Reálné funkce

M1030 Matematika pro biochemiky

8. 10. 2020

Definice a základní vlastnosti

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

$(x+y)+z = x+(y+z)$ $x+y = y+z$ $(\exists 0)(\forall x)\ x+0 = x$ $(\forall x)(\exists -x)\ x+(-x) = 0$	$\mathbb{R}$ s operací $+$ je abelovská grupa
$(xy)z = x(yz)$ $xy = yz$ $(\exists 1 \neq 0)(\forall x)\ 1x = x$ $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ x^{-1}x = 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ s operací $\cdot$ je abelovská grupa
$x(y+z) = xy+xz$	distributivita
$x<y$ a $y<z \Rightarrow x<z$ $x<y$ nebo $y<x$ nebo $x=y$	lineární uspořádání
$x<y \Rightarrow x+z<y+z$ $x<y$ a $0<z \Rightarrow xz<yz$	operace $+$ a $\cdot$ jsou slučitelné s uspořádáním
množina $\mathbb{R}$ tvoří kontinuum, „nejsou v ní díry“, jedno-jednoznačným obrazem $\mathbb{R}$ je přímka	

Podmnožiny $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} :\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ racionální čísla
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální čísla

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Intervaly v $\mathbb{R}^*$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$
- $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$
- $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Intervaly v $\mathbb{R}^*$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$
- $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$
- $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Okolí bodů z $\mathbb{R}^*$:

- Symetrické ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$
- Ryzí symetrické ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, x \neq a\}$
- Levé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon \leq x\}$
- Pravé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a + \varepsilon\}$
- Ryzí levé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x\}$
- Ryzí pravé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : x < a + \varepsilon\}$
- h-okolí bodu ∞ $\{x \in \mathbb{R} : h < x\}$
- h-okolí bodu $-\infty$ $\{x \in \mathbb{R} : x < h\}$

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \stackrel{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \stackrel{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

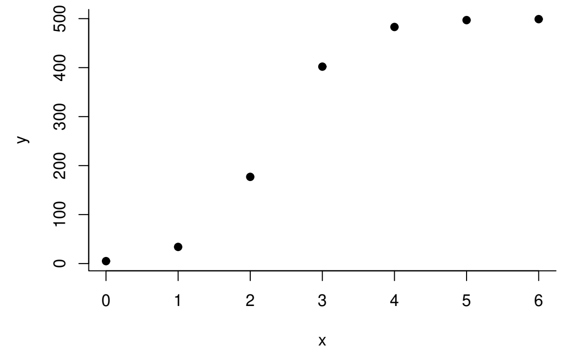
$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou, grafem

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$



Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

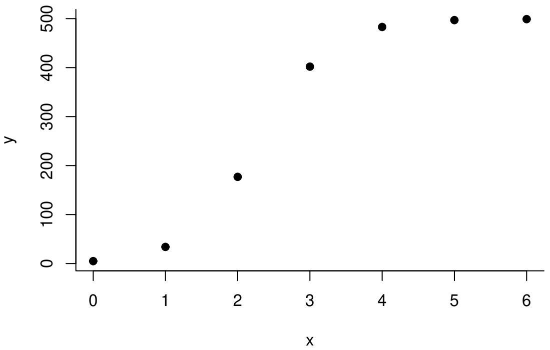
definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou, grafem, obecným předpisem

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499



$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

$$y = f(x) = \frac{500}{1 + 99 \cdot 0{,}1353^x}$$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \ \Rightarrow\ x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Platí: Je-li f p-periodická a $k \in \mathbb{N}$, pak je f také kp-periodická

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Platí: Je-li f p-periodická a $k \in \mathbb{N}$, pak je f také kp-periodická

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \Rightarrow x + 2p = (x+p) + p \in D(f) \Rightarrow \cdots$$

$$f(x+2p) = f\big((x+p)+p\big) = f(x+p) = f(x), \ldots$$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Parita:

f je *lichá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$
f je *sudá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Parita:

f je *lichá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$
f je *sudá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$

