M1035 9. přednáška

Určitý integrál

Opakování primitivních funkcí k základním funkcím.

Věta o substituci

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F. Nechť funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J. Potom funkce

$$f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

má primitivní funkci na intervalu I a ta se rovná $F(\varphi(x))$.

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(t))$$

Píšeme také

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Praktický výpočet: položíme $t = \varphi(x)$.
Odtud formálně

$$dt = \varphi'(x)\,dx$$

a dosadíme oba tyto výrazy do

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Příklad $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Položíme $t = 1-x^2$, $f(t) = \sqrt{t}$

Odtud $dt = -2x\,dx \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{2x}$

Proto

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\,x(-1)\,\frac{dt}{2x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\,t^{3/2} + c$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

Další příklady najdete na posledních 3 stranách přednášky 8.

URČITÝ INTEGRÁL

Definice: Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Určitý integrál funkce f od a do b je číslo

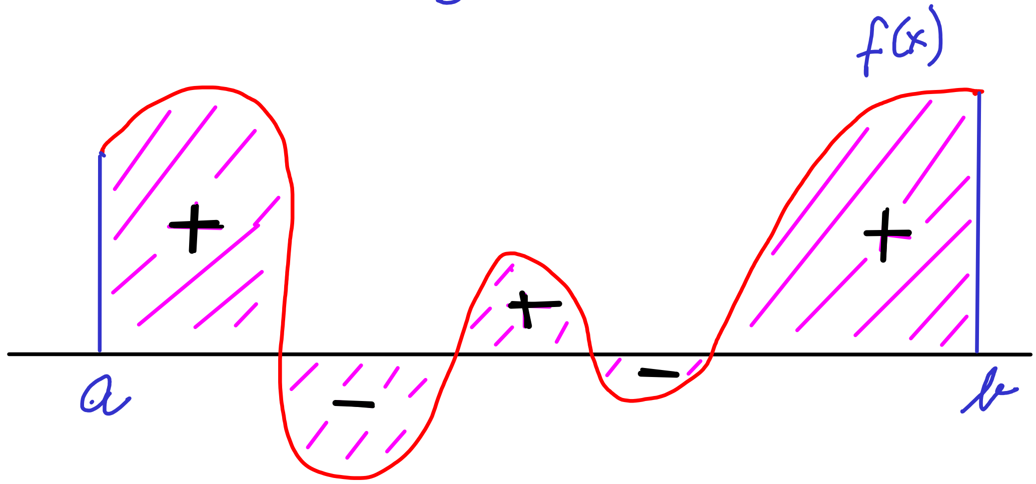
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kde F je primitivní funkce k funkci f.

Často píšeme $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

Geometrický význam určitého integrálu

je obsah oblasti vymezené grafem funkce f a osou x.



Příklad: Obsah půlkruhu o poloměru 1 je obsah oblasti pod grafem funkce

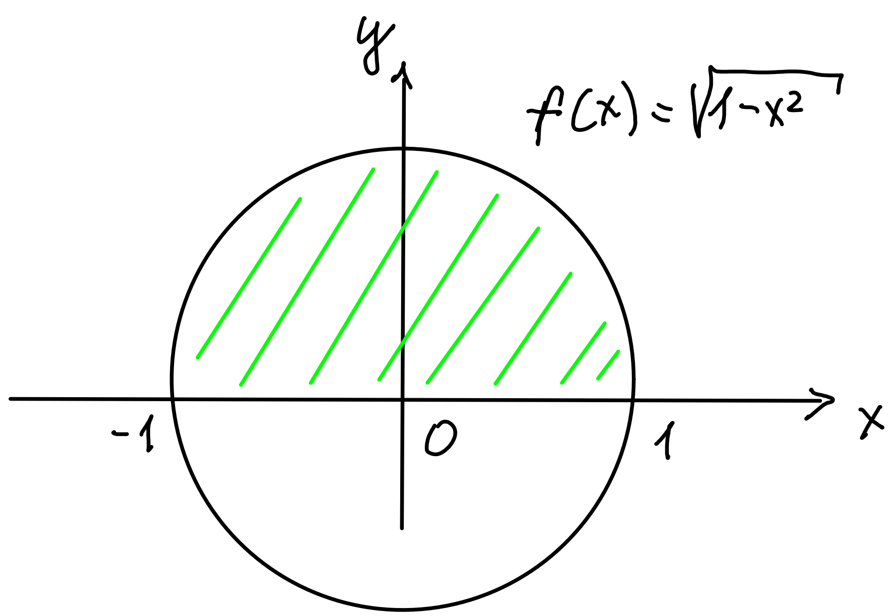
$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

nad intervalem $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin 1 + 1 \cdot \sqrt{1-1^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\arcsin(-1) - 1\sqrt{1-(-1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$



Příklady:

① $$\int_0^a x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

② $$\int_0^\pi \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$$

③ $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Vlastnosti určitého integrálu

① $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

② $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

③ nechť $a < c < b$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

④ Je-li $f(x) \geq 0$ na $[a,b]$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

⑤ Je-li $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Metoda per partes pro určité integrály

Věta: Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na $[a,b]$ spojité derivace. Potom

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

Příklad:

$$\int_1^e \underbrace{x^3 \ln x}_{u'(x)\cdot v(x)}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$u(x) = \dfrac{x^4}{4}$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\cdot \ln x\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3e^4+1}{16}$$

Věta o substituci pro určitý integrál

Nechť $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a,b]$, nechť $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha,\beta]$ a zobrazuje interval $[\alpha,\beta]$ do intervalu $[a,b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Jestliže $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, pak počítáme

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t)\,dt$$

kde F je primitivní funkce k f.

