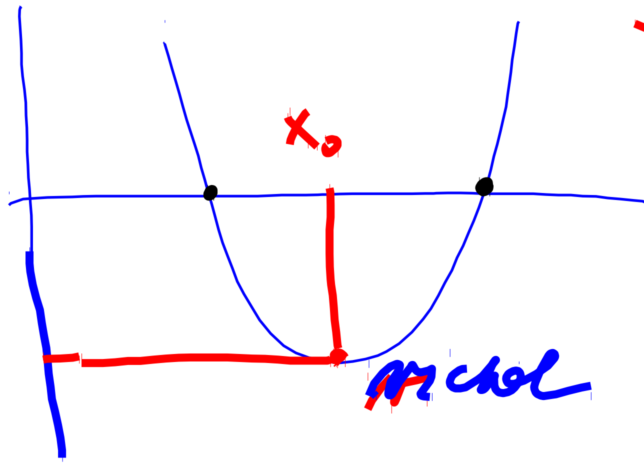
Polynomy, komplexní čísla

Minule

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$a > 0$

$$x = -\frac{b}{2a}$$



$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$= a\underbrace{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)}_{0}^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= c - \frac{b^2}{4a}$$

Obor hodnot je

$$H(f) = \left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty\right).$$

Na intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ je f klesající.

na $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ je f rostoucí

$f(x) = 0$ má dvě řešení

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

pokud $D = b^2 - 4ac > 0$

např. rovnice $x^2+1=0$
nemá reálný kořen. $D = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -4$

f má dva reálné kořeny x_1, x_2, potom

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Příklad

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

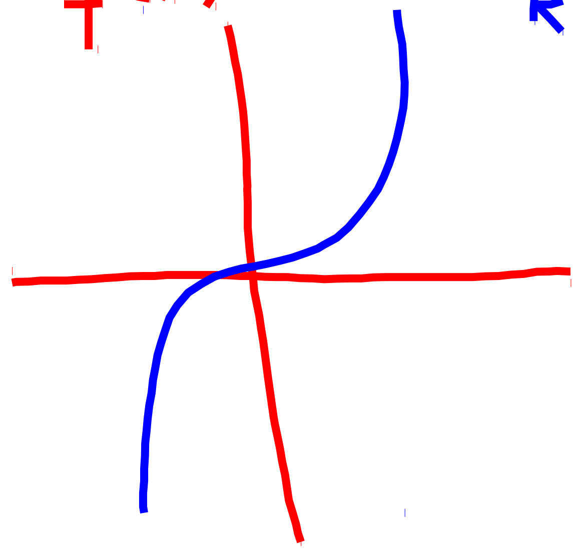
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) = x^2 - 2x + 3x + (2)(-3)$$

