M1035 3. přednáška

Racionální lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy. Jsou definovány na množině $\mathbb{R}$ s výjimkou množiny kořenů polynomu Q.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 0\}$$

Racionální lomenou funkci lze rozložit na součet jednodušších racionálních lomených funkcí. Pravidla pro tento rozklad si ukážeme na příkladech.

1. Je-li stupeň $P \geq$ stupeň Q lze psát

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}$$

kde $D(x)$ je stupně st P – st Q, je to částečný podíl po dělení $P(x)$ polynomem Q a $Z(x)$ stupně < stupeň Q je zbytek po tomto dělení.

$\boxed{\text{Příklad 1}}$ $$f(x) = \frac{x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 4}$$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3) : (x^2 + 2x + 4) = \underline{x^2 - 10x + 18} = D(x) \\
-(x^4 + 2x^3 + 4x^2) \\
\hline
\quad (-10x^3 - 2x^2 - 3) \\
\quad -(-10x^3 - 20x^2 - 40x) \\
\hline
\qquad (18x^2 + 40x - 3) \\
\qquad -(18x^2 + 36x + 72) \\
\hline
\qquad\qquad \underline{4x - 75} = Z(x)
\end{array}
$$

částečný podíl

zbytek

$$f(x) = x^2 - 10x + 18 + \frac{4x - 75}{x^2 + 2x + 4}$$

(2) Nechť $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde st $P <$ st Q.

Potom Q rozložíme na součin lineárních a kvadratických polynomů, např.

$$Q(x) = (x+2)^2 (x^2 + x + 5)^2$$

→ nemá reálný kořen

a racionální lomenou funkci $f(x)$ můžeme psát ve tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 5} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 5)^2}$$

Pro neznámé A až F získáme porovnáním koeficientů polynomu P a polynomu v čitateli na pravé straně po převedení na spol. jmenovatele.

Příklad 2

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax + 2A + B}{(x+2)^2}$$

Porovnáme koeficienty polynomů ve jmenovateli

$$3x + 1 = Ax + 2A + B$$

Tedy

$$A = 3$$
$$2A + B = 1$$

Odtud $B = 1 - 6 = -5$

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

Příklad 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + (A+2C)}{(x+2)(x^2+1)}$$

Porovnáním koeficientů dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{llcll} x^2: & A + B & & = 2 & (1) \\ x & \quad 2B + C & & = -3 & (2) \\ 1 & A \quad + 2C & & = 1 & (3) \end{array}$$

Vezmeme rovnice

$$\begin{array}{lll} (1) & A + B & = 2 \\ (3) - 2\cdot(2) & A - 4B & = 7 \end{array}$$

Odečtením 1. rovnice od 2. dostaneme

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ -5B &= 5 \end{aligned}$$

Tedy $B = -1$, $A = 3$, $C = -1$.

Proto

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

Mocniny a mocninné funkce

(1) Mocnění přirozeným číslem

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ krát}}$

Grafy funkcí $f(x) = x^n$ již známe.