Monotonnost:

f je *rostoucí*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

Monotonnost:

f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Monotonnost:

f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$

f je *rostoucí v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$
f je *klesající v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Monotonnost:
f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

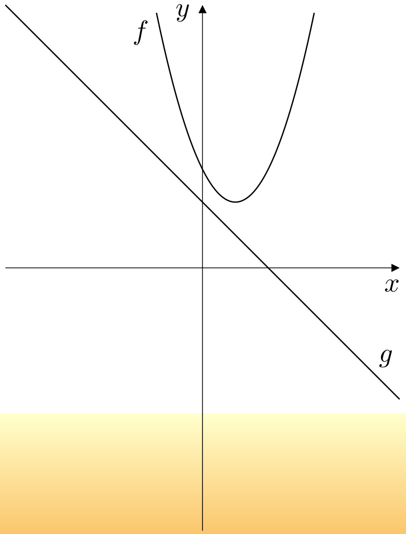
f je *rostoucí v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$
f je *klesající v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Platí: Funkce f je rostoucí (klesající) v každém bodě intervalu J právě tehdy, když je rostoucí (klesající) na intervalu J.

Operace s funkcemi

Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$



Operace s funkcemi

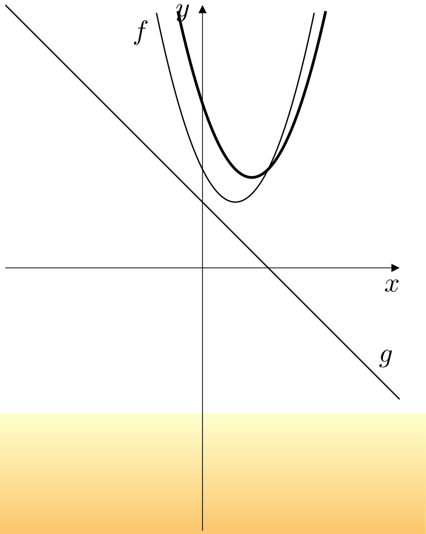
Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f+g)(x) = x^2 - 3x + 5$



Operace s funkcemi

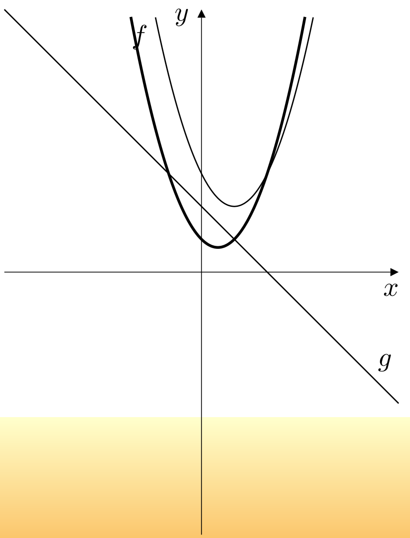
Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f-g)(x) = x^2 - x + 1$



Operace s funkcemi

Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

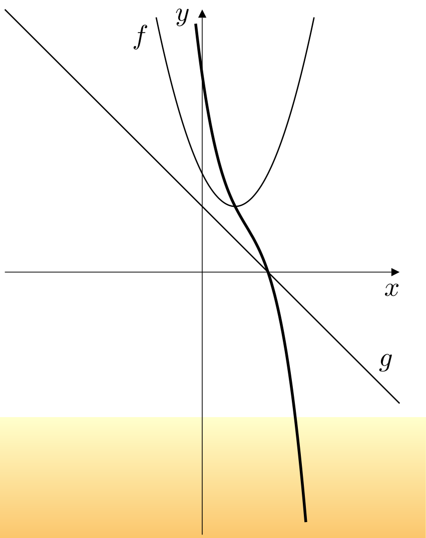
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$D(f \cdot g) = D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f \cdot g)(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 6$



Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \qquad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

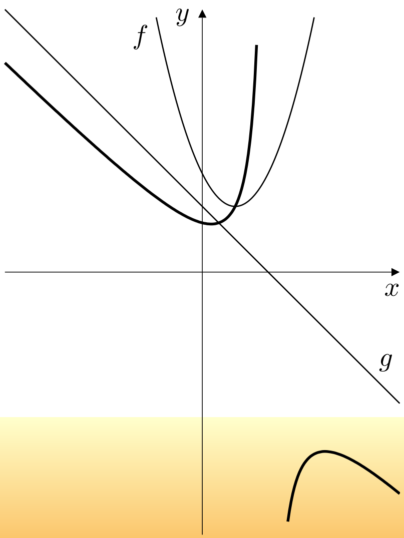
$$D(f \cdot g) = D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g),$$

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : \ g(x) = 0\}$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f/g)(x) = \frac{3}{2-x} - x,$$

$$D(f/g) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$



Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$f \circ g$ „f po g“

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

Operace s funkcemi

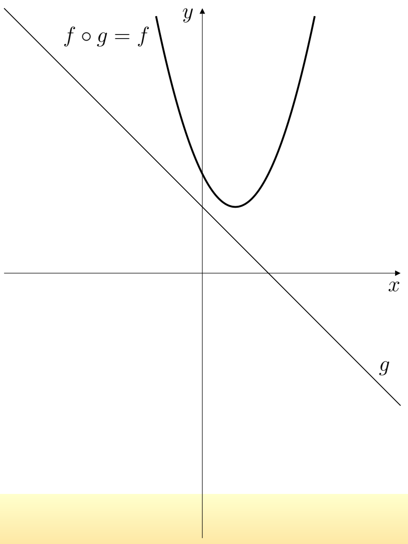
Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd} \qquad f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : \ g(x) \in D(f)\}$$

$f \circ g$ „f po g“

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $H(g) = (-\infty, \infty) = D(f)$

$(f \circ g)(x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 = x^2 - 2x + 3$



Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

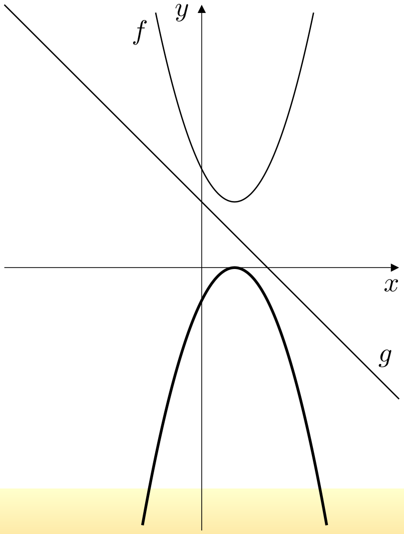
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$f \circ g$ „f po g“

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = 2 - x,\ H(f) = (2, \infty) \subseteq (-\infty, \infty) = D(g)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= 2 - (x^2 - 2x + 3) = \\ &= -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \end{aligned}$$



Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce f je *prostá na intervalu* J, pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce f je *prostá na intervalu* J, pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Platí: Je-li funkce f rostocí (resp. klesající) na intervalu J, pak je na tomto intervalu prostá.
Obrácené tvrzení neplatí.