$$x^2 - \underbrace{(2-3)}_{-1}x + \underbrace{(2)(-3)}_{-6}$$

Třetí mocnina

$$f(x) = x^3$$



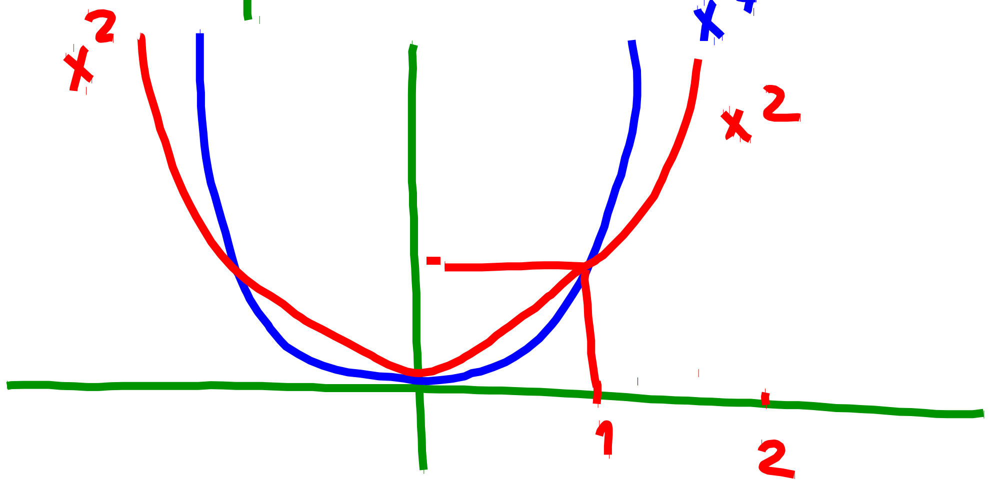
kubická parabola

$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \mathbb{R}$

rostoucí

4. mocnina $f(x) = x^4$



$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = [0, \infty)$

klesající na $(-\infty, 0]$

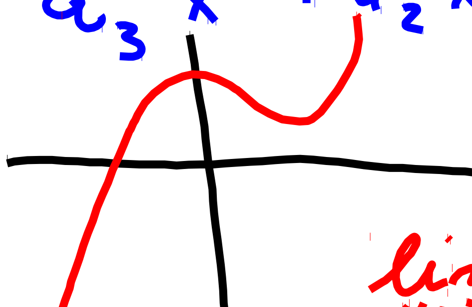
rostoucí na $[0, +\infty)$

Polynomy 3. stupně

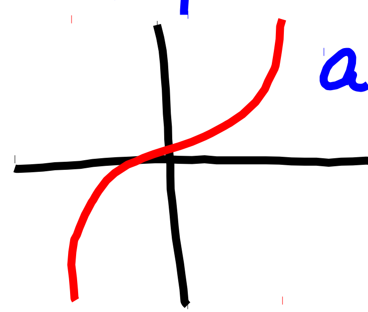
$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$a_3 \neq 0$

Graf $\boxed{a_3 > 0}$



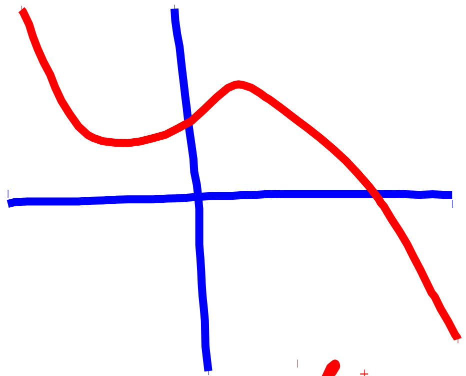
nebo



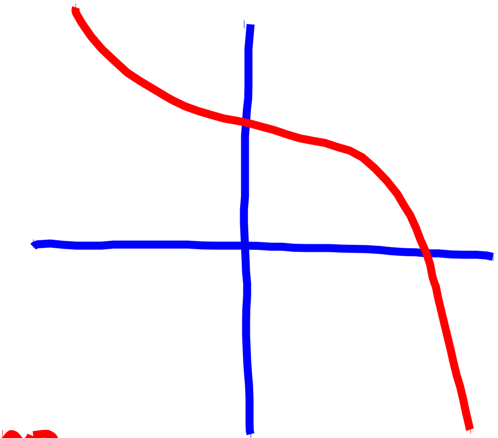
$\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

$\boxed{a_3 < 0}$



$\lim_{x \to \infty} p(x) = -\infty$



Vždy $H(p) = \mathbb{R}$

Polynom stupně n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

Kořen polynomu $p(x)$ je číslo x_0 takové, že $p(x_0) = 0$

Platí: x_0 je kořen polynomu p právě když

$p(x) = (x - x_0)\, q(x)$ stupeň $q = n-1$

$p(x) = p(x) - 0 = p(x) - p(x_0) =$

Pro polynomy stupně 3 a 4 existují „vzorečky" na kořeny, ale jsou nepraktické a nepoužívají se.

Pro polynomy stupně ≥ 5 žádné takové vzorečky neexistují.