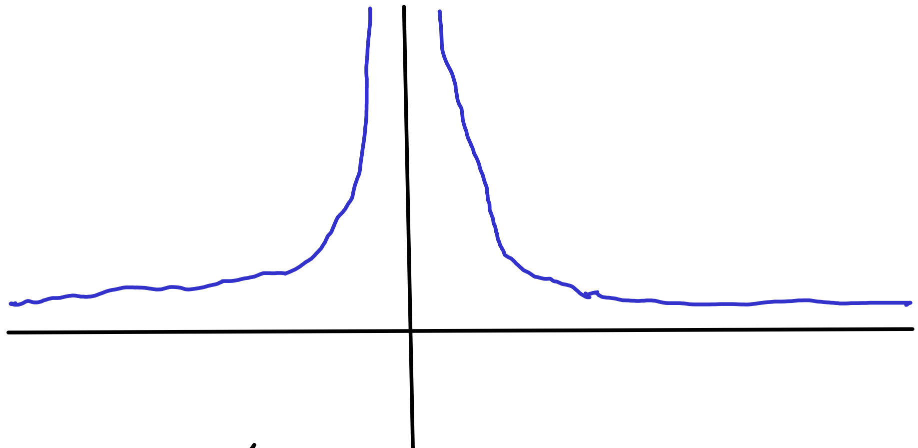
(2) Mocnění celým číslem

Pokládáme $a^0 = 1$

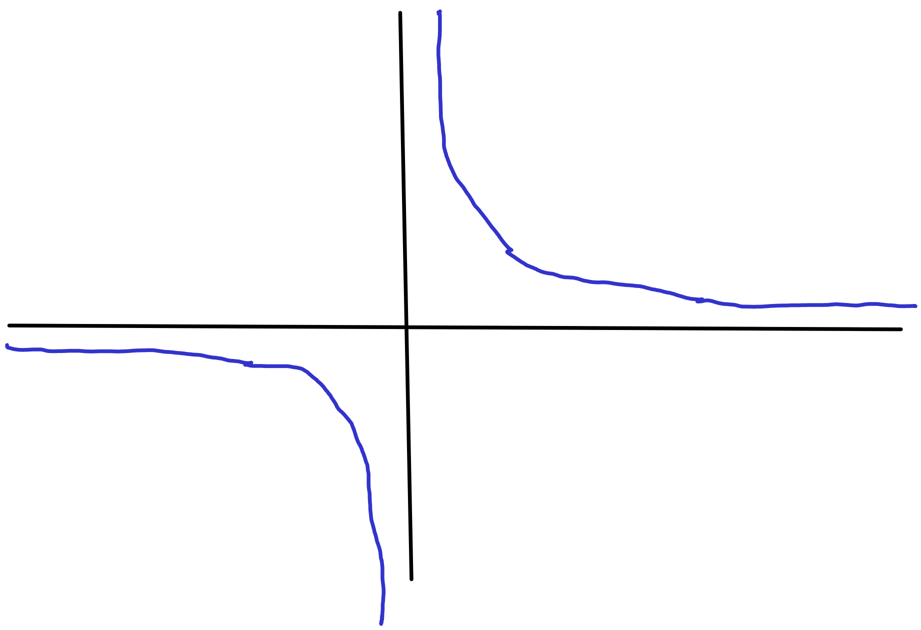
Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme pro $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Grafy $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$



$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$



Pro počítání s mocninami platí tato pravidla:

- $v^{a+b} = v^a \cdot v^b$
- $(v \cdot u)^a = v^a \cdot u^a$
- $(v^a)^b = v^{ab}$

$\boxed{1^a = 1}$ •

(3) Mocniny s racionálními exponenty

se definují tak, aby pravidla platila i pro ně.

Pro $n \in \mathbb{N}$ přirozené, $x \in (0,\infty)$ se definuje

$$x^{\frac{1}{n}} = y \in (0,\infty)$$

tak, aby

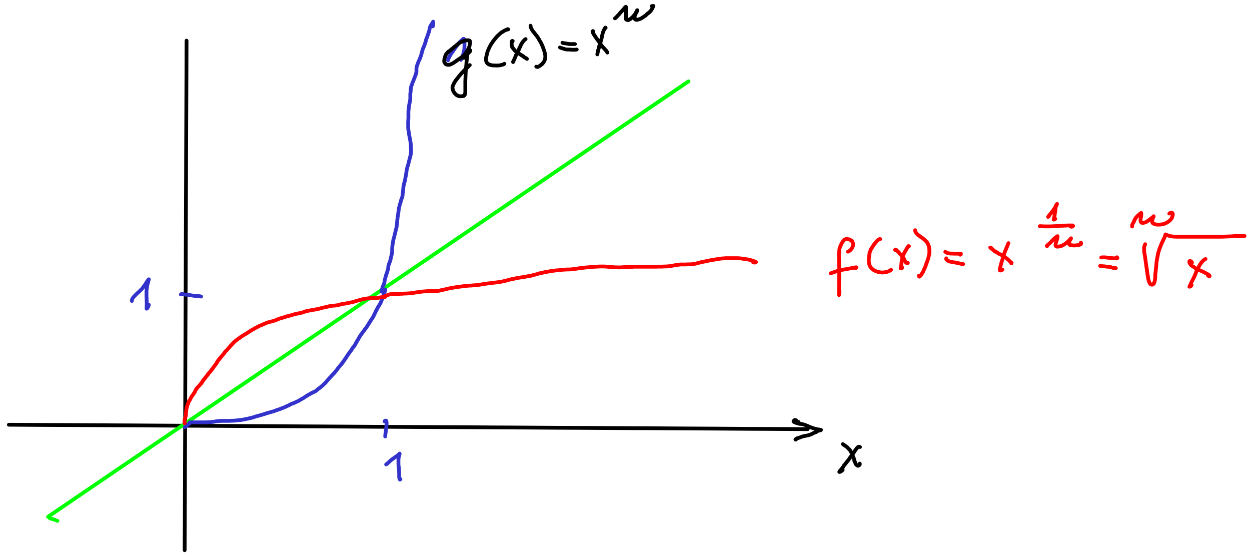
$$y^n = x,$$

tj.

