Racionální funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$ kde P a Q jsou polynomy

$Q \neq 0$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x_0 \in \mathbb{R};\ Q(x_0) = 0\}$$

Lze obecně zjednodušit – psát ve tvaru

polynom + jednodušší rac. funkce

① $$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}$$

$\operatorname{st} D = \operatorname{st} P - \operatorname{st} Q$

$\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$

$$P(x) = Q(x) \cdot \underbrace{D(x)}_{\text{část. podíl}} + Z(x)$$ zbytek po dělení

Příklad 1

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 4}$$

$$(x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3) : (x^2 + 2x + 4) \sim \boxed{x^2 - 10x + 18 \quad \text{část. podíl}}$$

$$-(x^4 + 2x^3 + 4x^2)$$

$$(0x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 3)$$

$$-(-10x^3 - 20x^2 - 40x)$$

$$(0x^3 + 18x^2 + 40x - 3)$$

$$-(18x^2 + 36x + 72)$$

$$\boxed{4x - 75} \quad \text{zbytek}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 4} = x^2 - 10x + 18 + \frac{4x - 75}{x^2 + 2x + 4}$$

(2) $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ st $P <$ st Q

Q rozložíme na součin lineárních a kvadratických polynomů (kvadr. polynomy nemají reálné kořeny)

např. $Q(x) = (x+2)^2 (x^2+x+5)^2 \longrightarrow D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -19$

Pak existují konstanty A, B, C, D, E, F, tak že

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+5)} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+5)^2}$$

Koeficienty $A, B,$ až F spočítáme takto: převedeme na společného jmenovatele a porovnáme čitatel s polynomem P

Příklad 2

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$$

$$Ax + (2A+B)\cdot 1 = 3x+1$$

x : $A = 3$

1 : $2A+B = 1$

$6+B = 1$

$B = -5$

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

Příklad 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + A + 2C}{(x+2)(x^2+1)}$$

Porovnáme polynomy s

$$\begin{array}{llr}
x^2: & A + B = 2 & (1) \\
x: & 2B + C = -3 & (2) \\
1: & A + 2C = 1 & (3) \\
\hline
\end{array}$$

$(3) - 2\cdot(2)$

$$\begin{array}{lr}
A + B = 2 & (1) \\
A - 4B = 7 & (4)
\end{array}$$

$(1) - (4)$

$$5B = -5 \qquad \underline{B = -1}$$

$A + B = 2 \Rightarrow \underline{A = 3}$

$A + 2C = 1 \Rightarrow C = -1$

$$f(x) = \underbrace{\frac{3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+1}}_{\text{rozklad na parciální zlomky}}$$

Mocniny a mocninné funkce

$r \in \mathbb{R},\quad n \in \mathbb{N}$

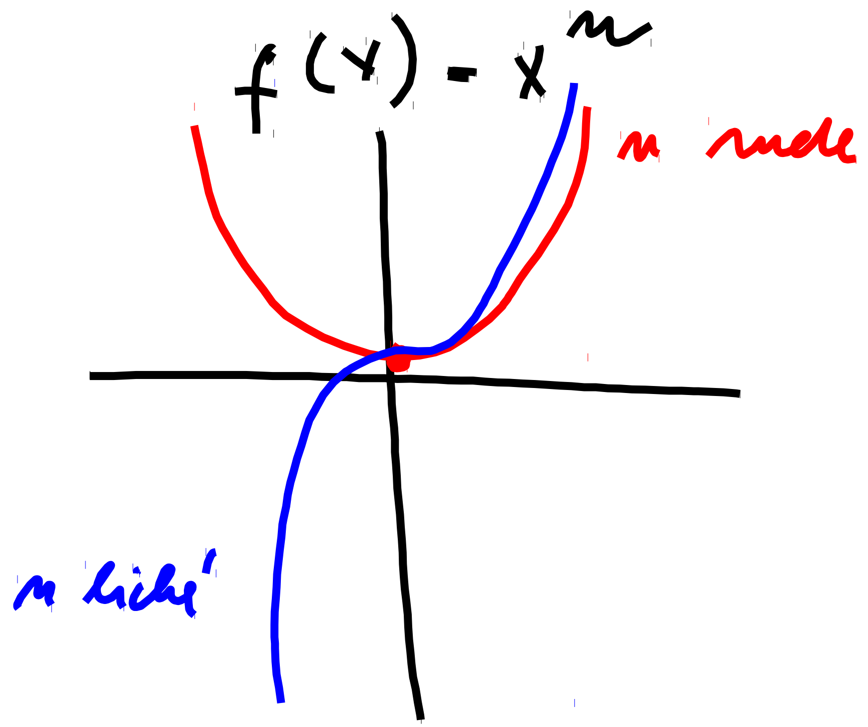
$$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdots r}_{n \text{ krát}}$$