Způsob hledání kořenů u některých polynomů

Předpokládejme, že polynom

$p(x) = a_n x^n + \dots \pm a_0$ stupně $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{Z}$

má RACIONÁLNÍ KOŘEN

$$\frac{r}{s} \qquad s \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}$$

nesoudělná

pak

① s dělí koeficient a_n

② r dělí koeficient a_0

Příklad $\quad p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 15$ (mínus)

- s dělí $a_3 = 1 \implies s = 1$
- r dělí $a_0 = 15 \qquad r \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

Kořeny hledáme mezi čísly $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

Hornerovo schéma

x	$a_3 = 1$	$a_2 = 4$	$a_1 = -2$	$a_0 = -15$	
3	1	$3 \cdot 1 + 4 = 7$	$3 \cdot 7 - 2 = 19$	$3 \cdot 19 - 15 =$	$42 = p(3)$
-1	1	$-1 + 4 = 3$	-5	-10	$p(-1)$
-3	1	1	-5	0	$= p(-3)$

$(x-(-3))$

Korien $x_1 = -3$

$p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 15 = (x+3)(1x^2 + 1x - 5)$

$= x^3 + x^2 - 5x + 3x^2 + 3x - 15$

$x^3 + 4x^2 - 2x - 15$

Korieny polynomu

$x^2 + x - 5$

$D = 1 - 4(1)(-5) = 21$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$p(x) = (x+3)\left(x - \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\right)$$

Komplexní čísla

Víme, že některé kvadr. rovnice nemají řešení v $\mathbb{R}$, např.

$$x^2+1=0.$$

Idea:

(1) vezmeme nějaké „imaginární" číslo i, takové, že

$$i^2=-1, \ (i)\cdot(i)=-1.$$

To je kořen rovnice $x^2+1=0$

(2) Toto číslo přidáme k reálným číslům a to celé rozšíříme tak, abychom mohli sčítat a násobit podle stejných pravidel jako s reálnými čísly.

Výsledek jsou komplexní čísla $\mathbb{C}$

Kroky

① K $\mathbb{R}$ přidáme imaginární číslo i a jeho reálné násobky

$$ai \qquad a\in\mathbb{R}, \quad i^2=-1$$

Počítáme takto

$$ai+bi=(a+b)i$$

$$(ai)(bi)=(ab)(i\cdot i)=ab\cdot(-1)=-ab$$

② K těmto číslům přičteme reálná čísla

$$a+bi$$

Sčítání: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Násobení: $(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bic+b\underbrace{idi}_{i^2}$

$$=ac+(bd)i^2+(ad+bc)i$$

$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Reálná čísla přímo ne kruhu $\qquad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$a = a + 0 \cdot i$$