Inverzní funkce: f prostá funkce

Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \text{ „vyřešení rovnice“ } \rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

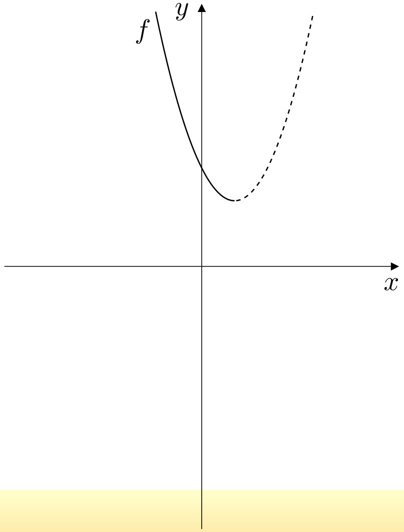
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$



Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

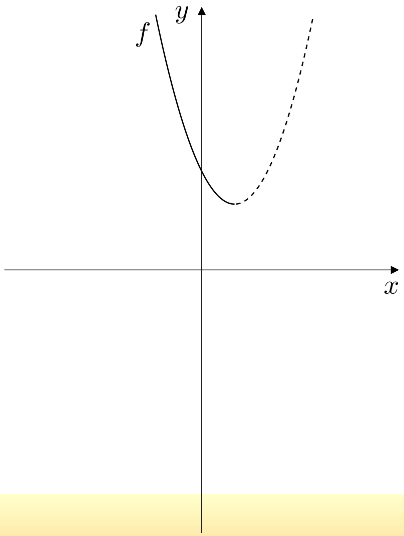
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \to \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \to \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$



$$x^2 - 2x + 3 = y, \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

Pro $x = 0$ je $y = f(0) = 3$, vyhovuje pouze znaménko $-$.
Tedy $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$

Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

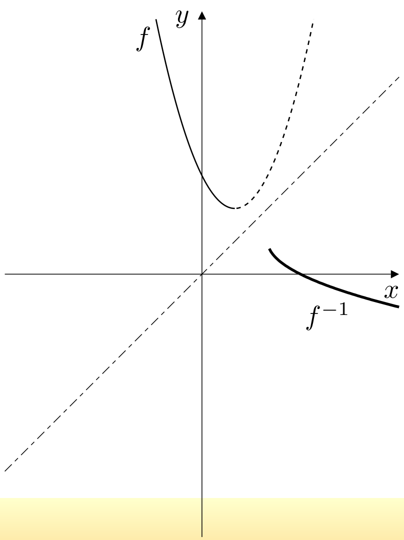
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \to \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \to \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$



$$x^2 - 2x + 3 = y, \;\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

Pro $x = 0$ je $y = f(0) = 3$, vyhovuje pouze znaménko $-$.
Tedy $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$

Obvykle se nezávisle proměnná označuje symbolem x,

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}.$$

Elementární funkce

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$
$H(P) = \mathbb{R}$ nebo $H(P) = (-\infty, \omega\rangle$ nebo $H(P) = \langle\alpha, \infty)$ nebo $H(P) = \{\gamma\}$.

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

Polynomy

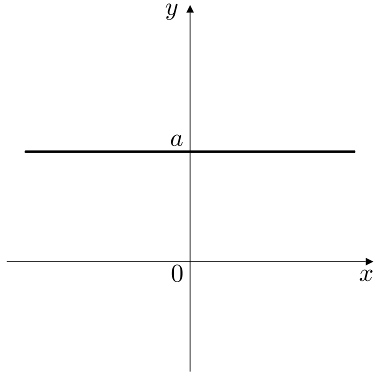
Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 0$: $y = P_0(x) = a$ – *konstantní funkce*
  $H(P_0) = \{a\}$
  ohraničená, periodická s libovolnou periodou, sudá, nerostoucí, neklesající