vlastnosti

$$r^{n+m} = r^n \cdot r^m$$

$$(r^n)^k = r^{nk}$$

$$r^1 = r$$



$r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$r^0 = 1$$

$$r^n = \frac{1}{r^{-n}} \qquad -n \in \mathbb{N}$$

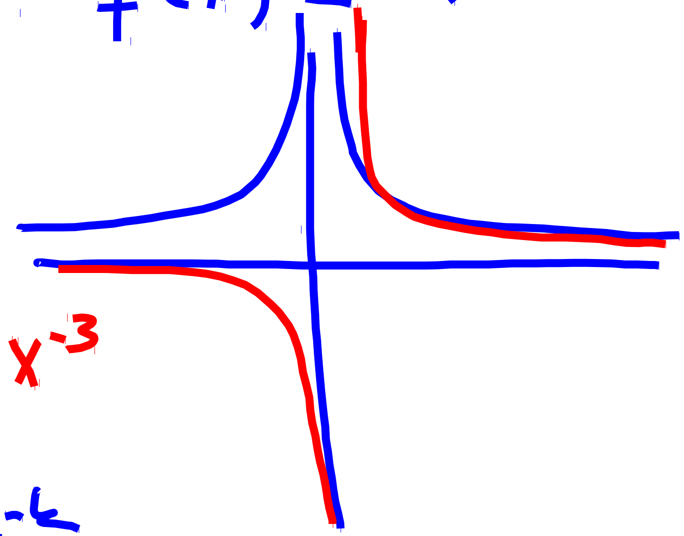
$$r^{-3} = \frac{1}{r^3}$$

n, k přirozená

$$+ \quad r^{n-k} = \frac{r^n}{r^k} = r^n \cdot r^{-k}$$

Grafy

$f(x) = x^{-2}$



$f(x) = x^{-3}$

Racionální mocniny

$q \in \mathbb{N}$ $\quad r \in (0,\infty)$

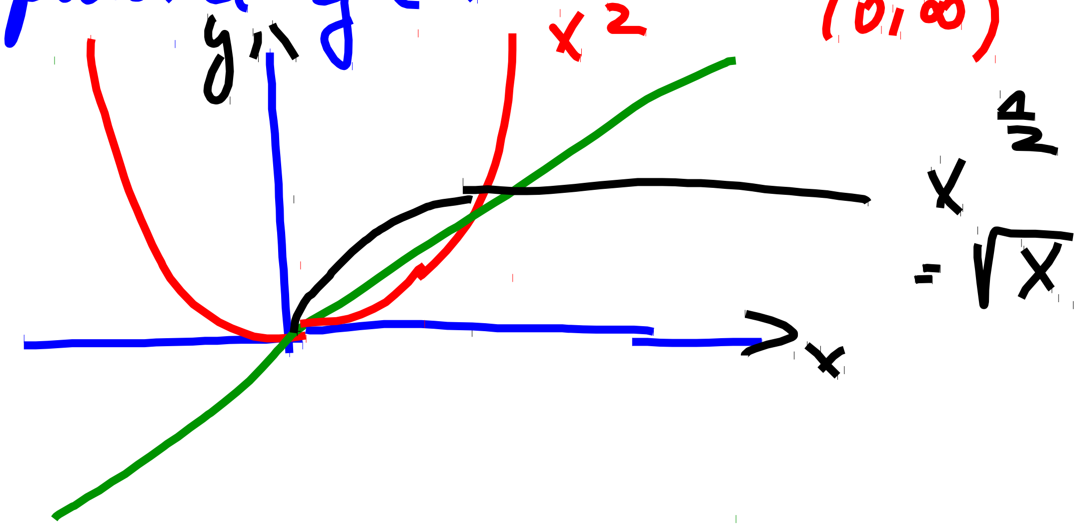
$r^{\frac{1}{q}} = y \in (0,\infty)$ .. vlastnosti $y^q = r$

