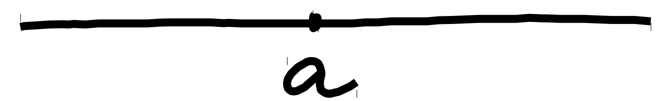
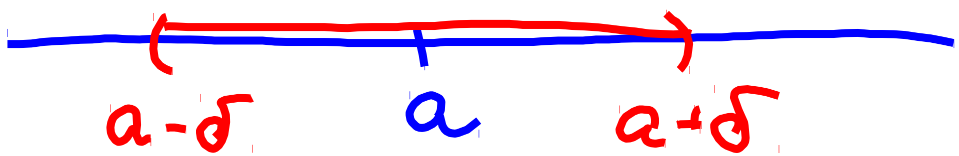
Spojitost a limita funkcí

Okolí bodu a $\qquad a \in \mathbb{R}$



je každý otevřený interval tvaru $(a-\delta, a+\delta)$, kde $\delta > 0$



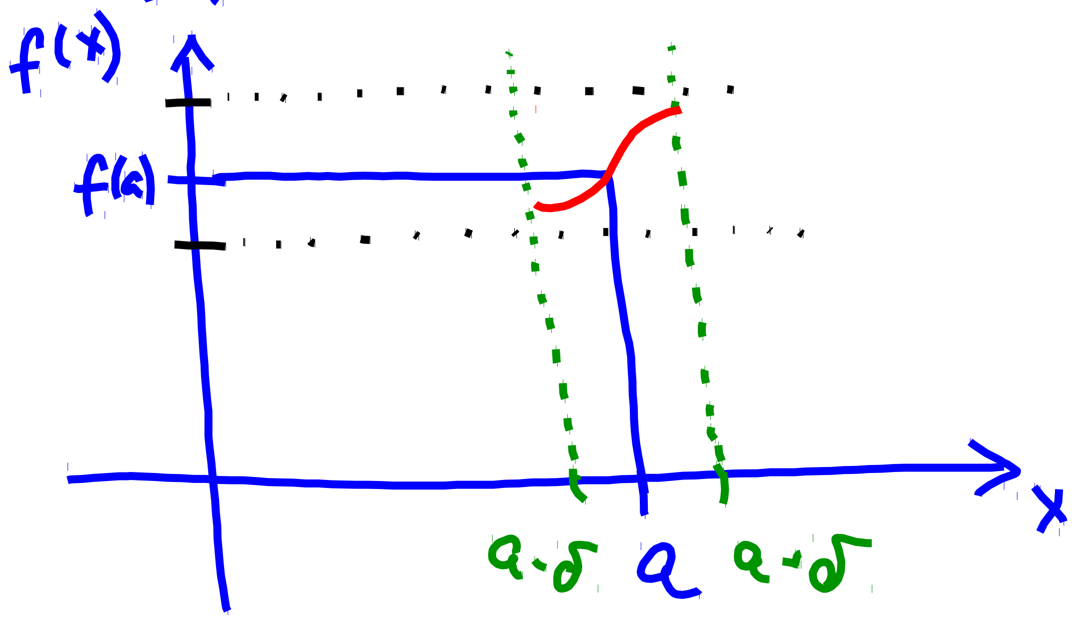
Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže je definovaná na nějakém jeho okolí a platí

Pro každé okolí čísla $f(a)$ existuje okolí čísla a

$\forall \varepsilon > 0 \ (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ $\quad \exists \delta > 0 \ (a-\delta, a+\delta)$

tak, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je

$f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.