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ je inverzní funkce

k funkci $\qquad g(y) = y^n$

na intervalu $(0,\infty)$.



Pro $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $x \in (0,\infty)$ definujeme

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Pro racionální exponenty platí opět 3 pravidla uvedená výše

(4) Mocniny s reálnými exponenty

lze definovat a to tak, že pro a, c racionální a b reálné, $r \in (1,\infty)$

$$a < b < c$$

platí

$$r^a < r^b < r^c$$

Opět platí $\quad a, b \in \mathbb{R}, \; r, u \in (0,\infty)$

$$r^{a+b} = r^a \cdot r^b$$
$$(u \cdot r)^a = u^a \cdot r^a$$
$$(r^a)^b = r^{a \cdot b}$$
$$1^a = 1$$
$$r^0 = 1$$

Exponenciální funkce

Nechť $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ je pevně zvolena. Exponenciální funkce

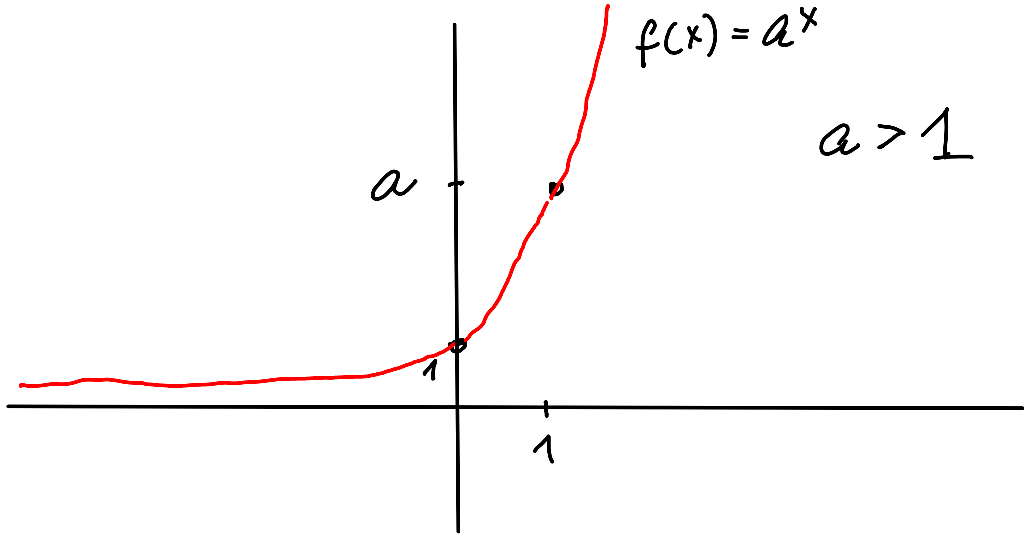
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$

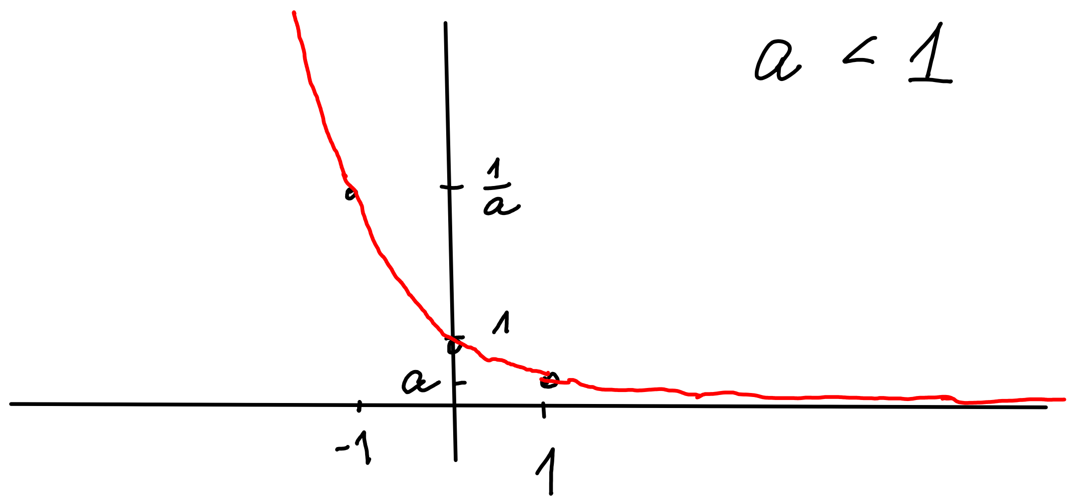
je funkce

$$f(x) = a^x.$$

Pro $a > 1$ je rostoucí, pro $a < 1$ klesající. Obor hodnot je $(0,\infty)$.