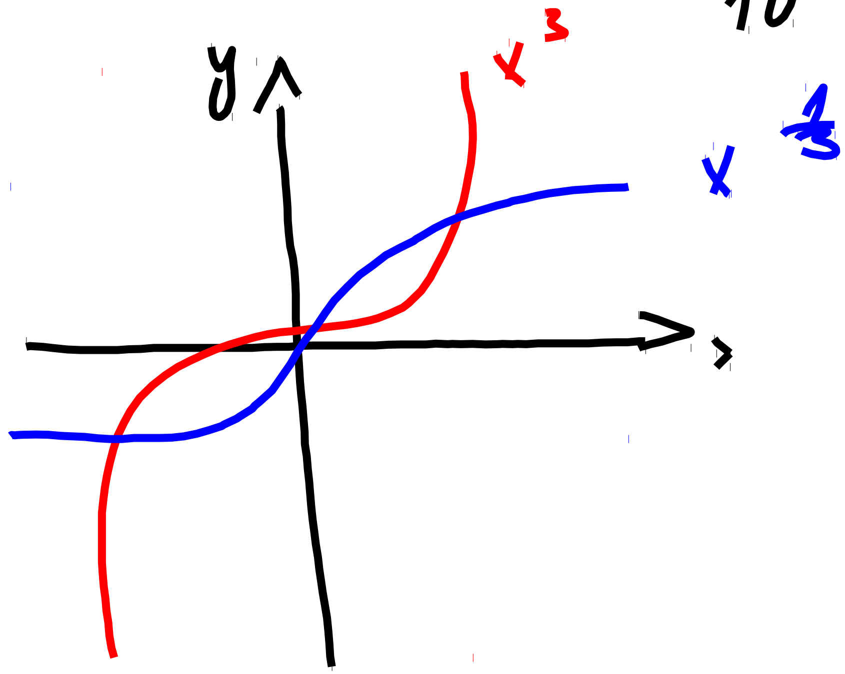
je inverzní funkce k funkci $g(x) = x^q$