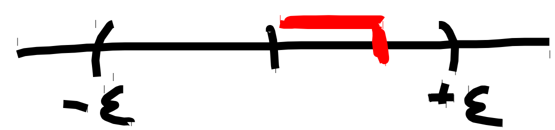
Příklad: Funkce $f(x) = 2x+3$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall\, \varepsilon > 0$ chceme najít $\delta > 0$ tak, že

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$



$$f(x) - f(x_0) = (2x+3) - (2x_0+3)$$

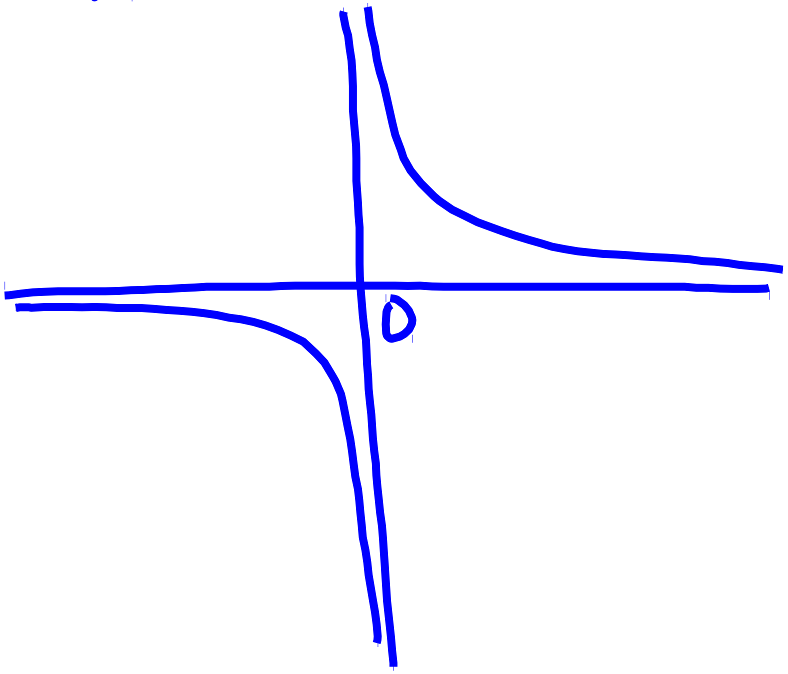
$$= 2x - 2x_0 = 2(x - x_0)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x - x_0 < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \underbrace{2\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{= -\varepsilon} < 2(x - x_0) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ukázali jsme, že lineární funkce je spojitá v každém bodě.

<u>Elementární funkce</u> jsou spojité na svých intervalech, které leží v definičním oboru

$f(x) = \frac{1}{x}$



$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Věta 1 Nechť f a g jsou funkce spojité v bodě x_0. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},$$ jestliže $g(x_0) \neq 0$.

Věta 2 Nechť g je spojitá v bodě a. Nechť f je spojitá v bodě $g(a)$. Pak $f \circ g$ je funkce spojitá v bodě a.

Použití: funkce $f(x) = x$ je spojitá (umíme dokázat).

Potom funkce $g(x) = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-krát}} = x^n$ je spojitá.

Funkce $h(x) = a \cdot x^n$, kde $a \neq 0$, je spojitá.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ je spojitá.

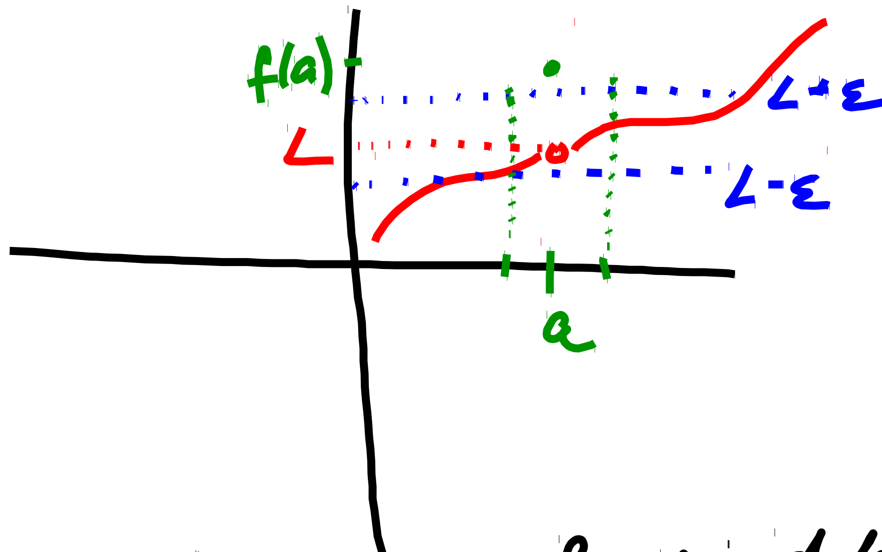
Racionální funkce $P(x) = \dfrac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_p x^p + \dots + b_0}$ je spojitá na intervalech, kde je jmenovatel $\neq 0$.