Její grafy pro $a > 1$ a $a < 1$





<u>Logaritmická funkce o základu</u> $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

je inverzní funkce k exponenciální funkci a^x. Tedy

$$\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

s definičním oborem $(0,\infty)$ a oborem hodnot $\mathbb{R}$ je definována takto:

$$\log_a x = y \text{ právě když } a^y = x.$$

Slovy:

$\log_a x$ je exponent, kterým musíme umocnit a, abychom dostali x.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(2a) $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$

(3) $\log_a (x^b) = b \log_a x$

(4) $\log_a 1 = 0$

(5) $\log_a a = 1$

(6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Důkaz pomocí vlastností mocnin:

(1) $$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$
$$= \log_a^{\log_a (x \cdot y)}$$

Z $a^u = a^v$ plyne $u = v$. Tedy z výše uvedeného je vidět, že

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

(3) $$a^{b\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^b = x^b = a^{\log_a (x^b)}$$

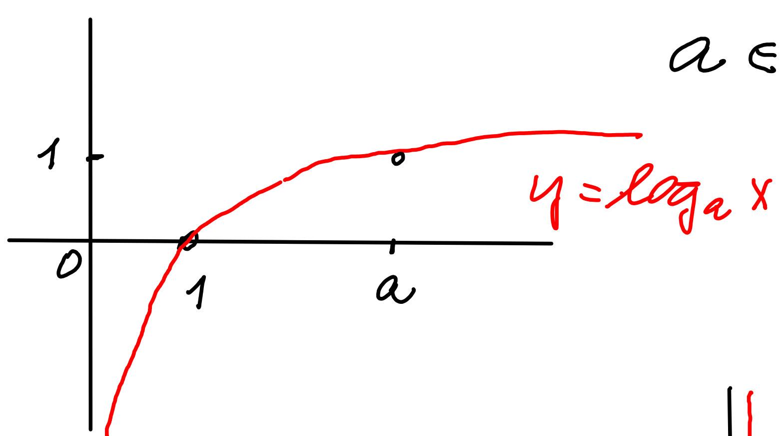
Tedy $b\log_a x = \log_a (x^b)$

(6) Dokážeme $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$

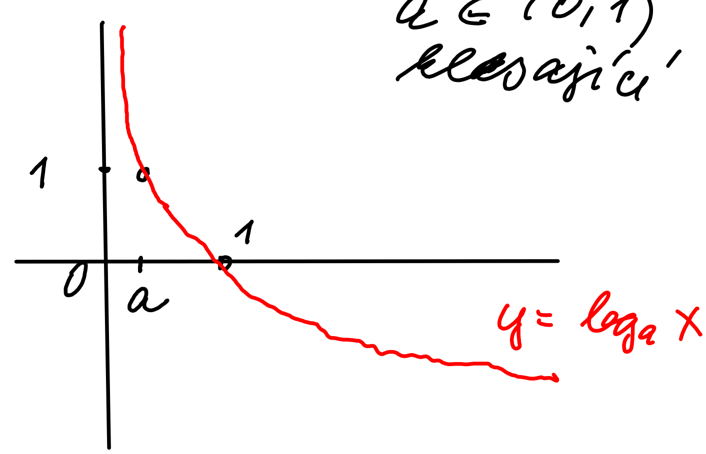
$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x}$$
$$= x = b^{\log_b x}$$

Grafy logaritmických funkcí $\log_a$ jsou symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu s grafy exponenciálních funkcí a^x.

$a \in (1,\infty)$ rostoucí



$a \in (0,1)$ klesající



Příklad Řešte následující rovnici

$$\frac{\log_{10}(35-x^3)}{\log_{10}(5-x)} = 3$$

Argument logaritmu musí být kladné číslo, proto $35 - x^3 > 0$, tj. $35 > x^3$, tj. $x \in (-\infty, \sqrt[3]{35})$ a současně $5 - x > 0$, tj. $x \in (-\infty, 5)$.
Tedy $x \in (-\infty, \sqrt[3]{35})$. $\quad 3 < \sqrt[3]{35} < 4$
Dále jmenovatel musí být různý od 0 tj.

$$5 - x \neq 1 \quad \text{tj.} \quad x \neq 4,$$

což je pro $x < \sqrt[3]{35}$ splněno.