$(0,\infty)$

$r^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{r}$

$r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}$





bereme jen na $(0, \infty)$

Definice

$p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{N}$

$x \in (0, \infty)$

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Opět platí

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^0 = 1$$

$$1^a = 1$$

mocniny s reálnými exponenty

$$a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$a < r < b$$

$v \in (1, \infty)$

$$v^a < v^b$$

$$v^a < v^r < v^b$$

Všechna pravidla pro počítání jsou zachována

Exponenciální funkce

$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

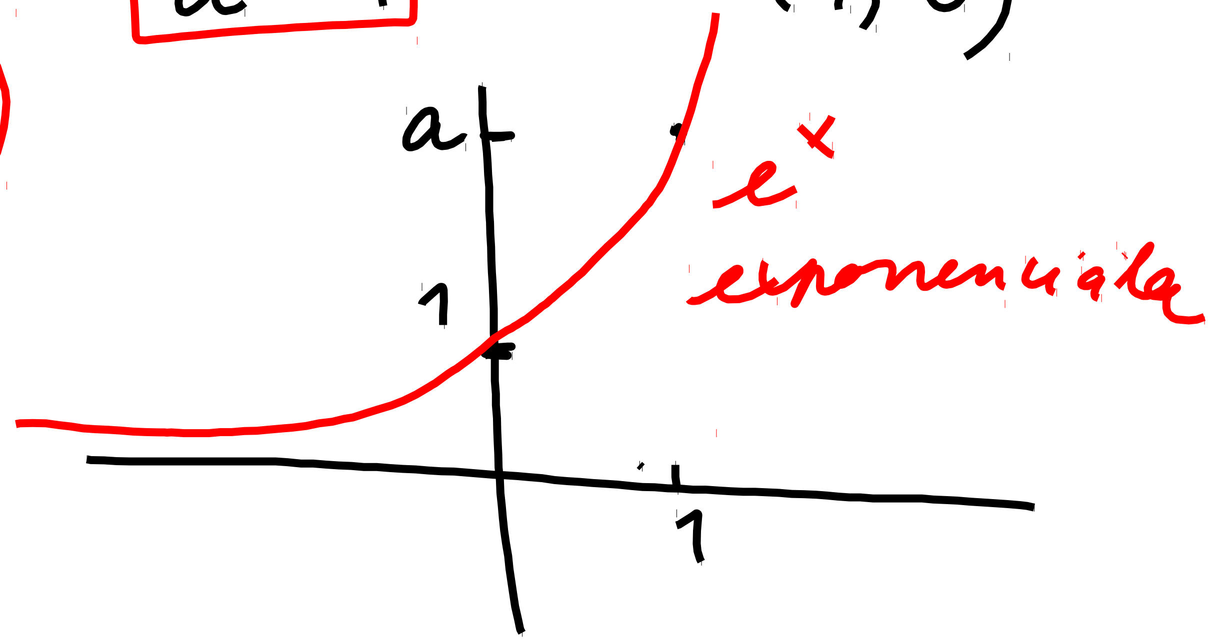
Exponenciální funkce $f(x) = a^x$

$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = (0,\infty)$

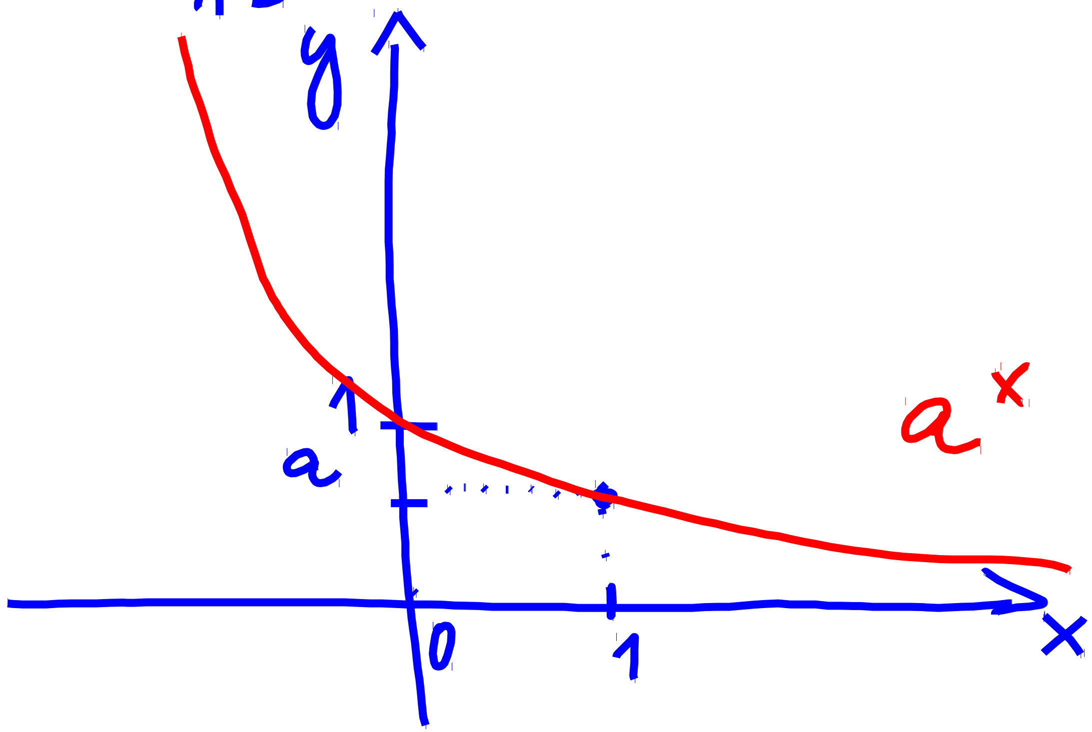
mocnina a proměnná

$\boxed{a > 1}$ $a \in (1,\infty)$



$a \in (0,1)$

klesající prostá



$\frac{1}{x^n}$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $\qquad$ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

Logaritmická funkce

je inverzní funkce k funkci exponenciální

Logaritmus o základu $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$\log_a x = y$ s vlastností, že