<u>Věta 3</u> Je-li $f: (a,b) \to (c,d)$ prostá a spojitá, pak inverzní funkce $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ je rovněž spojitá.

$\sin: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$ spojitá

$\arcsin: (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ spojitá.

Limita funkce v bodě a



budeme psát $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Nechť funkce f je definována v nějakém intervalu $(a-\Delta, a+\Delta) \setminus \{a\}$

Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže platí

Pro každé okolí bodu L existuje okolí bodu a

$\forall \varepsilon > 0 \quad (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \qquad \exists \delta > 0 \quad (a-\delta, a+\delta)$

tak, že pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

je $\quad f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Zřejmě pro f spojitou v bodě a je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Příklady

$$\lim_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16 \qquad x \neq -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) \qquad \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

může být $a \in \mathbb{R}$, nebo $a = \pm\infty$

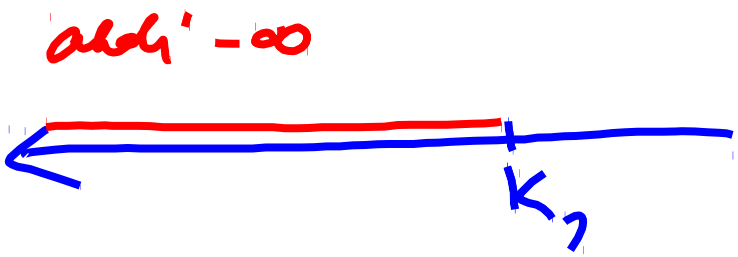
$L \in \mathbb{R}$, nebo $L = \pm\infty$

Okolí $+\infty$ jsou všechny intervaly (K,∞)

Okolí $-\infty$ jsou všechny intervaly $(-\infty,K)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$\forall K_1 \ \exists K_2$ pro všechna $x \in (K_2,\infty)$ je $f(x) \in (-\infty,K_1)$



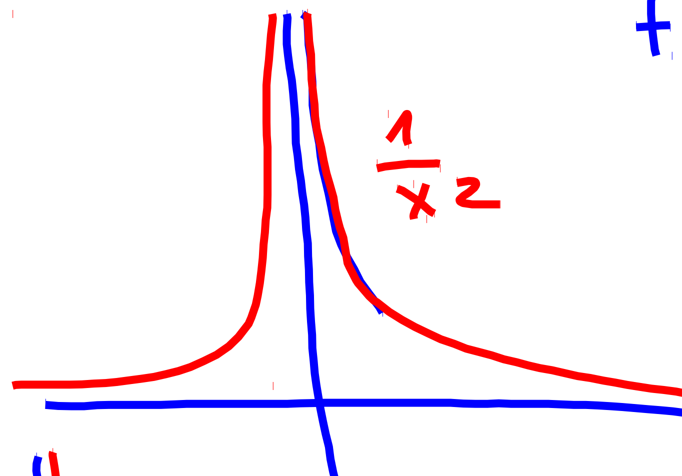
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$L = \infty$$

$\forall K\ \exists \delta > 0$ $\quad x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ $\quad f(x) \in (K, \infty)$