Polynomy

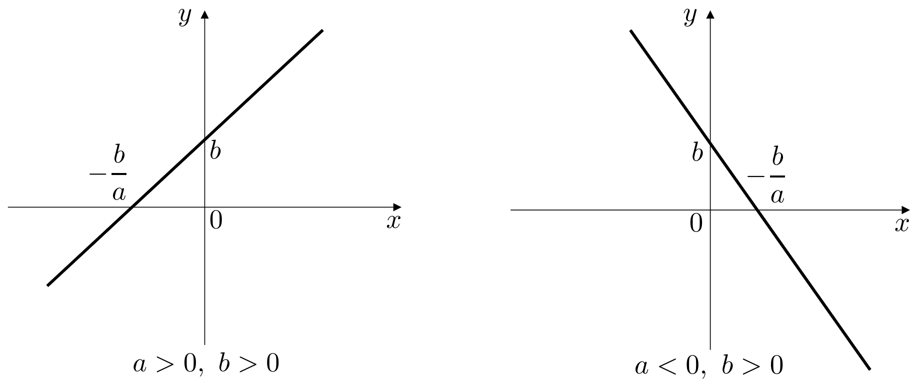
Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 1$: $y = P_1(x) = ax + b$ – *lineární funkce*
  $H(P_1) = (-\infty, \infty)$
  $b = 0 \Rightarrow$ lichá; $a > 0 \Rightarrow$ rostoucí, $a < 0 \Rightarrow$ klesající



Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

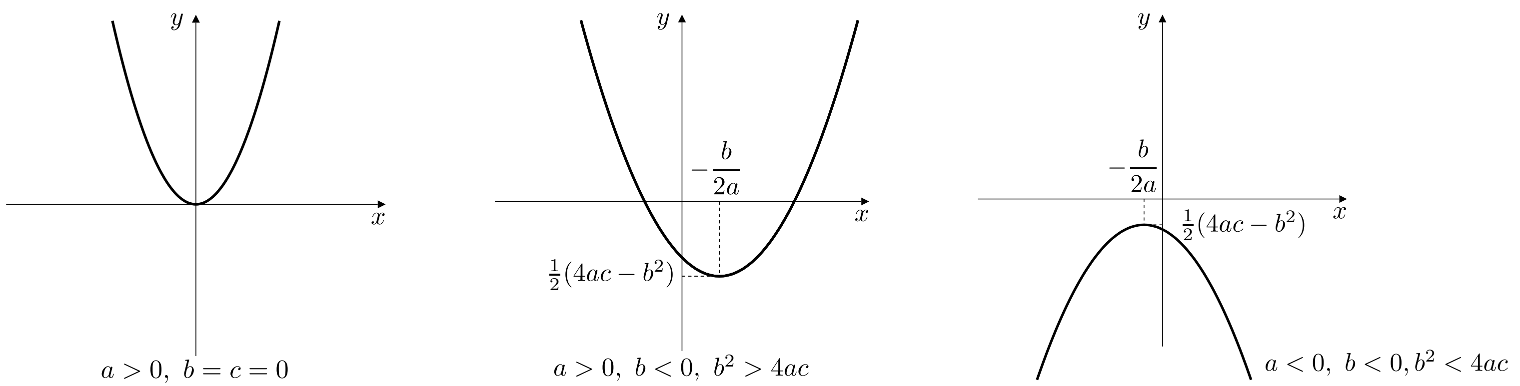
$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 2$: $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – *kvadratická funkce*
  $b = c = 0 \ \Rightarrow$ sudá

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2}$$



Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 2$: $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – *kvadratická funkce*
  $b = c = 0 \;\Rightarrow$ sudá
  $$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2}$$
  $a > 0 \;\Rightarrow$
  $$H(P_2) = \left\langle \tfrac{1}{2}(b^2 - 4ac), \infty\right), \text{ klesající na } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle, \text{ rostoucí na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$$
  $a < 0 \;\Rightarrow$
  $$H(P_2) = \left(-\infty, \tfrac{1}{2}(b^2 - 4ac)\right\rangle, \text{ rostoucí na } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle, \text{ klesající na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$$

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

kořen polynomu: takové číslo x_0, že $P(x_0) = 0$.

