Neurčitý integrál

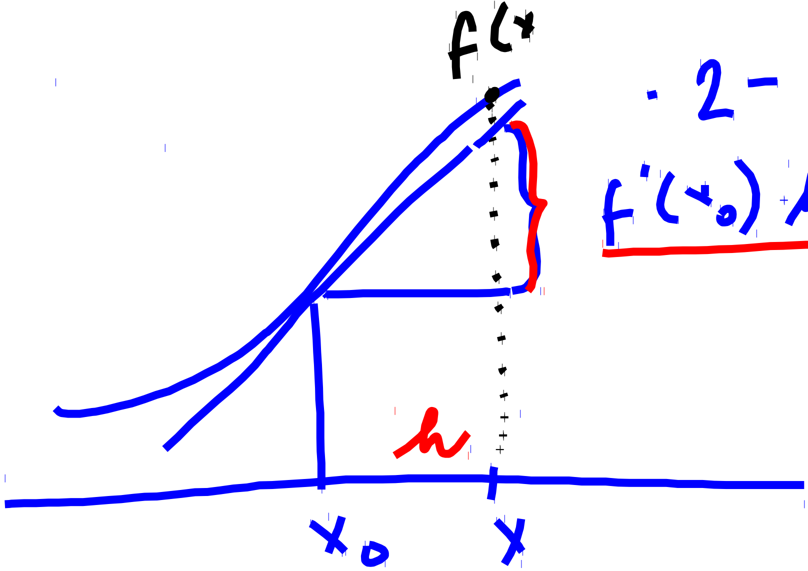
Dokončení dif. počtu

Diferenciál funkce f v bodě x_0

Derivace funkce f v bodě x_0 je

číslo $f'(x_0) = \lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 je lineární funkce, která číslu $h = x - x_0$ ... přírůstek argumentu přiřadí číslo $f'(x_0)h$ ... přibližný přírůstek funkce f



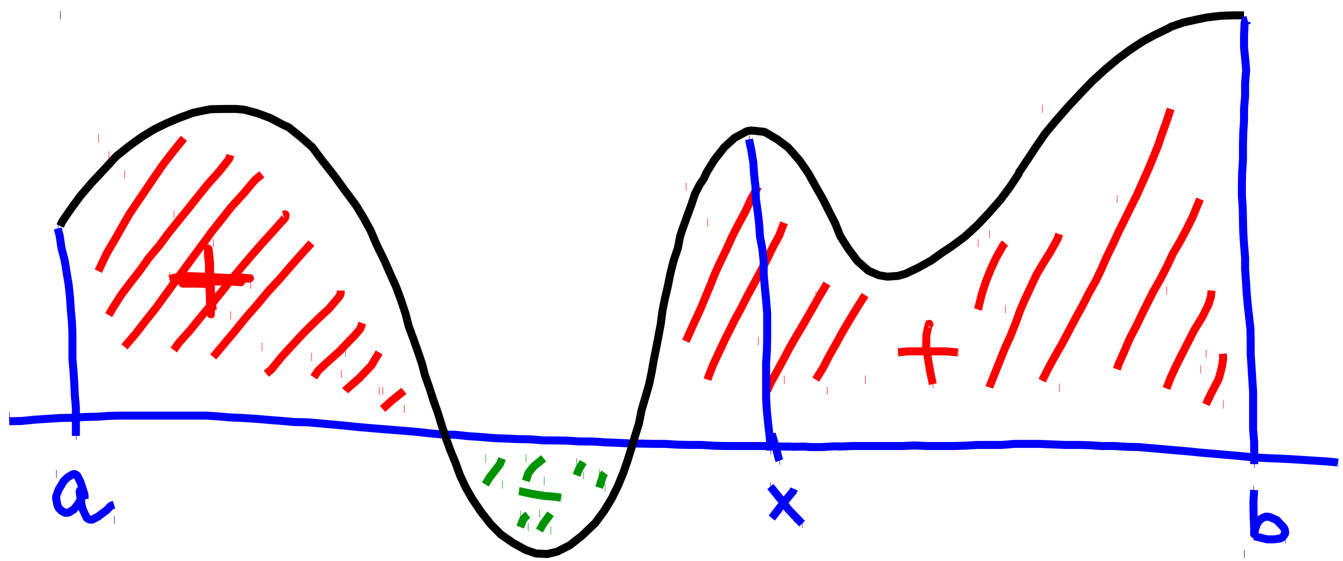
$\underline{f'(x_0)\,h} \sim f(x) - f(x_0)$

