M1035 5. přednáška

Limita funkce

Spojitost funkce podle poznámek se stran 11 a 12 připravy na předchozí přednášku.

Limita funkce Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže pro x blízká čísla a, ale různá od a, je hodnota $f(x)$ blízká číslu L. Píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Formálně: Nechť $(a-\Delta, a+\Delta) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$ pro $\Delta > 0$.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus a \quad f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna x z δ-okolí bodu a s výjimkou bodu a je funkční hodnota $f(x)$ v ε-okolí bodu L.

Trochu jinak

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Příklady}}$ $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$, $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$.

Limita L může být i ∞ nebo $-\infty$.
Definice v tomto případě je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

Pro

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

je definice

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$$

Příklady

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Limita v $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\forall K > 0 \; \exists L > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad x < -L \Rightarrow f(x) > K$$

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou intervaly $(a-\delta, a+\delta)$

Okolí ∞ jsou intervaly (K, ∞).

Okolí $-\infty$ jsou intervaly $(-\infty, L)$.

Definici limity můžeme psát obecně takto

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Pro každé okolí L existuje okolí a tak, že pro všechna $x \neq a$ z okolí a je $f(x)$ v okolí L.

Příklad

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Limity zleva a zprava $\quad a \in \mathbb{R}$

Limita zprava $\quad \lim_{x\to a_+} f(x) = L$

Pro každé okolí L existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x)$ v okolí L.

Limita zleva $\quad \lim_{x\to a_-} f(x) = L$

Pro každé okolí L existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x)$ v okolí L.

Příklad $\quad \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$

Příklad $\lim\limits_{x\to 0+} \log_z x = -\infty$ pro $z > 1$

$\lim\limits_{x\to \infty} \log_z x = \infty$ pro $z > 1$.

Příklad $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje

Věta: Je-li funkce f spojitá v $a \in \mathbb{R}$ pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Počítání limit se řídí těmito pravidly:

Věta: Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$.

Potom

1) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L + M$

2) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M$

3) Je-li $M \neq 0$, je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Příklad $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim_{x\to 2}(x^2-3)} = \frac{9}{1} = 9$$

Ve větě můžeme brát i L a M $\pm\infty$. Počítáme takto. Pro $s \in \mathbb{R}$ je

$$s + \infty = \infty$$

$$s + (-\infty) = -\infty$$

$$s > 0 \qquad s \cdot \infty = \infty$$

$$s > 0 \qquad s \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\frac{s}{\infty} = 0 \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{s}{-\infty} = 0 \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

Příklad

$$\lim_{x\to\infty} (2x^2 - 8x - 7) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(2 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot$$

$$\cdot \left(\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^2}\right) =$$

$$= \infty \cdot (2 - 0 - 0) = \infty \cdot 2 = \infty$$

Příklad Limity racionálních lomených funkcí v $\pm\infty$

$$\lim \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots}{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < p \\ \dfrac{a_n}{a_p} & \text{pro } n = p \\ \pm\infty & \text{pro } p > n \end{cases}$$

$a_n \neq 0, \ a_p \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8x-1}{3x^3-19x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3}\left(\frac{2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{19}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim\left(2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\left(3-\frac{19}{x}\right)} = 0 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+8x-1}{3x^2-19x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{\lim\left(2+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\left(3-\frac{19}{x}\right)}$$

$$= (-\infty)\cdot\frac{2}{3} = -\infty .$$

Příklad

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} x+2}{\lim_{x\to 2} x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Věta o dvou policajtech

Mějme tři funkce takové, že na $(a-\Delta, a+\Delta)\setminus\{a\}$ platí

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Jestliže
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

pak také
$$\lim_{x\to a} g(x) = L .$$

Příklad

Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

Platí $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

Proto

$$-x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2 .$$

Platí

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 ,$$

proto také

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 .$$

Důležité limity

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(Geometricky: směrnice tečny ke grafu funkce $\sin x$ v bodě $[0,0]$ je 1.)

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

(Geometricky: směrnice tečny ke grafu funkce e^x v bodě $[0,1]$ je 1.)

3) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$$

(Geometricky: směrnice tečny ke grafu funkce $\ln x$ v bodě $[1,0]$ je rovna 1.)

4) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

5) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{pro všechna } \alpha > 0$$

Exponenciální funkce roste rychleji než jakákoliv kladná mocnina. Každá kladná mocnina roste daleko rychleji než logaritmus.

$\boxed{\text{Věta o limitě složené funkce}}$

Nechť funkce g je spojitá v bodě a a nechť $g(a) = b$. Nechť
$$\lim_{y \to b} f(y) = L.$$
Potom
$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = L.$$

$\boxed{\text{Příklad}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{5}} =$$

$$\lim_{y \to 0} 5 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5$$

Zde bereme $g(x) = 5x$, $f(y) = \dfrac{\sin y}{\frac{y}{5}}$ v předchozí větě.