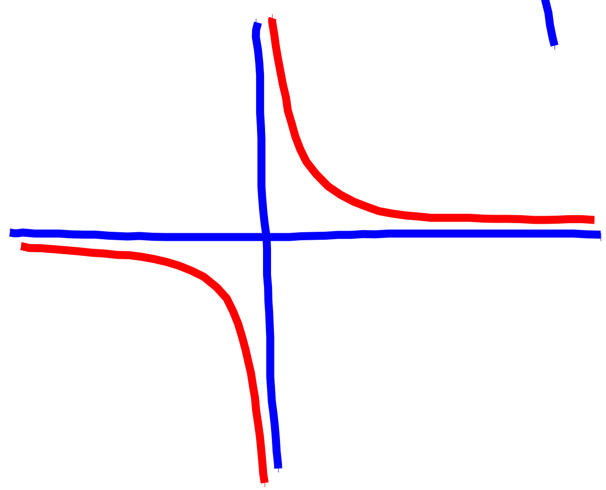
(K, ∞) $\quad (a-\delta, a+\delta)$ $\quad f(x) > K$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

neexistuje, ale



$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Definice

pravé okolí bodu a je $(a, a+\delta)$ $\delta > 0$

levé okolí bodu a je $(a-\delta, a)$ $\delta > 0$

<u>Limita zprava</u> $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak, že pro $x \in (a, a+\delta)$

$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ $(a, a+\delta)$ je $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

analogicky <u>limita zleva</u> $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$

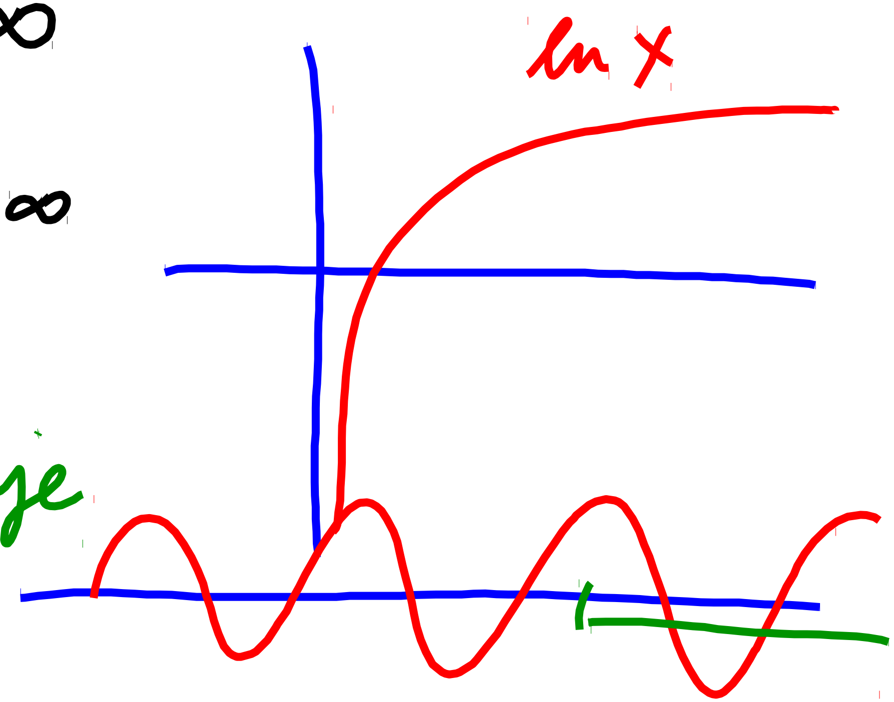
Příklad

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$



Příklad

$\lim_{x\to\infty} \sin x =$ neexistuje

Pravidla pro počítání s limitami

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$

Potom

(1) $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L \cdot M$

(3) Jestliže $M \neq 0$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Přitom $a \in \mathbb{R}$ nebo $\pm\infty$, L, M reálná čísla

Platí i pro $L = \pm\infty$ nebo $M = \pm\infty$ podle těchto pravidel

$s \in \mathbb{R}$

$s + \infty = \infty$

$s + (-\infty) = -\infty$

$s > 0$ $\quad s \cdot \infty = \infty$

$s < 0$ $\quad s \cdot \infty = -\infty$

$s = 0$ $\quad 0 \cdot \infty$ výsledek jak kdy

$s > 0$ $\quad s \cdot (-\infty) = -\infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$\frac{s}{\infty} = 0$