$a^y = x$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

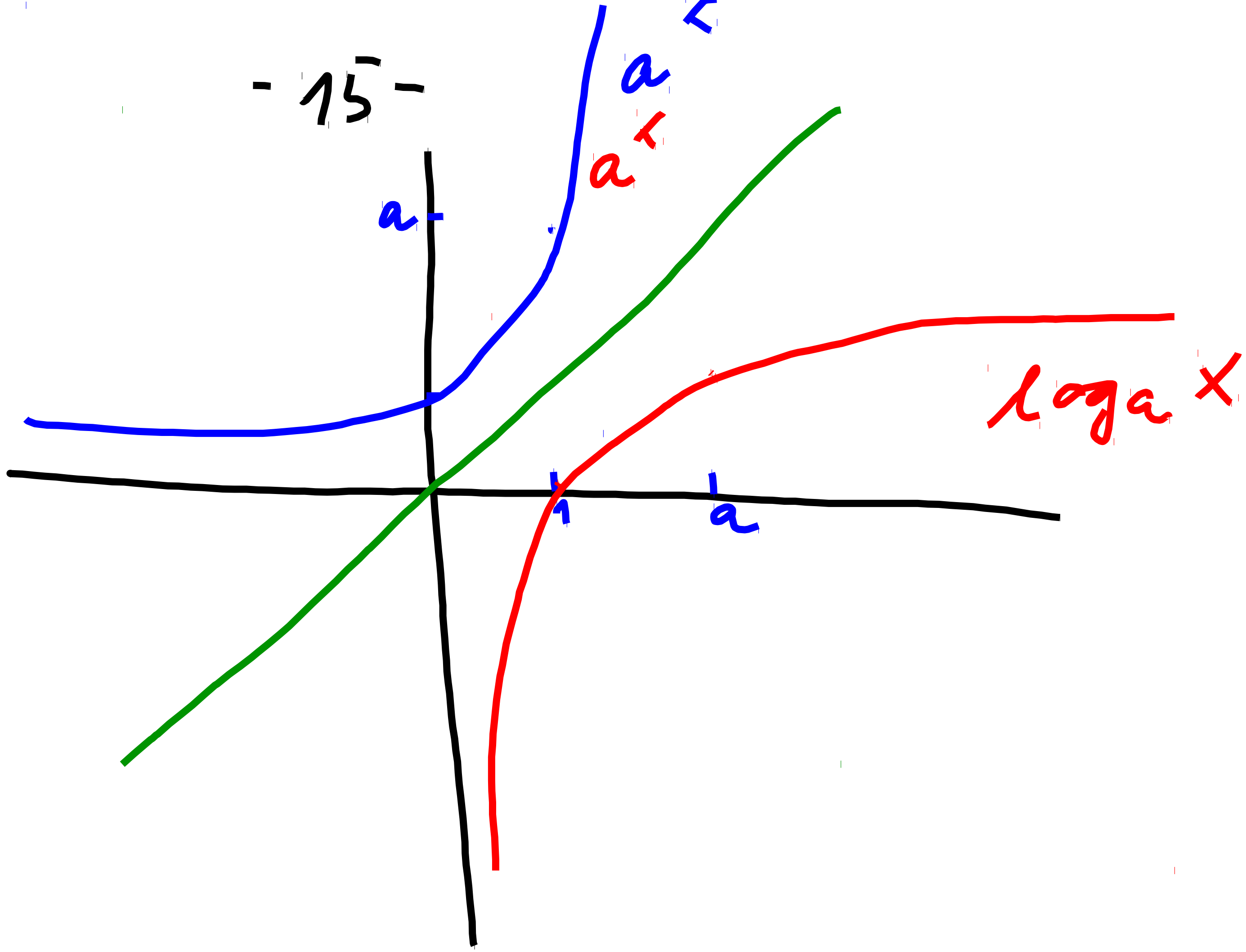
$g(x) = a^x$

inverzní funkce je

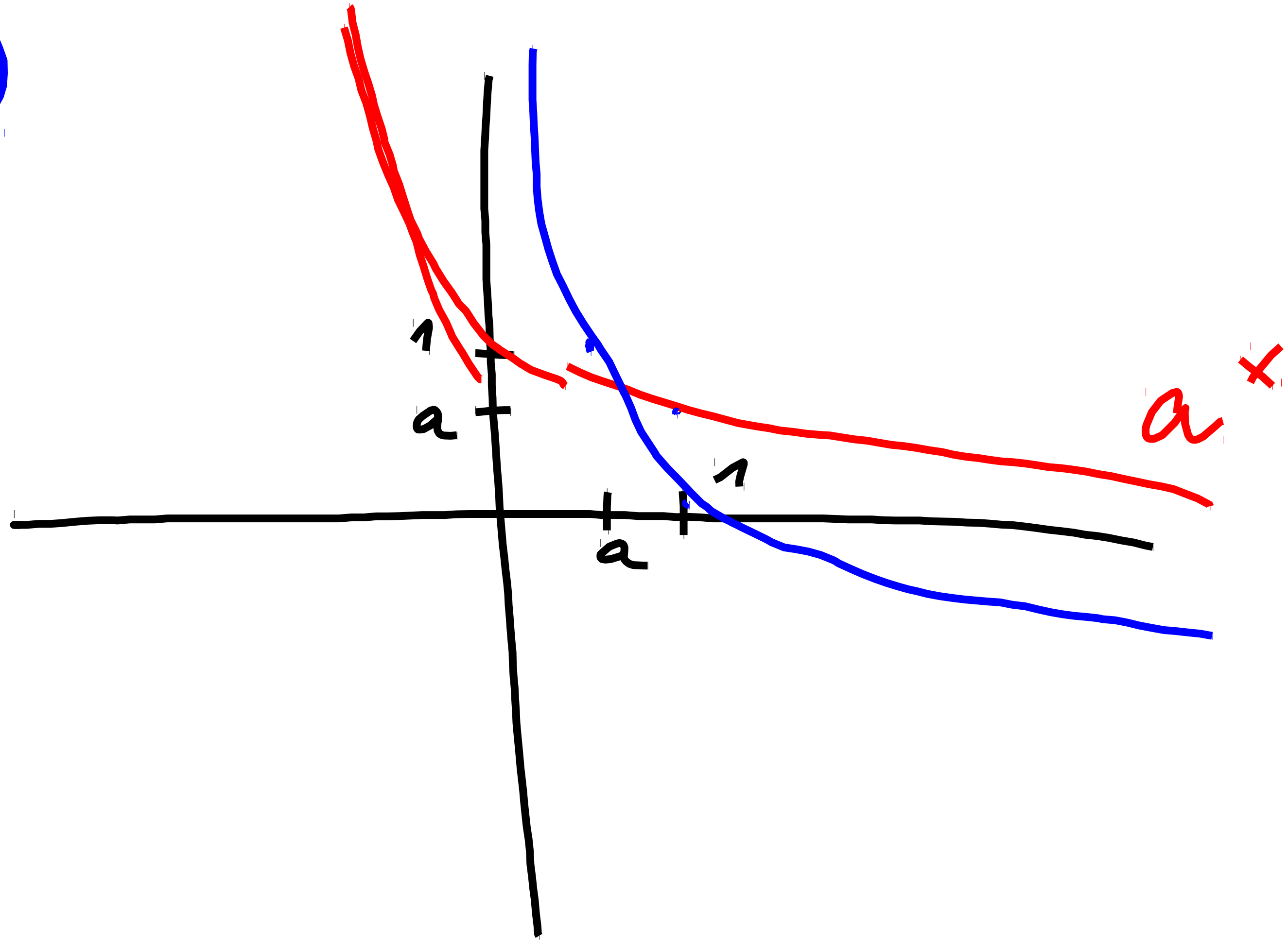
$f(x) = \log_a x$

$\log_a : \underbrace{(0,\infty)}_{D(\log_a)} \longrightarrow \mathbb{R} = H(\log_a)$

$a \in (1, \infty)$



$a \in (0,1)$



Pravidla pro počítání s logaritmy

(1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(2a) $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$

(3) $\log_a 1 = 0$

(4) $\log_a a = 1$

(5) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

(6) $\log_a(x^b) = b \log_a x$

$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

Důkaz (1) jestliže $a^u = a^v$, pak $u = v$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$a^{\underline{\log_a x + \log_a y}} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$

$$= x \cdot y = a^{\underline{\log_a (x \cdot y)}}$$

Rovnají se exponenty

Příklad

Řešte rovnici

$$\frac{\log_{10}(35 - x^3)}{\log_{10}(5-x)} = 3$$

$$35 - x^3 > 0$$
$$x^3 < 35$$
$$x < \sqrt[3]{35} \in (3, 4)$$

$$5 - x > 0$$
$$x < 5$$

$$\sqrt[3]{35} < 5$$

$\log_{10}(5-x) = 0$ právě když $5 - x = 1$
$$x = 4$$

Def. obor je $(-\infty, \sqrt[3]{35})$

$$\frac{\log_{10}(35 - x^3)}{\log_{10}(5 - x)} = 3 \quad \Big| \; \log_{10}(5 - x)$$

