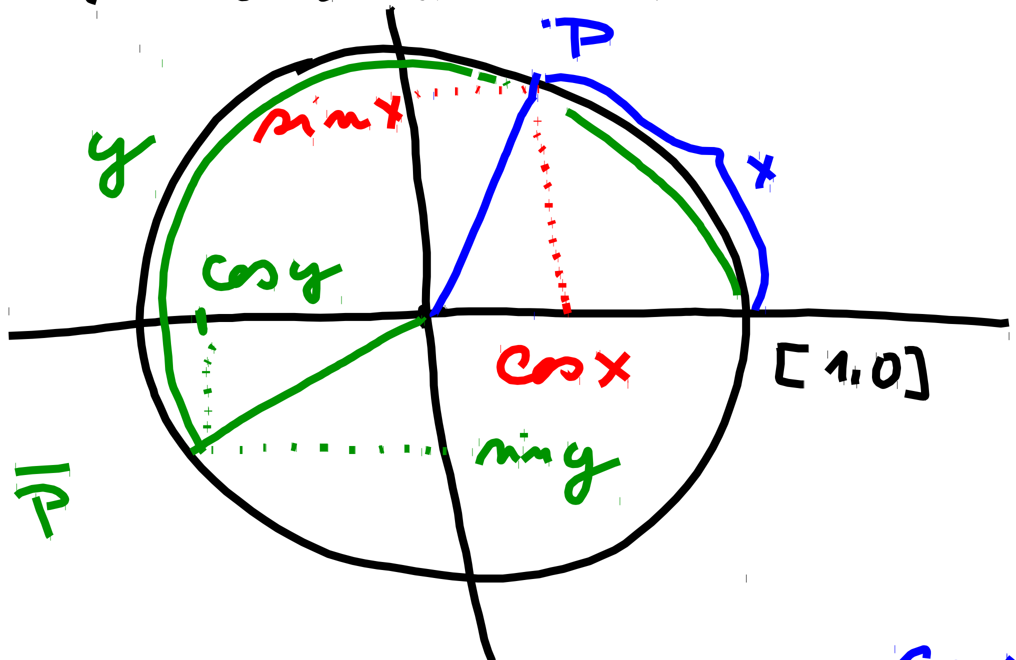
Goniometrické funkce

jednotková kružnice se středem v [0,0]