$\frac{s}{-\infty} = 0$

$\frac{\infty}{\infty} = 2$

Příklad

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 8x - 7) = \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \left(2 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \left\{ \lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{8}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{7}{x^2} \right)$$

$$= \infty \cdot (2 - 0 - 0) = \infty \cdot 2 = \infty$$

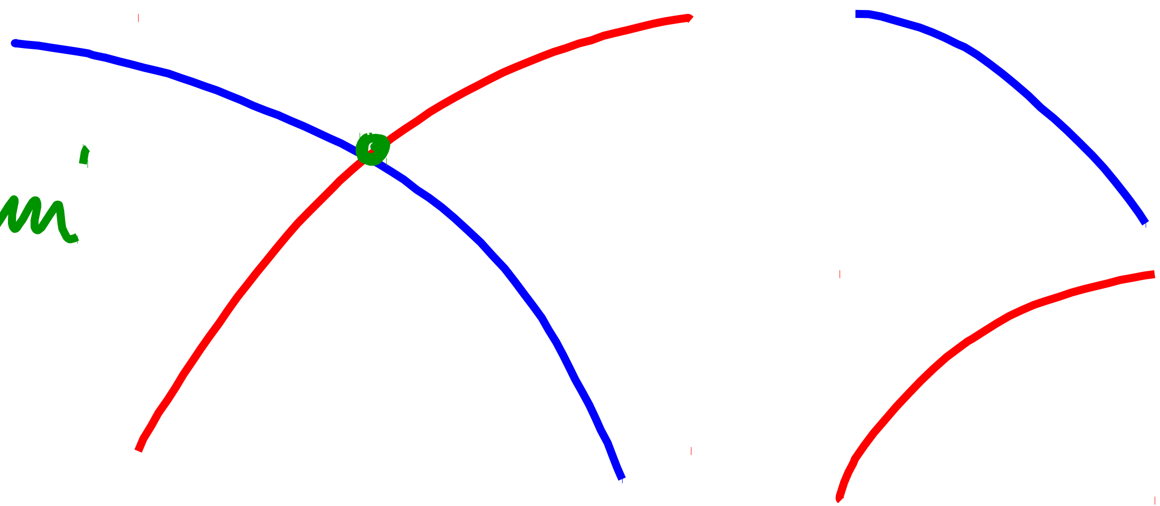
klesající rostoucí

$$\underbrace{\log_{10}(20-x)} = \log_{10}^3 x \qquad x = 10 \text{ je řešení}$$

$$\underline{x_1} < \underline{x_2} \Rightarrow 20 - x_1 > 20 - x_2$$

$$\Rightarrow \log_{10}(20-x_1) > \log_{10}(20-x_2)$$

1 řešení



žádné řešení

1 řešení máme $\Rightarrow$ žádné další neexistuje

Příklad Limity racionálních lomených funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8x-1}{3x^3-19x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\frac{19}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(3-\frac{19}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{19}{x}\right)}$$

$$= 0\cdot\frac{2}{3} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-84x^3+1}{12x^4+21x^3-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{x^4}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(4-\frac{84}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{\left(12+\frac{21}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\ \frac{\lim_{x\to-\infty}(4-\cdots)}{\lim_{x\to-\infty}(12+\cdots)} = (-\infty)\frac{4}{12} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0} = \infty \cdot \frac{a_n}{b_k} \qquad n > k$$

$$= \frac{a_m}{b_m} \qquad \text{με } n = k$$

$$= 0 \cdot \frac{a_n}{b_k} \qquad \text{με } n < k$$

$a_n \neq 0$, $b_k \neq 0$

Věta o dvou policajtech

Mějme tři funkce na $(a-\Delta, a+\Delta) \setminus \{a\}$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Jestliže $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, pak

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Příklad

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad D\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