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad: $R(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad: $R(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 1) + x}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a \neq 0 \neq c$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a \neq 0 \neq c$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

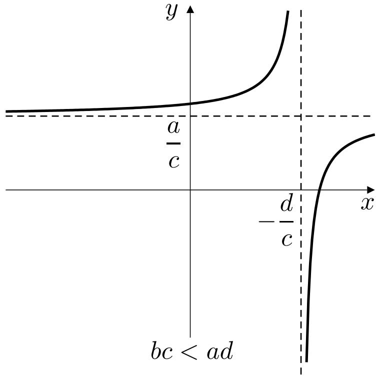
Lomené funkce

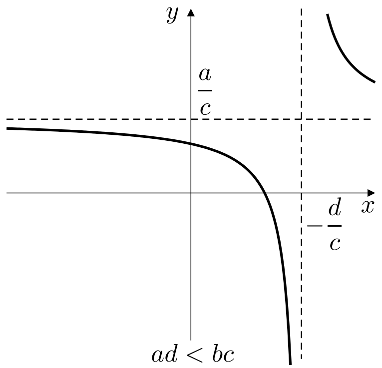
Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$, $a \neq 0 \neq c$, $bc - ad \neq 0$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$





$a, b, c > 0,\ d < 0$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$, $a \neq 0 \neq c$, $bc - ad \neq 0$

  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

  $bc^2 < acd \;\Rightarrow$ klesající na $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ rostoucí na $\left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$

  $bc^2 > acd \;\Rightarrow$ rostoucí na $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ klesající na $\left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Polynomy a lomené funkce se nazývají *racionální funkce*

Polynom – *racionální funkce celistvá*
Lomená funkce – *racionální funkce lomená*

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}$, $\quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}$, $\quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

$x = 0$: $a^0 = 1$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}$, $\quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

$x = 0$: $a^0 = 1$

$x = -n,\ n \in \mathbb{N}$: $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \;\Rightarrow\; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

$x = 0$: $a^0 = 1$

$x = -n,\ n \in \mathbb{N}$: $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \ \Rightarrow\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$: $a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$. Tedy $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$ je řešením rovnice $a = x^n$.

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“:

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ **„postupným přiblížením“:** $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ **„postupným přiblížením“:** $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ **„postupným přiblížením":** $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ **„postupným přiblížením“:** $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$

$x = \frac{11}{8}$: $\quad (\frac{11}{8})^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ **„postupným přiblížením“:** $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$

$x = \frac{11}{8}$: $\quad (\frac{11}{8})^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$

$x = \frac{21}{16}$: $\quad (\frac{21}{16})^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$

$x = \frac{11}{8}$: $\quad (\frac{11}{8})^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$

$x = \frac{21}{16}$: $\quad (\frac{21}{16})^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$

$x = \frac{41}{32}$: $\quad (\frac{41}{32})^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$

$x = \frac{11}{8}$: $\quad \left(\frac{11}{8}\right)^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$

$x = \frac{21}{16}$: $\quad \left(\frac{21}{16}\right)^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$

$x = \frac{41}{32}$: $\quad \left(\frac{41}{32}\right)^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$

Tedy $1{,}25 = \frac{5}{4} < 2^{\frac{1}{3}} < \frac{41}{32} = 1{,}28125$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Nalezení $2^{\frac{1}{3}}$ „postupným přiblížením“: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = x$, $2 = x^3$

$x = 1$: $\quad 1^3 = 1 < 2$

$x = 2$: $\quad 2^3 = 8 > 2$

$x = \frac{3}{2}$: $\quad (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 2$

$x = \frac{5}{4}$: $\quad (\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$

Tedy $1{,}25 = \frac{5}{4} < 2^{\frac{1}{3}} < \frac{41}{32} = 1{,}28125$

$x = \frac{11}{8}$: $\quad (\frac{11}{8})^3 = \frac{1\,221}{512} > 2$

$x = \frac{21}{16}$: $\quad (\frac{21}{16})^3 = \frac{9\,261}{4\,096} > 2$

$x = \frac{41}{32}$: $\quad (\frac{41}{32})^3 = \frac{68\,921}{32\,768} > 2$

Je $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}2599$.