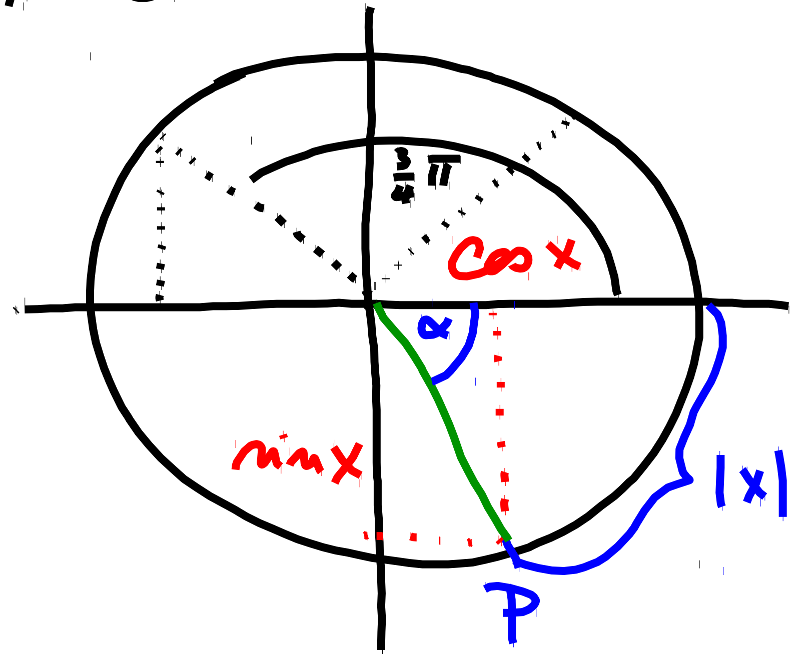
$x \in [0, \infty)$

$D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$x < 0$



Délka kružnice o poloměru 1 je číslo 2π

π iracionální

$\pi = 3{,}14159\ldots$

$\alpha \sim x$

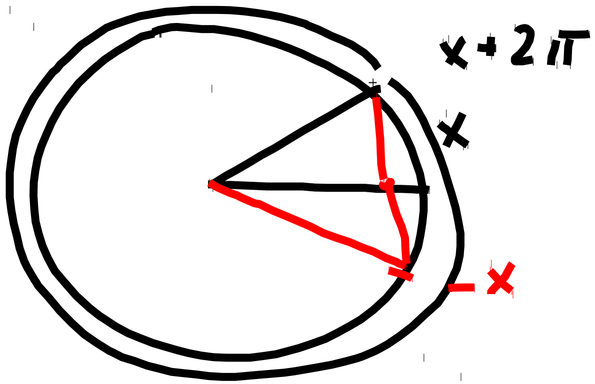
$180^\circ \sim \pi$

Chceme spočítat

$$\cos\frac{3}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{3}{4}\pi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	$\sqrt{0}/2 = 0$	1	0	$-$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2 = 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$	0	$-$	0
π	0	-1	0	$-$
$3/2\,\pi$	-1	0	$-$	0
2π	0	1	0	$-$



$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

Cos a sin jsou periodické funkce s periodou 2π

tg a cotg jsou periodické s periodou π

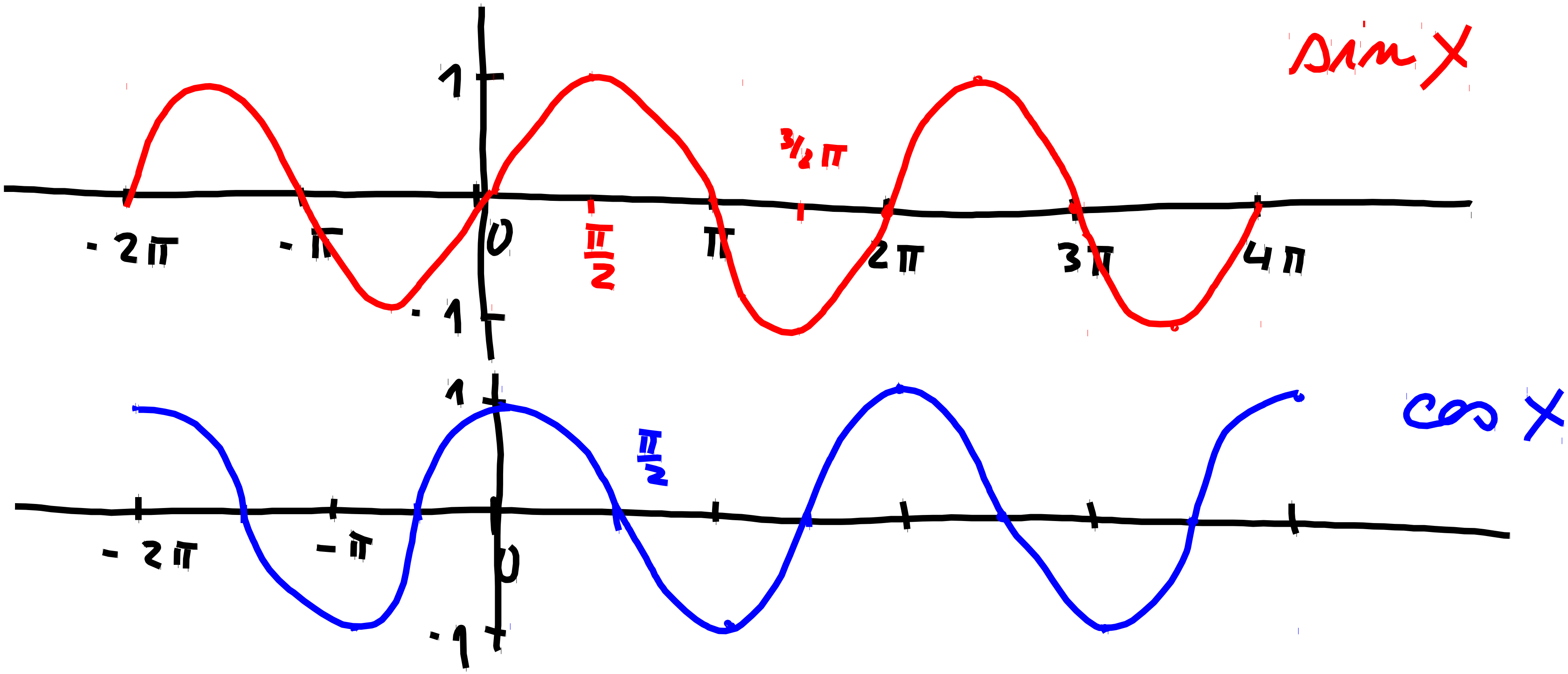
$$\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}\, x$$
$$\mathrm{cotg}(x+\pi) = \mathrm{cotg}\, x$$