$y = f(x)$

$dy = f'(x_0)\,dx$

Integrální počet - motivace

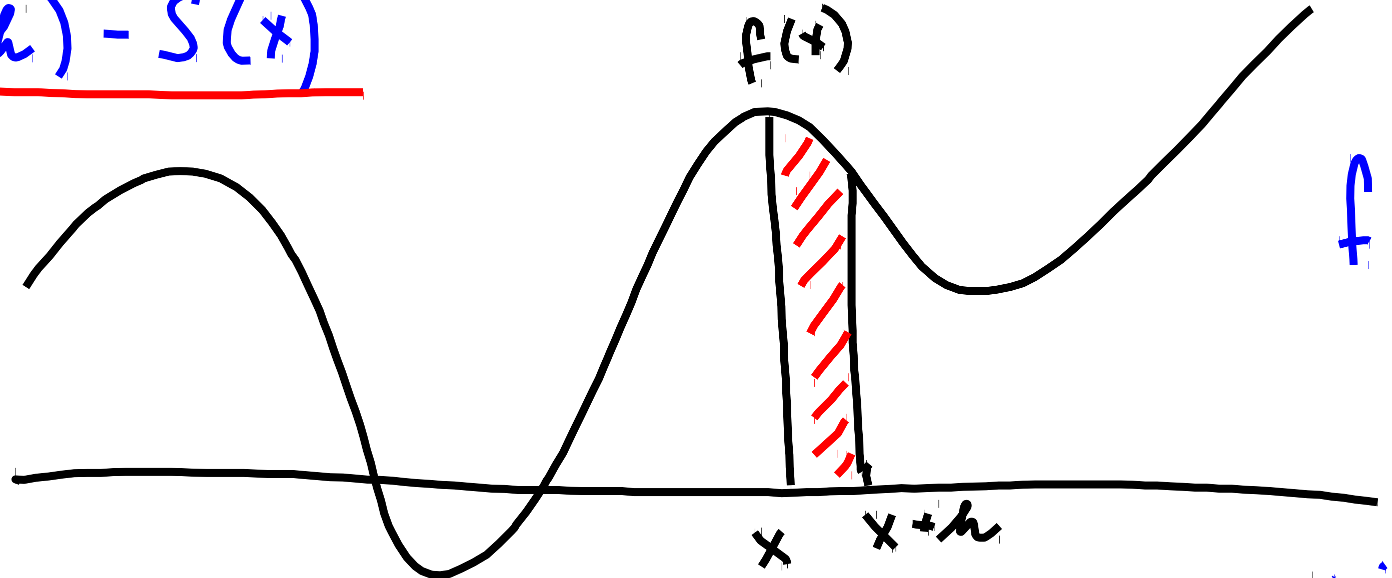
Chceme počítat obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x nad intervalem [a,b]



S(x) je plocha mezi grafem f a osou x nad intervalem [a,x]

$a \le x < x+h \le b$ h je „malé"

$\underline{S(x+h) - S(x)}$



f spojitá

$S(x+h) - S(x) \sim$ obsah obdélníku o šířce h a výšce $f(x)$

$= h \cdot f(x)$

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \sim \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

Je-li f spojitá, tak

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

Derivace funkce S je funkce f.

Definice Funkce S je primitivní funkce k funkci f na intervalu I, jestliže

$$\forall x \in I \quad S'(x) = f(x)$$

Budeme-li umět spočítat primitivní funkci F, můžeme spočítat obsah mezi grafem funkce f a osou x nad intervalem $[a,b]$ jako

$$F(b) - F(a)$$

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$, pak funkce $G(x) = F(x) + c$, c je konstanta

je také primitivní funkce

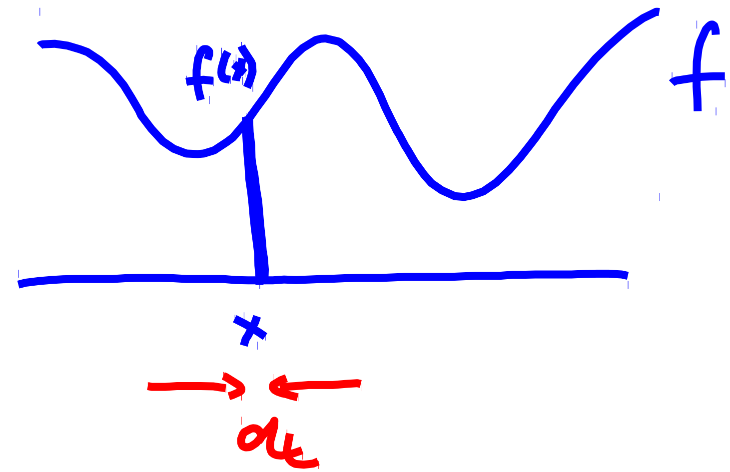
$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0$$

