$

Řešení. a) Definiční obor získáme řešením nerovnic

$$-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1.$$

Dostaneme $D(G) = [-3, 1]$. Obor hodnot je $H(G) = [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

b) Její graf na intervalu $[-3, 1]$ najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li `plot 3 ArcSin[Divide[x+1,2]]`

c) Řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 3 \arcsin \frac{x+1}{2} &= -\frac{3}{4}\pi, \\ \arccos \frac{x+1}{2} &= -\frac{1}{4}\pi, \\ \frac{x+1}{2} &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{x+1}{2} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x+1 &= -\sqrt{2}, \\ x &= -1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

□