$$(a+bi) + 0 = (a+bi) + (0+0i) = a+bi$$

$$(a+bi) \cdot 1 = (a+bi)(1+0i) = a+bi$$

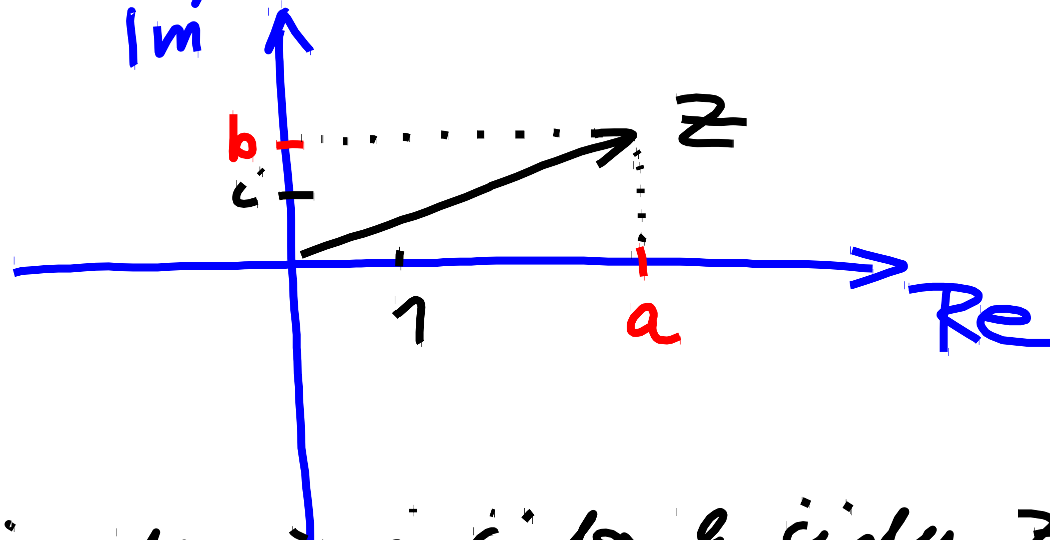
$$-i = (-1) \cdot i$$

$$(-i)(\cdot i) = ((-1)i)((\cdot 1)i) = (-1)^2 i^2 = 1(-1) = -1$$

[illegible] kořen rovnice $x^2+1=0$

$$x^2+1 = (x-i)(x+i) = x^2 - ix + ix - (i)^2 = x^2 + 1$$

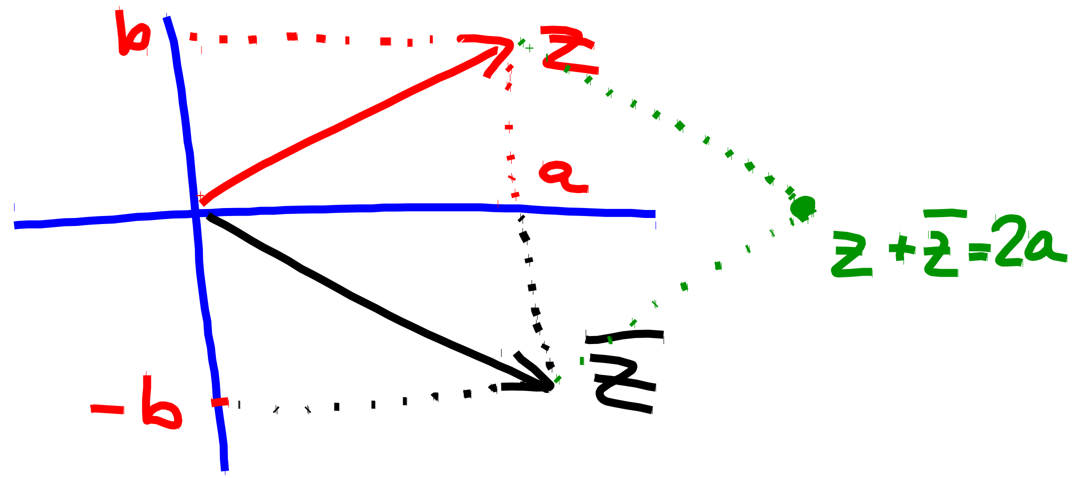
Znázornění komplexních čísel v rovině



$z = a + ib$

Komplexně sdružené číslo k číslu $z = a+ib$ je číslo

$$\bar{z} = a - ib$$



$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$$

$$\underline{z \cdot \bar{z}} = (a+ib)(a-ib)$$

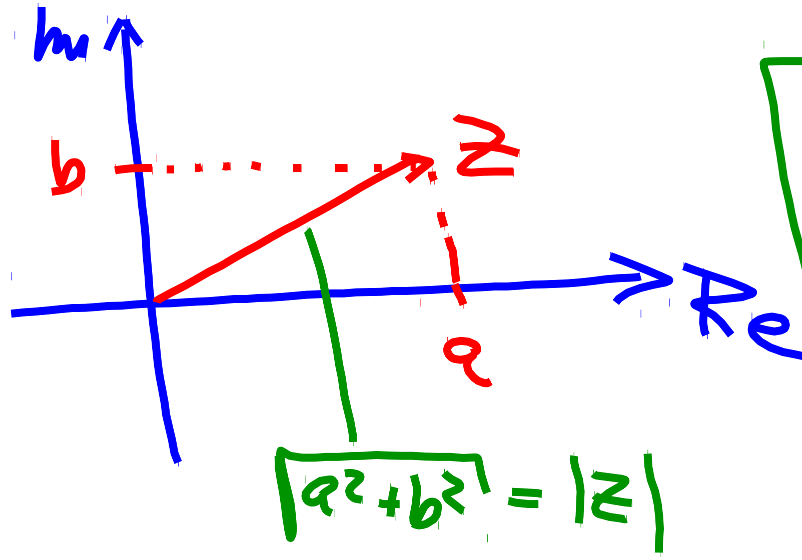
$$= a^2 - \underline{aib + iba} - \underset{-1}{i^2} b^2$$

$$= \underline{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + ib$ je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