Je-li F a G primitivní k f, platí, že

$$F(x) - G(x) = \text{konst}$$

Značení: primitivní funkce k funkci f se nazývá rovněž neurčitý integrál funkce f a značí se

$$\int f(x)\,dx$$



$$(F+G)' = F' + G'$$

a konstanta

$$(aF)' = a \cdot F'$$

Proto platí **VĚTA**:

$F+G$ $\qquad$ F $\qquad$ G

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

Primitivní funkce k základním funkcím

① $\int 1\,dx = x + C$ $\qquad (x+C)' = x' + C' = 1 + 0 = 1$

② $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)\,x^n = x^n$$

③ $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$

④ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑥ $\int e^x\,dx = e^x + C$

⑦ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$ na intervalu $(0,\infty)$

$x \in (-\infty,0)$ $\quad [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c$ na intervalu $(-\infty,0)$

Dohromady $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

⑧ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

⑩ $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(11) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(12) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \qquad \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Příklady

(1) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} + 2\right) dx$ $\qquad \langle 0, 1) \cup (1,$

$$= \int \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int 2\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2x + \ln(x-1) + c$$

$x > 1$

$\cdot$ 11 -

$x < 1$

$\int \frac{1}{x-1} dx$

$= \ln|x-1|$

$[\ln(1-x)]' = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1}$

$\ln(1-x) = \ln|x-1|$

② $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

Mmime $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + c$

$= \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx$

$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$

$\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right)' =$

$= \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{3}$

③

$$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{1/6}{x-3} - \frac{1/6}{x+3} \right) dx$$

$$\boxed{x^2-9 = (x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$$

④

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}\,dx = \int \left((x^2-9) + \frac{81}{x^2+9} \right) dx$$

$$= \int (x^2-9)\,dx + \int \frac{81}{x^2+9}\,dx = \frac{x^3}{3} - 9x + \underbrace{81\,\frac{1}{3}}_{27}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

⑤

$$\int \sin^2 x\,dx$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \int \cos 2x\,dx\right) + C =$$

$$(\sin 2x)' = (\cos 2x)\cdot 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Metoda integrování per partes (po částech)

Věta: Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I, pak platí

$$\underbrace{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx}_{F(x)} = u(x)\cdot v(x) - \underbrace{\int u(x)\,v'(x)\,dx}_{G(x)}$$

Chceme ukázat, že $F(x) + G(x) = u(x)\cdot v(x) + C$

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = F'(x) + G'(x)$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = F'(x) + G'(x)$$

Příklady

① $$\int x \underbrace{\cos x}_{=\,\sin' x}\,dx = \int \underbrace{(\sin x)'}_{u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{(\sin x)\cdot x}_{u(x)\,v(x)} - \int \underbrace{\sin x}_{u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)}\,dx$$

$$= x\cdot \sin x + \cos x + c$$

② $$\int x \cdot \underbrace{e^x}_{=\,(e^x)'}\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c$$

[illegible]

③ $$\int x^2 \underset{\substack{\shortparallel \\ (e^x)'}}{e^x}\, dx = x^2e^x - \int (2x)\, e^x\, dx = x^2e^x - 2\left(\int x e^x dx\right)$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + e^x + C$$

④ $$\underline{\underline{\int \underset{\substack{\shortparallel \\ (e^x)'}}{e^x} \sin x\, dx}} = e^x \sin x - \int \underset{\substack{\shortparallel \\ (e^x)'}}{e^x} \cos x\, dx =$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx \right.$$

Ecuație necunoscută integrala

$$= \underline{e^x \sin x - e^x \cos x - \underline{\int e^x \sin x\, dx}}$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x \cdot \cos x) + C$$

(5) $$\int \ln x \, dx = \int \underset{(x)'}{\underset{\parallel}{1}} \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

(6) $$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \underset{(x)'}{\underset{\parallel}{1}} \cdot \operatorname{arctg} x = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \implies \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C}$$

$f(x) = 1 + x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C$$

7

$$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$