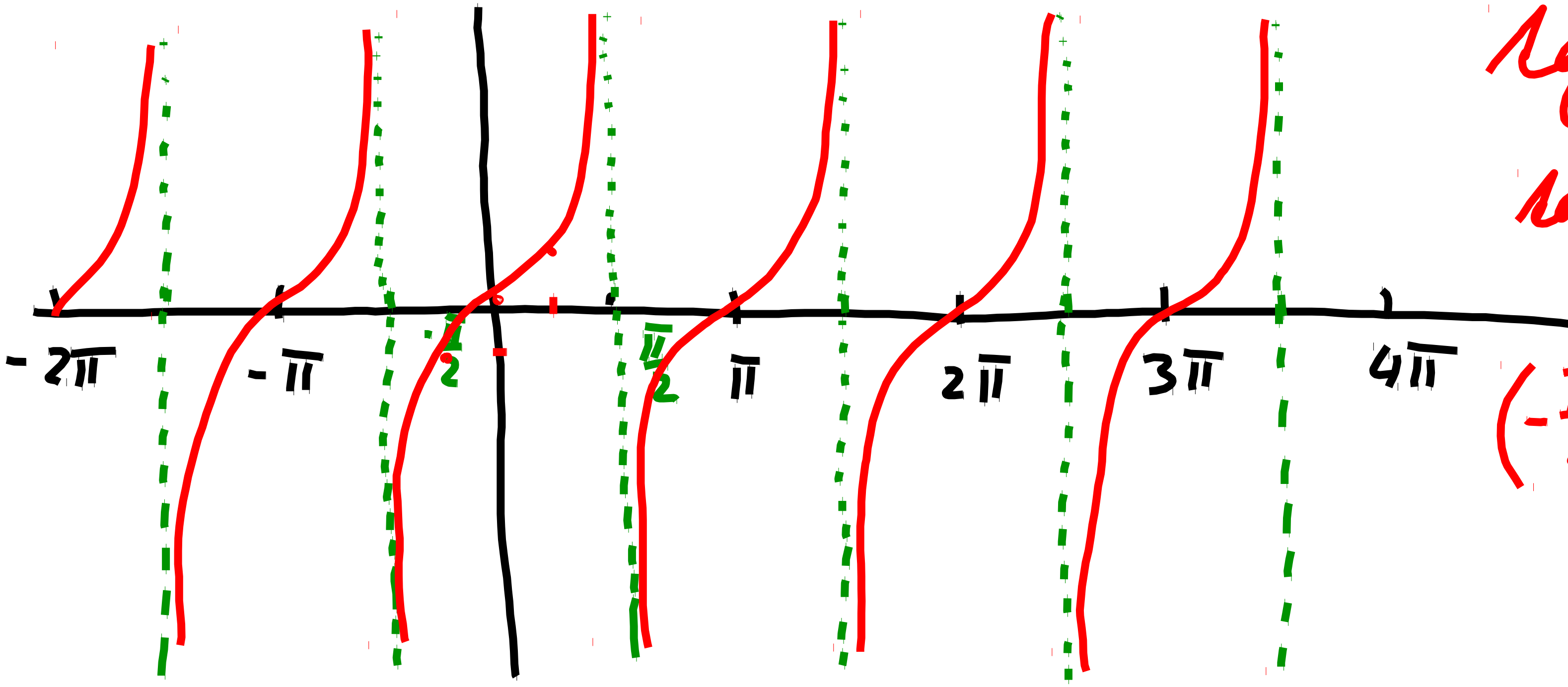
Funkce cos je sudá: $\cos(-x) = \cos x$

Funkce sin je lichá: $\sin(-x) = -\sin x$

$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ jsou liché funkce

Grafy gon. funkcí

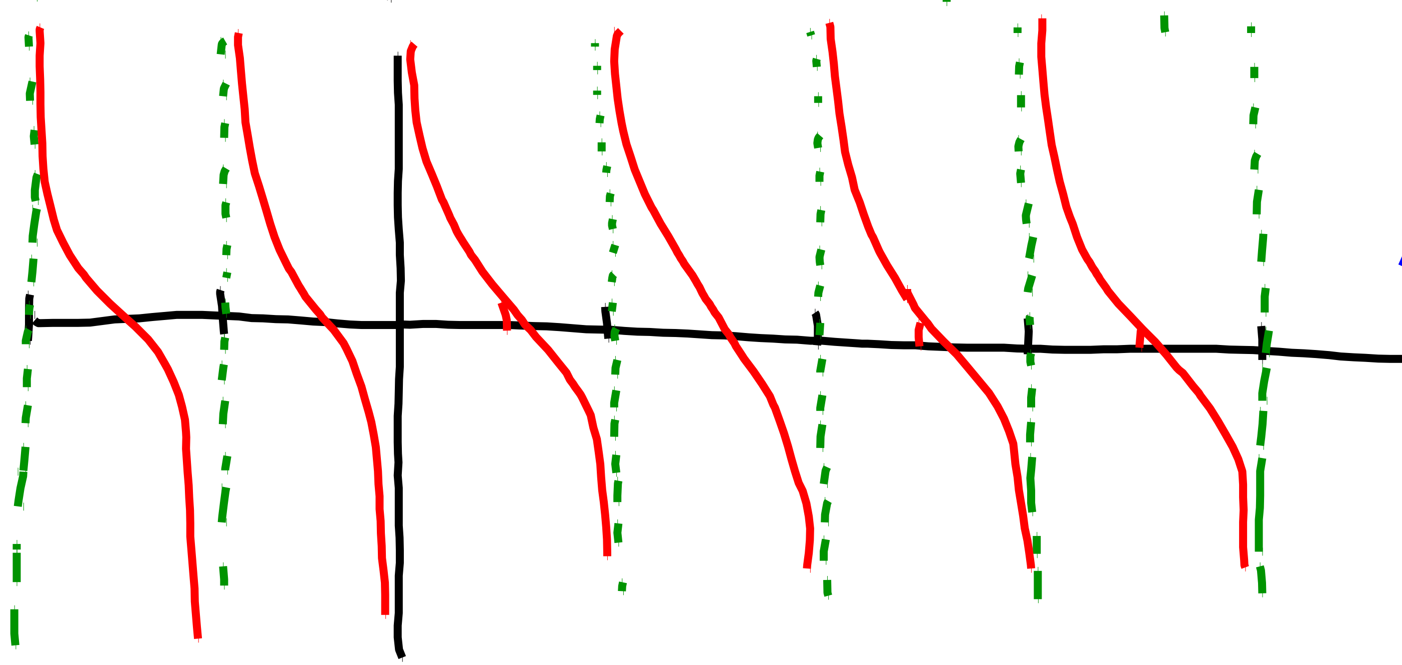




$\mathrm{tg}\, x$

tg je rostoucí na intervalech

$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

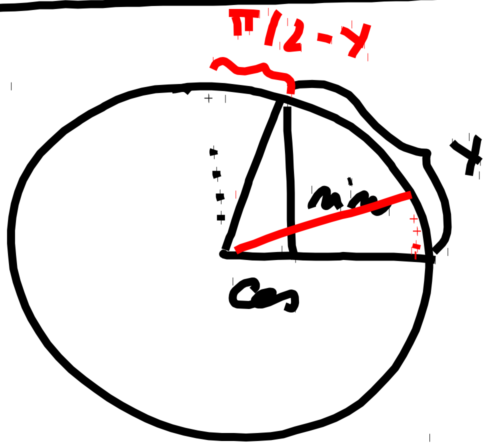


$\mathrm{cotg}\, x$

je klesající na intervalech

$\left(k\pi, (k+1)\pi\right)$

Základní vztahy



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ Pythag. věta

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} = 1$$ definice

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$\sin(-y) = -\sin y$

Součtové vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

$$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$$

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

- 9 -

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

lze odvodit
ze součtových vzorců
pro sin a cos
na cvičení

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x \dots}{} \quad \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\underbrace{\alpha+\beta}_{x}) + \sin(\underbrace{\alpha-\beta}_{y}) = 2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$x = \alpha+\beta$, $y = \alpha-\beta$, $x+y = 2\alpha$, $\alpha = \dfrac{x+y}{2}$, $x-y = 2\beta$