Příklad:

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$$

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{1+3x} \qquad [\alpha,\beta] = [0,5]$$

Potom

$$dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+3x}} \cdot 3\,dx$$

a také

$$t^2 = 1+3x \qquad [a,b] = [1,4]$$

$$x = \frac{t^2-1}{3}$$

Dosadíme do integrálu

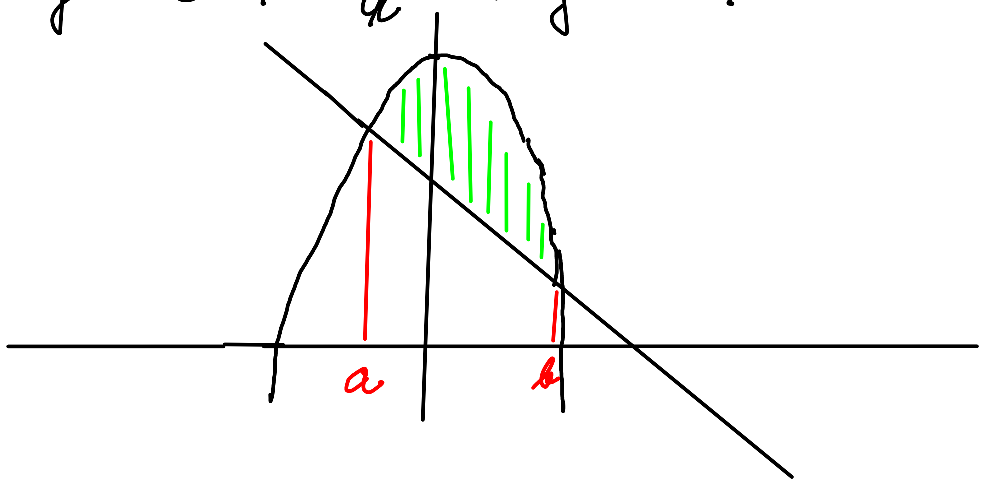
$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \int_1^4 \frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2}{3}\,dt = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{64-12-1+4}{3}\right) = \frac{2\cdot 54}{27} = 4$$

Geometrické aplikace určitého integrálu

Příklad: Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkami
$$y = 6 - x^2 \quad a \quad x + y = 4 .$$



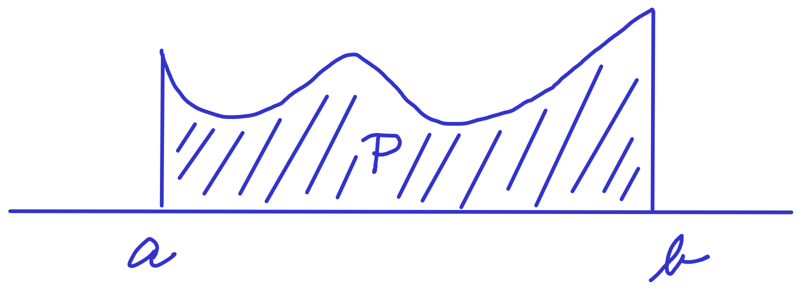
První řešíme rovnici $y = 6 - x^2 = 4 - x$ tj.
$$x^2 - x - 2 = 0$$
Ta má řešení
$$x_1 = a = -1$$
$$x_2 = b = 2$$

Plocha oblasti je
$$\int_a^b (6 - x^2)\,dx - \int_a^b (4 - x)\,dx =$$
$$= \int_a^b (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{9}{2}$$

Objem rotačního tělesa

Nechť funkce $y=f(x)$ je spojitá na intervalu $[a,b]$ a nezáporná. Uvažujme těleso, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x

$$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$$

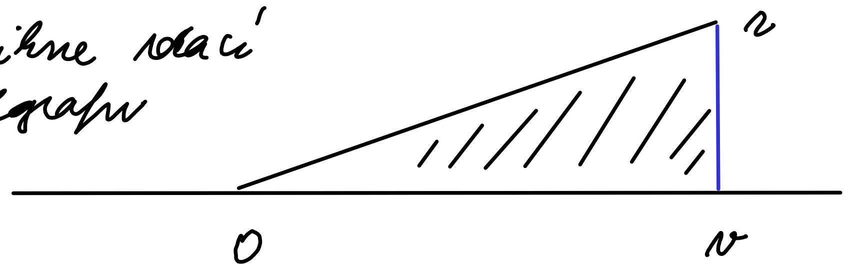


Objem tohoto tělesa je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Příklad Spočítejte objem kužele o výšce v a poloměru podstavy r

kužel vznikne rotací tohoto podgrafu



$$f(x) = \frac{r}{v}x$$

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2}x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Délka křivky

Nechť funkce f má spojitou derivaci na intervalu $[a,b]$. Délka grafu této funkce je

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Příklad Spočítáme délku půlkružnice o poloměru 1.

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad [a,b] = [-1,1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$