M1035 8. přednáška

Neurčitý integrál

Dodatek k diferenciálnímu počtu

Řekneme si, co to je diferenciál funkce f v bodě x_0. Je to lineární funkce, kterou značíme

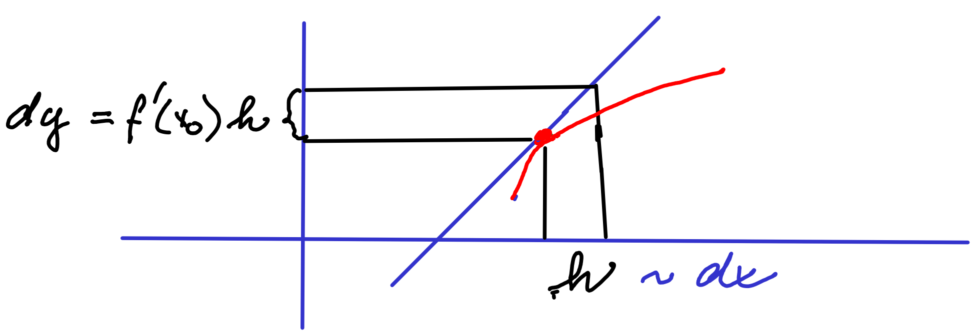
$$df(x_0)$$

a která přírůstku na ose x o velikosti

$$h = x - x_0$$

přiřazuje přibližný přírůstek ve směru osy y

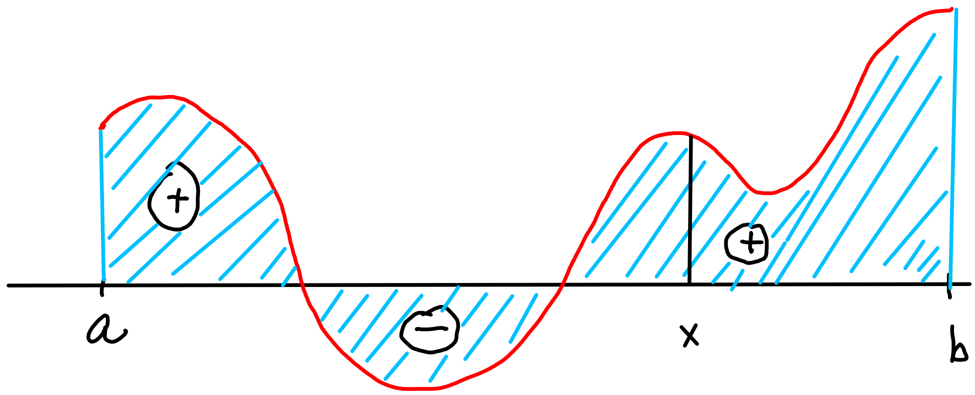
$$dy = df(x_0)(h) = f'(x_0)\,h = f'(x_0)\,dx$$



Tento pojem bude hrát důležitou roli v diferenciálním počtu více proměnných.

Integrální počet – motivace

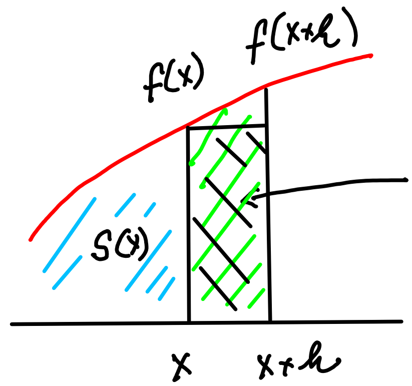
Chceme spočítat obsah plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x



Označme $S(x)$ obsah mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, x]$.

Spočítejme pro spojitou funkci f podíl

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$ pro malé h



Rozdíl obsahů $S(x+h) - S(x)$ je přibližně obsah obdélníku o šířce h a výšce $f(x)$

$$S(x+h) - S(x) \sim h \cdot f(x)$$

Proto

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \sim f(x)$$

a derivace funkce S je

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x)$$

Derivace funkce S je funkce f. Říkáme, že S je primitivní funkce k funkci f.

$$S'(x) = f(x)$$

nebo, že S je neurčitý integrál funkce f.

Zápis

$$S(x) = \int f(x)dx .$$

Věta: Funkce F a G jsou dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu I, právě když

$$G(x) = F(x) - c$$

kde c je nějaké reálné číslo.