$\beta = \dfrac{x-y}{2}$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$

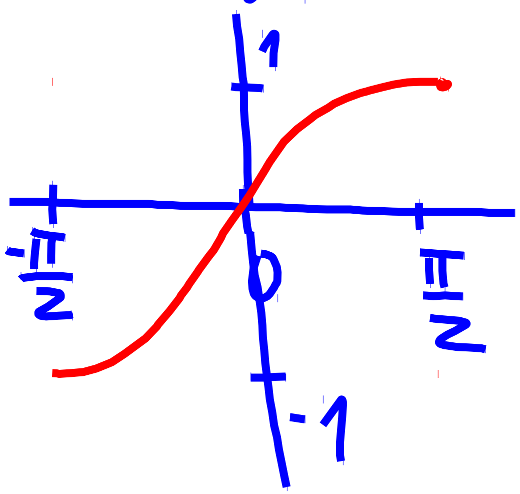
$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Inverzní funkce ke goniometrickým cyklometrické funkce

sin je rostoucí na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

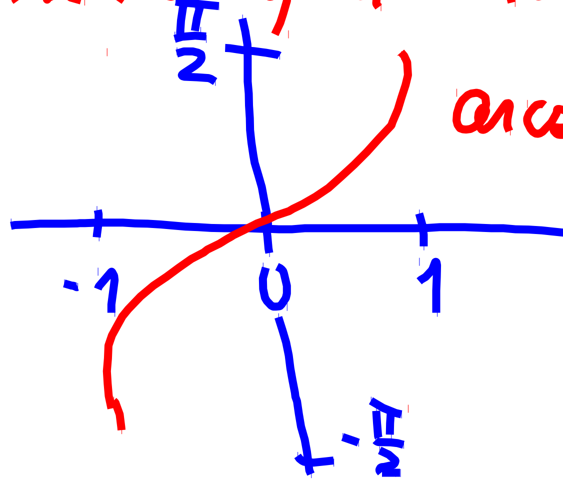


$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

Inverzní funkce

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

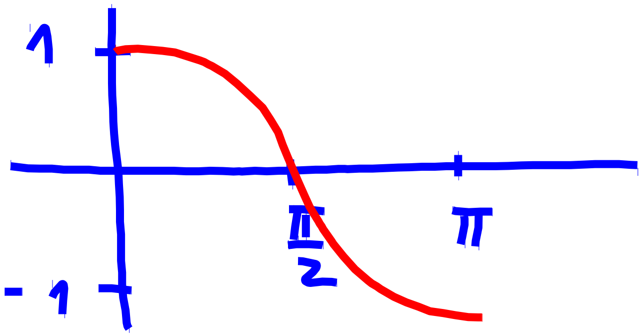
se nazývá arcus sinus.



arcsin je rostoucí

cos je klesající na intervalu $[0, \pi]$

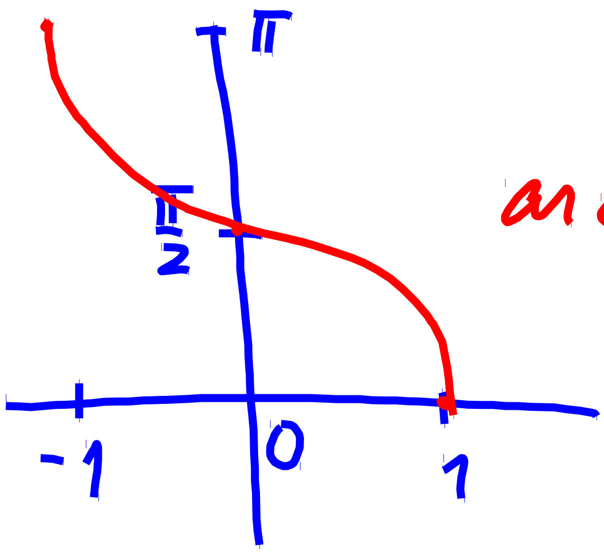
$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$