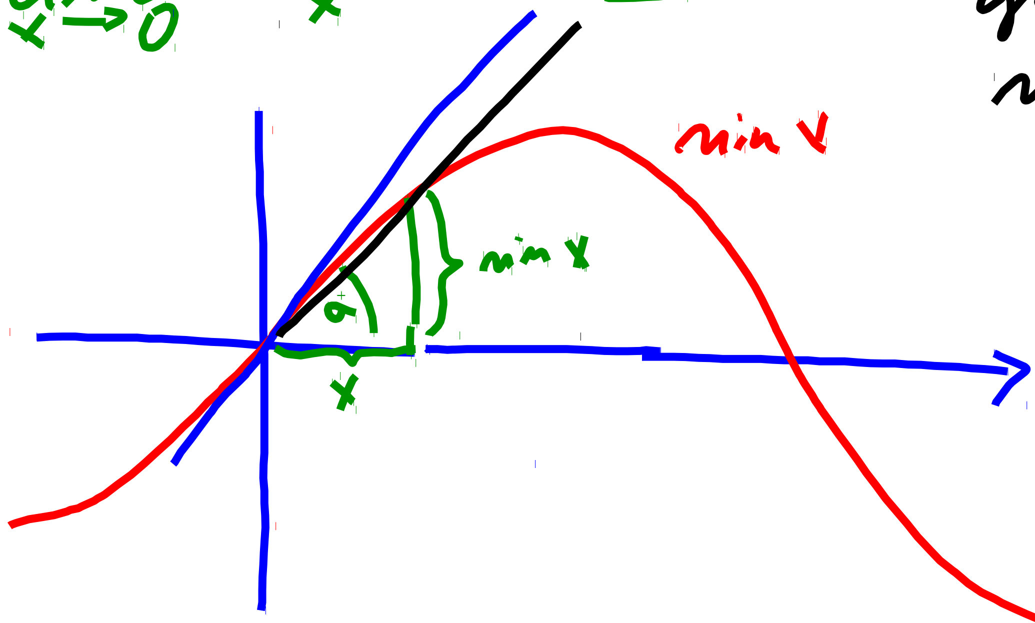
$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

Důležité limity

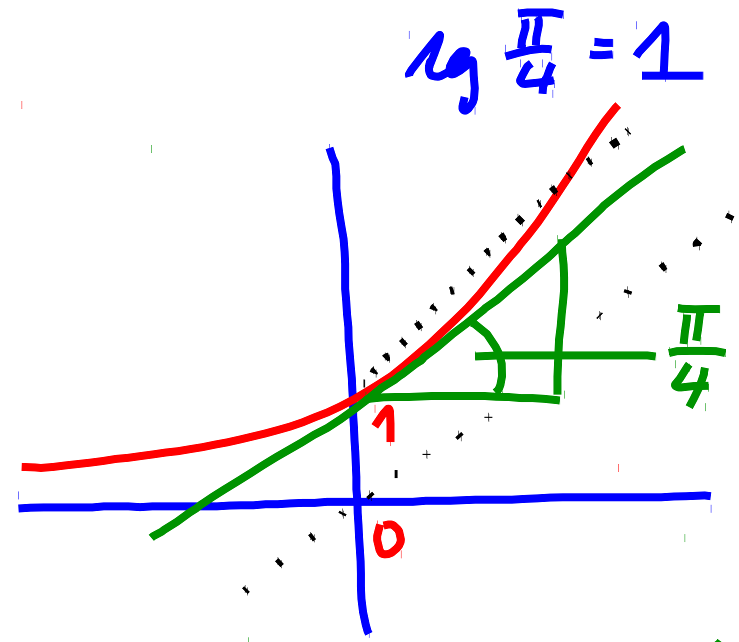
1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