Rovnici vynásobíme $\log_{10}(5-x)$ a upravíme pravou stranu:

$$\log_{10}(35-x^3) = 3 \cdot \log_{10}(5-x) = \log_{10}(5-x)^3$$

Funkce $\log_{10}$ je rostoucí, proto

$$35 - x^3 = (5-x)^3$$
$$35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$

což vede na kvadratickou rovnici

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

s kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Oba jsou v $(-\infty, \sqrt[3]{35})$ a jsou tedy řešeními dané rovnice.

Dekadický logaritmus je logaritmus při základu 10. Značí se

$$\log$$

tj. bez indexu 10. Hraje důležitou roli

v chemii, neboť pH vodného roztoku je definováno jako

$$pH = -\log\left(c_{H_3O^+}\right), \quad c \text{ je koncentrace } H_3O^+$$

Ve vodě je koncentrace kationtů H_3O^+ 10^{-7} a koncentrace aniontů OH^- je rovněž 10^{-7}. Součin obou koncentrací ve vodných roztocích je za standardních podmínek 10^{-14}. Kyseliny mají pH < 7, zásady > 7.

Eulerovo číslo označujeme e, a jeho prvních 1000 cifer je

2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995
9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274
2746639193 2003059921 8174135966 2904357290 0334295260
5956307381 3232862794 3490763233 8298807531 9525101901
1573834187 9307021540 8914993488 4167509244 7614606680
8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069
5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760
6737113200 7093287091 2744374704 7230696977 2093101416
9283681902 5515108657 4637721112 5238978442 5056953696
7707854499 6996794686 4454905987 9316368892 3009879312
7736178215 4249992295 7635148220 8269895193 6680331825
2886939849 6465105820 9392398294 8879332036 2509443117
3012381970 6841614039 7019837679 3206832823 7646480429
5311802328 7825098194 5581530175 6717361332 0698112509
9618188159 3041690351 5988885193 4580727386 6738589422
8792284998 9208680582 5749279610 4841984443 6346324496
8487560233 6248270419 7862320900 2160990235 3043699418
4914631409 3431738143 6405462531 5209618369 0888707016
7683964243 7814059271 4563549061 3031072085 1038375051
0115747704 1718986106 8739696552 1267154688 9570350...

Jde o číslo iracionální, které se dá přibližně vypočítat jako $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro velké $n \in \mathbb{N}$ nebo jako součet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

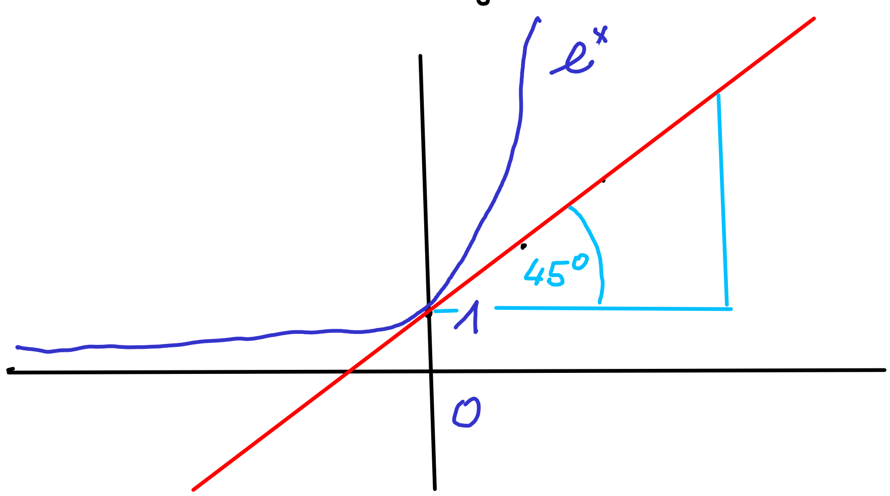
Logaritmus se základem e se nazývá přirozený logaritmus a značí se

ln

Číslo e má jako jediné kladné číslo tu vlastnost, že směrnice tečny k exponenciální funkci

$$f(x) = e^x$$

v bodě [0, 1] je 1.



To znamená, že inverzní funkce $g(x) = \ln x$ má graf a ten má v bodě [1, 0] tečnu rovněž se směrnicí 1.