Jestliže $G'(x) = f(x) = F'(x)$. Pak

$$G'(x) - F'(x) = 0$$

a jediná funkce, která má na intervalu nulovou derivaci je konstantní funkce.

Pomocí primitivní funkce budeme počítat obsah plochy mezi grafem funkce f

a osou x na intervalu $[a, b]$ takto:

$$\text{obsah plochy} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Je-li $G(x) = F(x) + c$ jiná primitivní funkce, dostaneme stejný výsledek

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Primitivní funkce k základním funkcím

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$
3. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int e^x\,dx = e^x + c$
7. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
8. $\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$
9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

(10) $$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

(11) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$$

(12) $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

O správnosti se přesvědčíme derivováním.
např.

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Pro primitivní funkce platí tato základní pravidla:

(1) $$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(2) $$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

Příklady

(1) $$\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}+2\right)dx = \int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$+\int 2\,dx = \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x-1| + 2x + c$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx$$

Zkusíme zderivovat $\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right)' = \dfrac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}$

proto $$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9} \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$$

(3) $$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x-3} - \frac{\frac{1}{6}}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c$$

(4) $$\int \frac{x^4}{x^2+9}\,dx = \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$$

(5) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

(6) $$\int \sin^2 x\,dx =$$

Použijeme vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$
$= 1 - 2\sin^2 x$

Odtud
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2x + c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \sin x \cos x) + c$$

Integrování metodou per partes

Věta: Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I, pak

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx .$$

Důkaz: Chceme dokázat, že primitivní funkce

$$\int \big(u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\big)\,dx$$

je $u(x)\,v(x)$. K tomu stačí derivovat součin

$$\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) .$$

Příklady na integrování per partes

1. $$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx =$$

$$= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

2. $$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx =$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

(3) Vícenásobné použití per partes

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int 2x e^x =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

(3) $$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) \, dx =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Odtud

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c$$

(4) $$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

(5) $$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

(6) $$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Substituční metoda integrace

Věta Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F. Nechť funkce $\varphi : I \to J$. Potom funkce $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Lze psát také $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$.

Dva způsoby použití :

(A) Máme spočítat integrál vlevo a použijeme k tomu integrál vpravo

1) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx =$ $\quad t = \cos x$

$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$

2) $\int \cos^3 x\,dx$. Protože $\cos x = (\sin x)'$, použijeme substituci $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$

$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx =$

$= \int (1 - \sin^2 x)\cdot \cos x\,dx = \int (1 - t^2)\,dt =$

$$= t - \frac{t^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

③ $\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$ Protože $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, zavedeme substituci $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\, dx$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + c =$$
$$= \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

④ $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$ Protože $(1-x^2)' = -2x$ a x se objevuje v integrálu, použijeme substituci

$$t = 1-x^2 \qquad dt = -2x\, dx$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,(-2x)\, dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\, t^{3/2} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ⓑ Druhý způsob použití. Proměnnou x z integrované funkce vyjádříme jako funkci nové proměnné z,

$$x = \varphi(z), \quad dx = \varphi'(z)\, dz$$

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\, dz$$

Příklad

$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Položíme $x = \sin z$
$dx = \cos z\, dz$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 z}\, \cos z\, dz = \int |\cos z| \cos z\, dz$$

$x \in [-1, 1]$, $z = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos z \geq 0$,
proto $|\cos z| = \cos z$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 z\, dz = \int \frac{1+\cos 2z}{2}\, dz$$

$t = 2z \qquad dt = 2dz \qquad dz = \frac{dt}{2}$

$$= \int \frac{1}{2}\, dz + \frac{1}{2} \int \cos t\, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} \underset{\sin 2z}{\underset{\parallel}{\sin t}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \sin z \cos z\right) + c =$$

$z = \arcsin x$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \sin z \sqrt{1-\sin^2 z}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

Tuto primitivní funkci můžeme použít k výpočtu obsahu kruhu o poloměru 1. Vypočteme obsah půlkruhu. To je obsah mezi grafem funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ a osou x na intervalu $[-1, 1]$, $F' = f$.

$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = F(1) - F(-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin 1 + 1\sqrt{1-1^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\arcsin(-1) - 1\sqrt{1-1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Obsah kruhu je π.