směrnice tečny grafu funkce $\sin x$ v bodě $[0,0]$



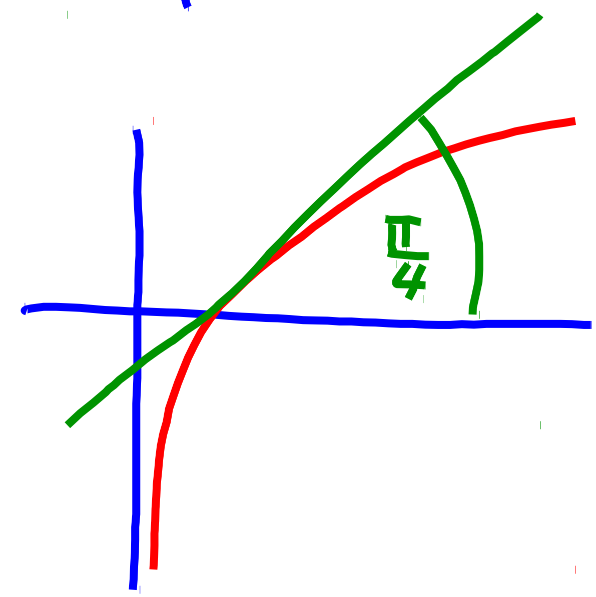
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

směrnice tečny grafu funkce e^x v bodě $[0,1]$ je 1



3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

směrnice tečny grafu funkce $\ln x$ v bodě $[1,0]$

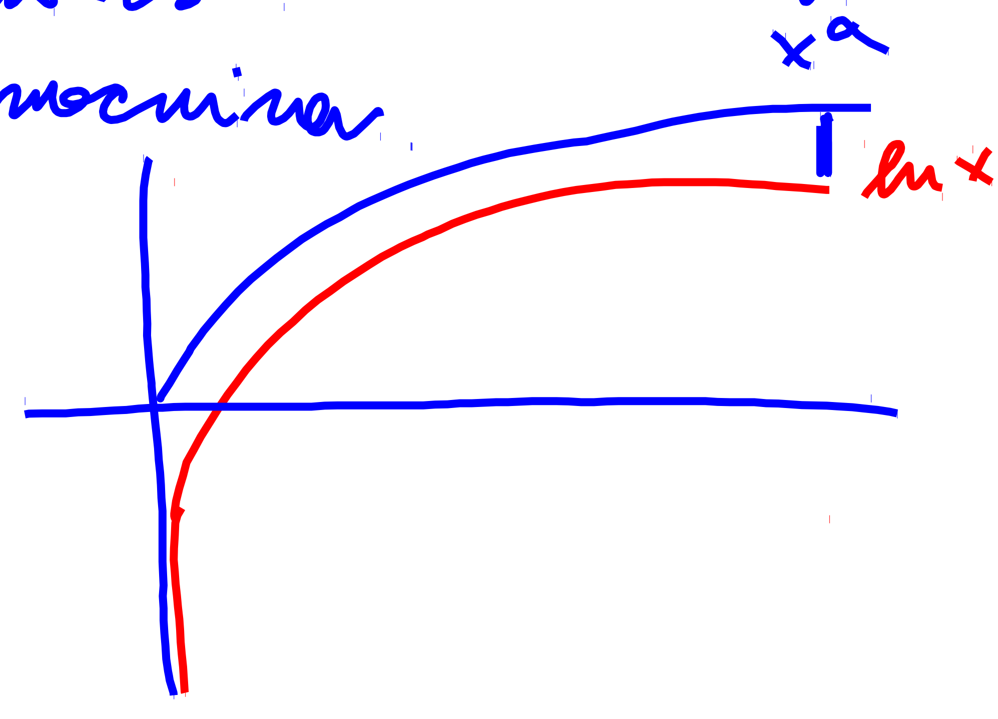


4) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{pro } n > 0$$

Exponenciála roste daleko rychleji než libovolná mocnina.

5) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0$$

Logaritmus roste daleko pomaleji než libovolná kladná mocnina



Věta o limitě složené funkce

Nechť funkce g je spojitá v bodě a a $g(a)=b$.

Nechť
$$\lim_{y \to b} f(y) = L$$

Potom
$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = L$$

$y = 5x$

Určit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{5}}$$

$$= \lim_{x \to 0} 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = \underline{\underline{5}}$$