$$\log_{10}(35 - x^3) = 3 \cdot \log_{10}(5 - x)$$

$$\log_{10}(35 - x^3) = \log_{10}(5 - x)^3$$

$$35 - x^3 = (5 - x)^3$$

$$35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 2, 3$$

$$2, 3 \in (-\infty, \sqrt[3]{35}$$

Dekadický logaritmus je log při základu 10

Často místo $\log_{10}$ píšeme $\log$

$$pH = -\log \left(c_{H_3O^+} \right)$$

koncentrace

HO^-

10^{-7}

ve vodě

$10^{0} - 10^{-6}$

$$c_{H_3O^+} \cdot c_{HO^-} = 10^{-14}$$

Eulerovo číslo

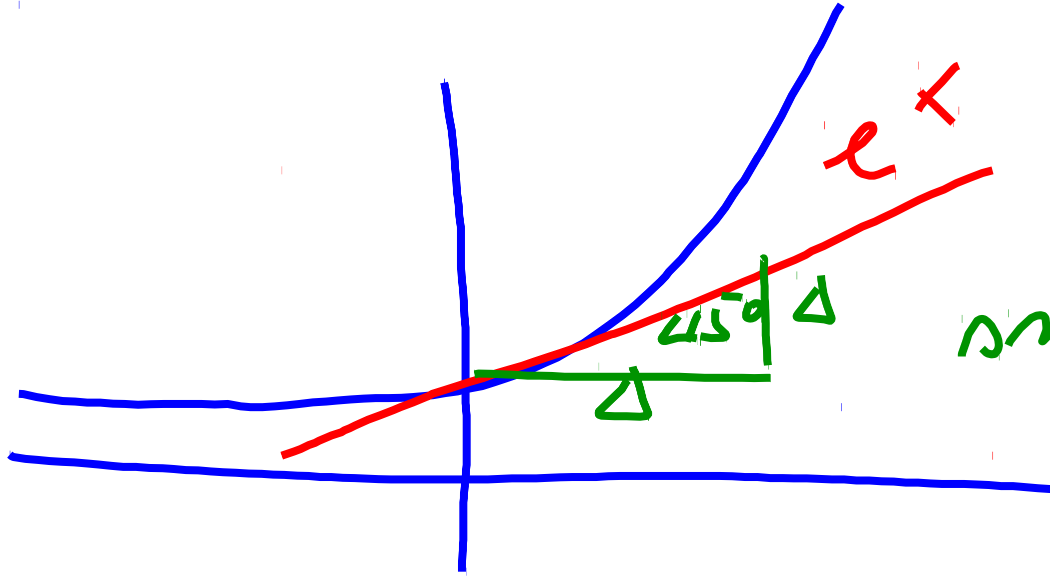
$e = 2{,}71828 \ldots\ldots$

lze přibližně spočítat $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ velké

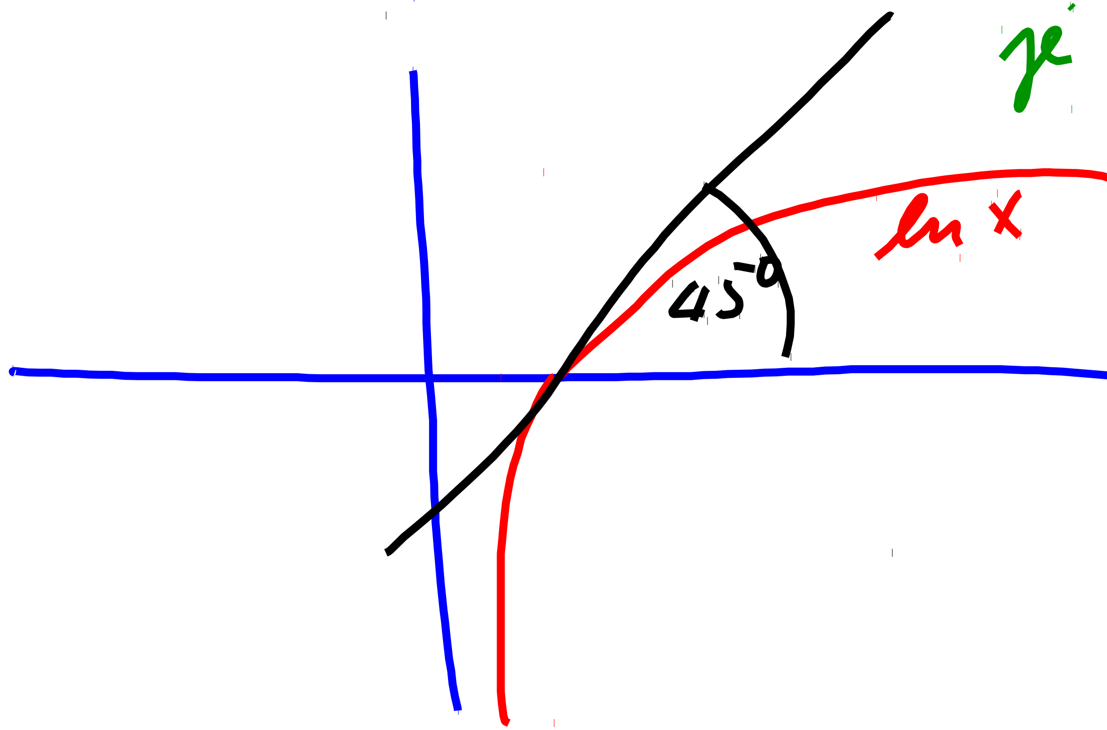
nebo
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Často používáme funkci $\quad n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$

e^x a funkci $\log_e x = \ln x$



směrnice tečny v bodě (0,1) je rovna 1



Tečna v bodě (1,0) má směrnici 1