M1035 7. přednáška

Průběh funkce

Ukážeme si k čemu všemu je derivace dobrá.

① Pomocí derivace rozhodneme, na kterých intervalech je funkce rostoucí a na kterých klesající.

$\boxed{\text{Věta 1}}$ Nechť funkce f má ve všech bodech intervalu I derivaci f'.

(A) Jestliže $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, je f na intervalu I rostoucí.

(B) Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, je f na intervalu I klesající.

(C) Jestliže $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$, je f na intervalu I neklesající.

(D) Jestliže $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$, je f na intervalu I nerostoucí.

Příklad: Zjistěte, na kterých intervalech je monotónní funkce

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Spočítáme derivaci

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

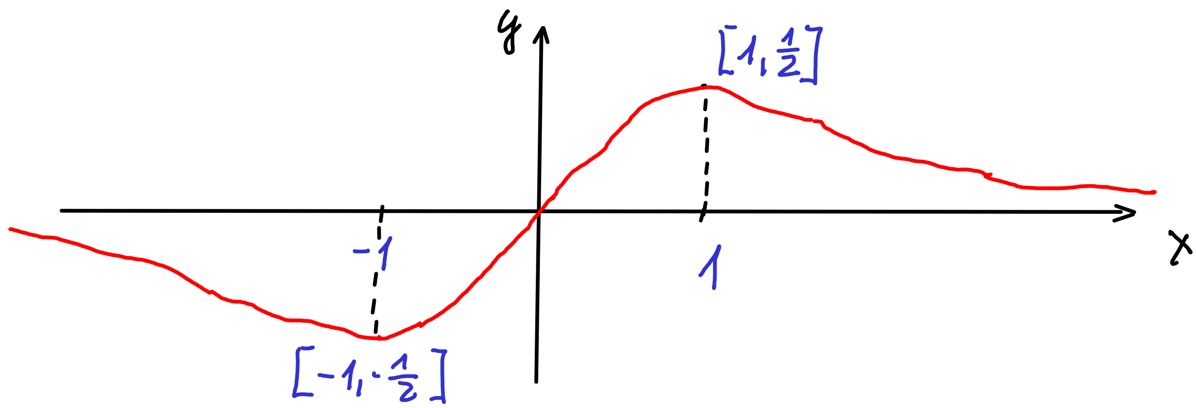
jmenovatel je vždy kladný, $f'(x) = 0$ pro $x = 1$ a $x = -1$. Znaménko derivace f' je

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f'	$-$	$+$	$-$
f	klesající	rostoucí	klesající

$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Funkce f je lichá $f(-x) = -f(x)$. Proto graf funkce f vypadá takto:



(2) Pomocí derivace najdeme lokální a globální extrémy funkcí.

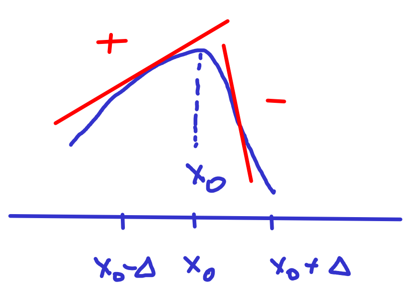
Funkce f nabývá v bodě x_0

- GLOBÁLNÍHO MAXIMA, jestliže
  $\forall x \in D(f) : f(x_0) \geq f(x)$
- GLOBÁLNÍHO MINIMA, jestliže
  $\forall x \in D(f) : f(x_0) \leq f(x)$

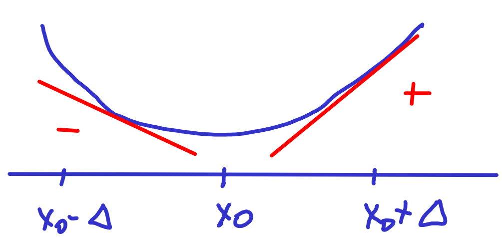
- LOKÁLNÍHO MAXIMA, jestliže pro všechna x z nějakého intervalu $(x_0-\Delta, x_0+\Delta) \cap D(f)$ je
$$f(x_0) \geq f(x)$$
- LOKÁLNÍHO MINIMA, jestliže pro všechna x z nějakého intervalu $(x_0-\Delta, x_0+\Delta) \cap D(f)$ je
$$f(x_0) \leq f(x).$$

Věta 2 Jestliže f nabývá v bodě x_0 svého lokálního extrému, pak
$$f'(x_0) = 0.$$

Věta 3 Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f'(x)>0$ pro $x \in (x_0-\Delta, x_0)$ a $f'(x)<0$ pro $x \in (x_0, x_0+\Delta)$, pak nabývá funkce f v bodě x_0 svého lokálního maxima.



Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f'(x)<0$ pro $x \in (x_0-\Delta, x_0)$ a $f'(x)>0$ pro $x \in (x_0, x_0+\Delta)$, pak nabývá funkce f v bodě x_0 svého lokálního minima.



Příklad Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Spočítáme derivaci a její znaménko

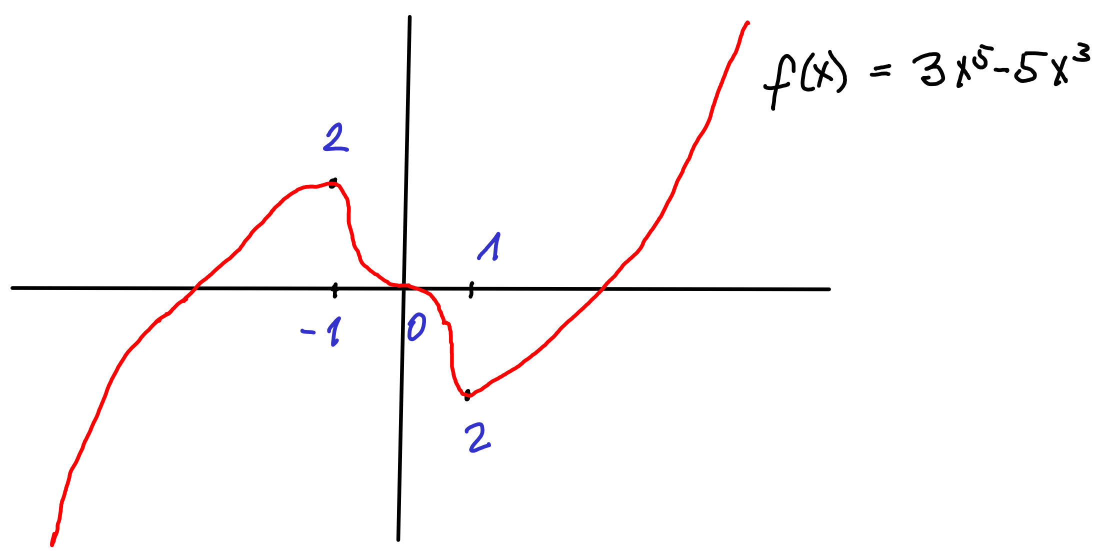
$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ pro $x = -1, 0, 1$

Znaménko derivace na intervalech

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f'	+	−	−	+
f	roste	klesá	klesá	roste

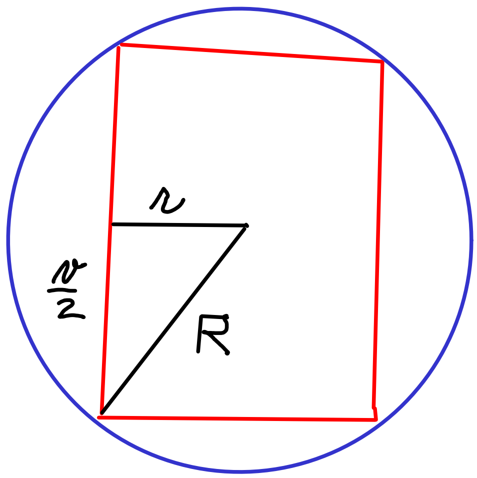
Graf funkce f



Funkce f nabývá v bodě −1 svého lokálního maxima, v bodě 1 svého lokálního minima. V bodě 0 je $f'(0) = 0$, ale f v něm nenabývá ani maxima ani minima.

Příklad: Do koule o poloměru R vepište válec s největším objemem.

Středový řez danou koulí je



r je poloměr válce
v je výška válce

Objem válce je
$$V = \pi r^2 v$$

Přitom
$$r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = R^2$$
$$v = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Proto $V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$

Máme najít maximum této funkce na intervalu $[0, R]$.

Derivace je
$$V'(r) = 2\pi\, 2r \sqrt{R^2 - r^2} + 2\pi r^2 \frac{1}{2} \frac{(-2r)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$
$$= \frac{2\pi\left(2rR^2 - 2r^3 - r^3\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Stacionární body, tj. ty, kde $V' = 0$ jsou
$$r = 0, \quad r = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, R \quad \text{v intervalu } [0, R]$$

V intervalu $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}} R\right)$ je $V' > 0$, v intervalu $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} R, R\right)$ je $V' < 0$. Dále
$$V(0) = V(R) = 0 \qquad V\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, R\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi R^3$$

Tedy V nabývá v $r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$ svého globálního maxima.