Inverzní funkce

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

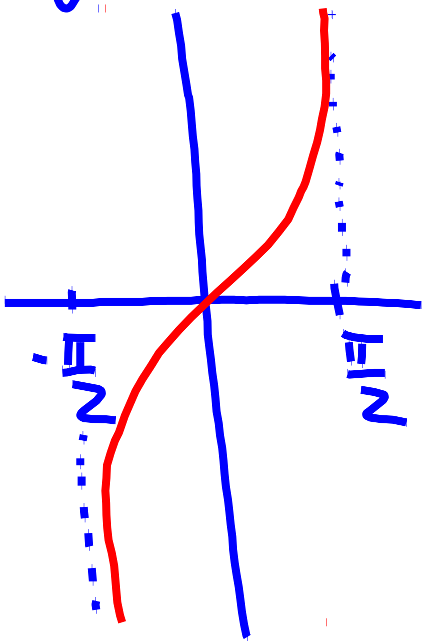
se nazývá arcus cosinus



arccos je klesající

tg je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

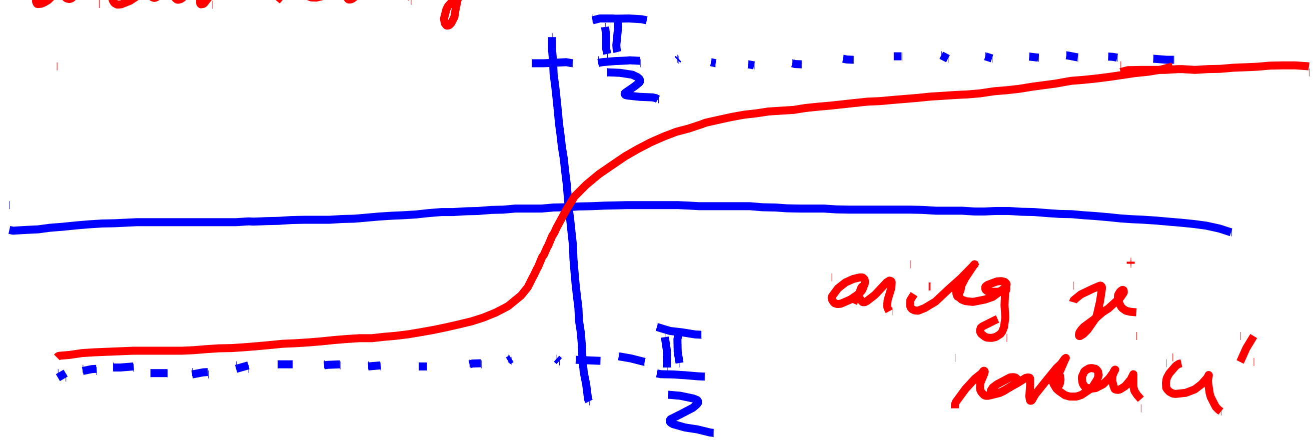
$$\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$



Inverzní funkce

$$\operatorname{arctg}: (-\infty, \infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

arcus tangens



arctg je rostoucí

Hyperbolické funkce

cosinus hyperbolický $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

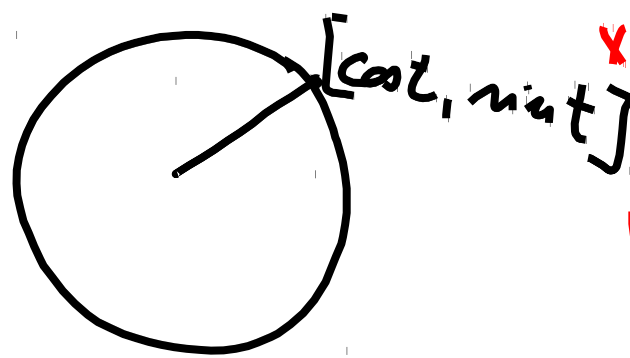
sinus hyperbolický $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

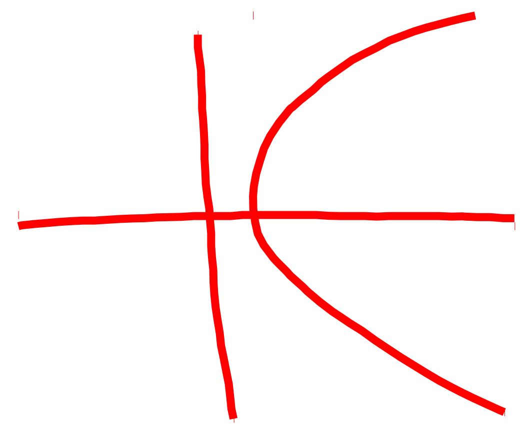
Rovnice hyperboly je $x^2 - y^2 = 1$

Křivka $\{[\cos t, \sin t] \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ je kružnice

Rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$



Křivka $\{[\cosh t, \sinh t],\ t \in \mathbb{R}\}$ je hyperbola

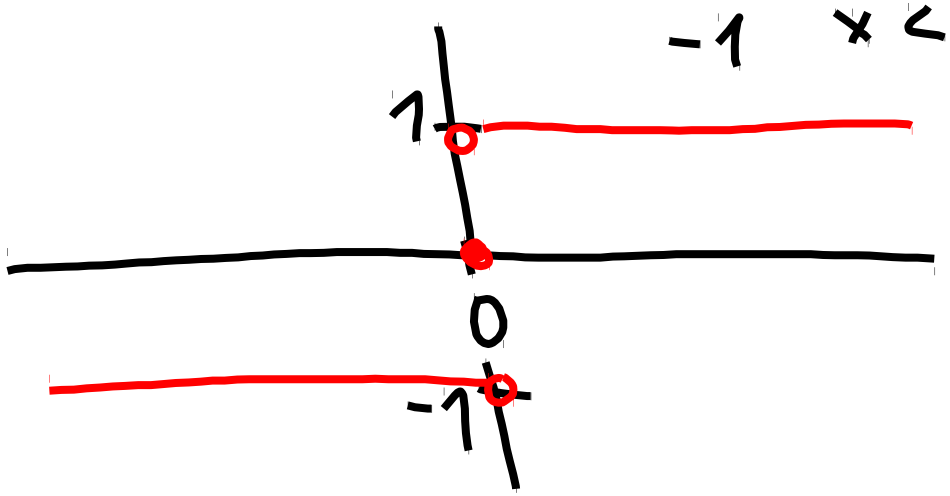


Spojitost funkcí

Vředny funkce, ze kterými jsme pracovali, byly spojité

Příklad nespojité funkce

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Tato funkce není spojitá v bodě 0.

(funkce f

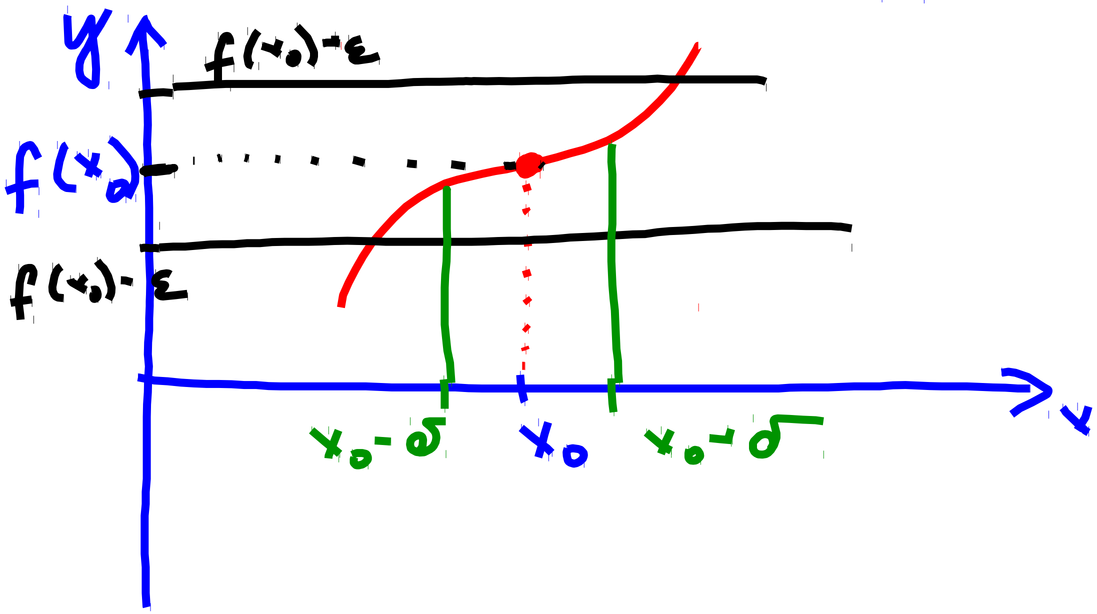
Spojitost v bodě x_0 intuitivně

Když se x blíží k x_0, pak se $f(x)$ blíží k $f(x_0)$

Matematicky Funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže je definována na nějakém okolí bodu x_0 – tedy na nějakém intervalu $(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$ a platí

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \text{ je } f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$$

pro všechna $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ že pro všechna $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$


y
f(x0)+ε
f(x0)
f(x0)-ε
x0-δ
x0
x0+δ
x