– geometricky: vzdálenost z od počátku v rovině



$$\boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2}$$

Dělení v kompl. číslech

$x : y = x \cdot \frac{1}{y}$ převrácené číslo k $y \neq 0$

Převrácené číslo k $z = a + ib$

Příklad $z = 2 + 3i$

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{2-3i} \cdot \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

Obecně $\quad a \neq 0$ nebo $b \neq 0 \qquad z = a + ib$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a-ib} \cdot \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z^{-1}$$

Polynomy a kompl. čísla

Každý polynom stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty má řídy n KOMPLEXNÍCH kořenů (některé se mohou opakovat), které lze psát

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

Příklad $x^4 + x^3 + 6x^2 + x + 5 = (x^2+1)(x^2+x+5)$

$$= (x-i)(x+i)\left(x - \left(\frac{-1+i\sqrt{19}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-i\sqrt{19}}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{(\sqrt{19}\, i)^2 = 19 \cdot i^2 = -19}$$

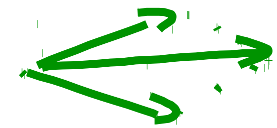
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

kořeny $x^2 + x + 5$ $\quad D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19$

komplexní kořeny $\quad z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$

Příklad

polynom x^2+x+5 má kořeny



$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}\, i$$

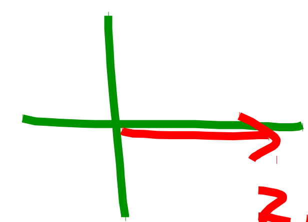
$$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}\, i = \overline{z_1}$$

Obecně

Je-li $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ polynom s reálnými koeficienty a kompl. číslo $z = a+ib$, $b \neq 0$, je jeho kořenem, pak

$$\overline{z} = a - ib$$

je také jeho kořenem.



$z = \overline{z}$

Platí: Každý polynom $p(x)=a_n x^n+\dots+a_0$ s reálnými koeficienty, $n \geq 1$, lze psát jako součin polynomů stupně 1 a stupně 2.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n \underbrace{(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)}_{\text{komplexní čísla}}$$

Pokud je z_i reálné, necháme $x - z_i$ – reálný polynom stupně 1

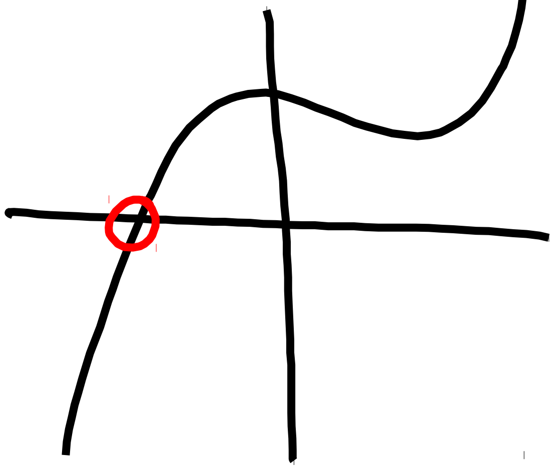
Pokud $z_i \in \mathbb{R}$, pak je dále kořen, $z_i \neq \overline{z_i}$

$$\underbrace{(x-z_i)(x-\overline{z_i})}_{\text{je reálný kvadr. polynom}} = x^2 - x\overline{z_i} - z_i x + z_i \overline{z_i}$$
$$= x^2 - \underbrace{(z_i+\overline{z_i})}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{z_i \overline{z_i}}_{= |z_i|^2 \in \mathbb{R}}$$

Příklad

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$$

Hledáme nějaký kořen (reálný existuje aspoň 1)



Hledáme mezi děliteli čísla 10

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

x	1	3	7	10
-2	1	1	5	0

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19$

$$p(x) = (x+2)(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 5)$$

má kompl. kořeny