(3) Lokální extrémy pomocí 1. a 2. derivace.
$f''(x)$ je derivace funkce $f'(x)$, nazýváme ji 2. derivace funkce f.

$\boxed{\text{Věta 4:}}$ Jestliže má funkce f v bodě x_0 první derivaci

$$f'(x_0) = 0$$

a druhou derivaci

$$f''(x_0) > 0,$$

pak je x_0 lokálním minimem funkce f.

Jestliže má funkce f v bodě x_0 první derivaci

$$f'(x_0) = 0$$

a druhou derivaci

$$f''(x_0) < 0,$$

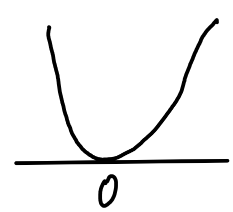
pak je x_0 lokálním maximem funkce f.

Jednoduchý příklad

Nechť $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$

$f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 2 > 0$

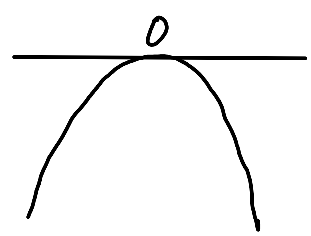


V bodě $x_0 = 0$ má f své lokální minimum.

Nechť $g(x) = -x^2$

$g'(x) = -2x \qquad g''(x) = -2$

$g'(0) = 0 \qquad g''(0) = -2 < 0$



V bodě $x_0 = 0$ má g své lokální maximum.

④ Pomocí derivací spočítáme limity $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{\text{l'Hospitalovo pravidlo}}$ Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ nebo } \infty.$$

Nechť existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Potom existuje

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Příklady:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

- $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ Spočítáme místo toho limitu logaritmu $\ln (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0} \ln (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1}{e^x+x} = 2$$

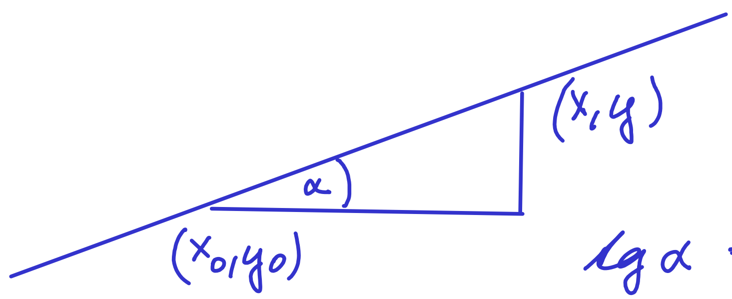
Proto $\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln (e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^2 .$$

5 Pomocí derivace najdeme tečnu a normálu ke grafu funkce f.

Přímka procházející bodem (x_0, y_0) se směrnicí k má rovnici

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

Věta 5 Tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Normála k přímce $y - y_0 = k(x - x_0)$ procházející bodem (x_0, y_0) je kolmá k této přímce a má směrnici

$$-\frac{1}{k}$$

Tedy má rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$$

Směrový vektor původní přímky je $(1,k)$
Směrový vektor normály je $(k,-1)$.
Tyto vektory jsou na sebe kolmé.
Jejich skalární součin je

$$(1,k)\cdot(k,-1) = 1\cdot k + k(-1) = 0.$$

Normála ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

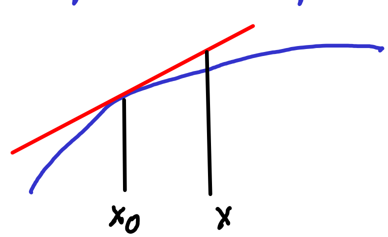
$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

jestliže $f'(x_0) \neq 0$.

6 Pomocí derivace spočítáme přibližně hodnotu funkce v okolí známé hodnoty.

Věta 6 Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci, pak pro x blízké x_0 platí

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Příklad Spočítejte přibližně $\sqrt{10}$.

Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt{x}$.
Víme, že $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Proto

$$\sqrt{10} = f(10) \doteq f(9) + f'(9)(10-9) =$$

$$= 3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9}}(10-9) = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}.$$