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

$x = 0$: $a^0 = 1$

$x = -n,\ n \in \mathbb{N}$: $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \ \Rightarrow \ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$: $a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$. Tedy $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$ je řešením rovnice $a = x^n$.

$x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

$x = n \in \mathbb{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}}$

Platí: $a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{krát}} = a^{n+m}$, $\quad (a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m-\text{krát}} = a^{mn}$

$x = 0$: $a^0 = 1$

$x = -n,\ n \in \mathbb{N}$: $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \ \Rightarrow\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$: $a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$. Tedy $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$ je řešením rovnice $a = x^n$.

$x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$

$x \in \mathbb{I}$: iracionární číslo lze libovolně přesně aproximovat číslem racionálním

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.

Příklad: aproximace čísla π:

$$\begin{aligned}
3{,}14 &< \pi < 3{,}15 \\
3{,}141 &< \pi < 3{,}142 \\
3{,}1415 &< \pi < 3{,}1416 \\
3{,}141592 &< \pi < 3{,}141593 \\
3{,}1415926 &< \pi < 3{,}1415927 \\
3{,}14159265 &< \pi < 3{,}14159266 \\
3{,}141592653 &< \pi < 3{,}141592654 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

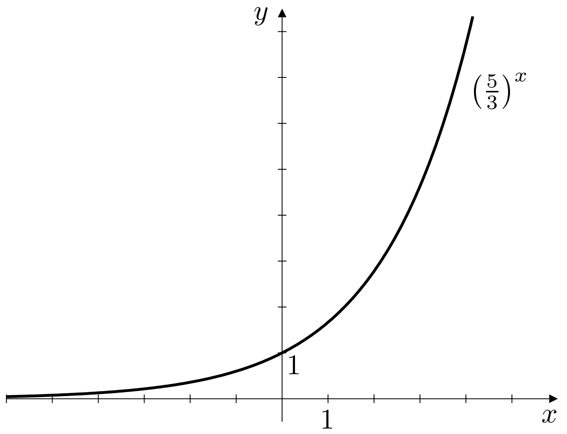
Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$, $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

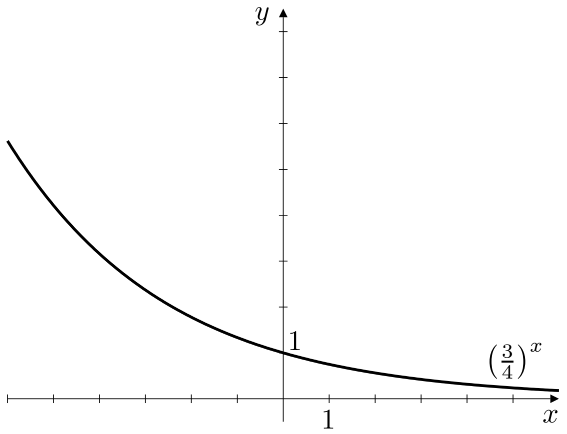
Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$, $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}$.
$a > 1 \;\Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \;\Rightarrow$ klesající





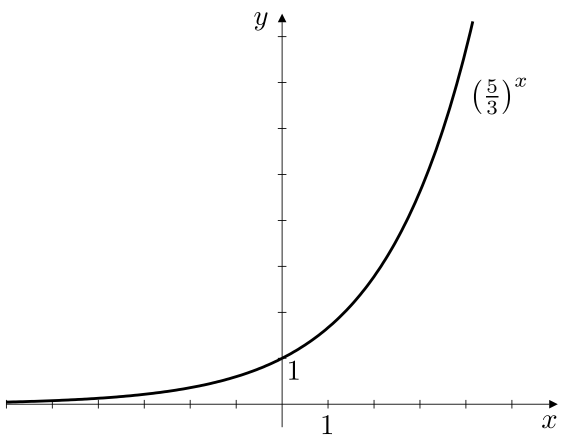
Exponenciální funkce

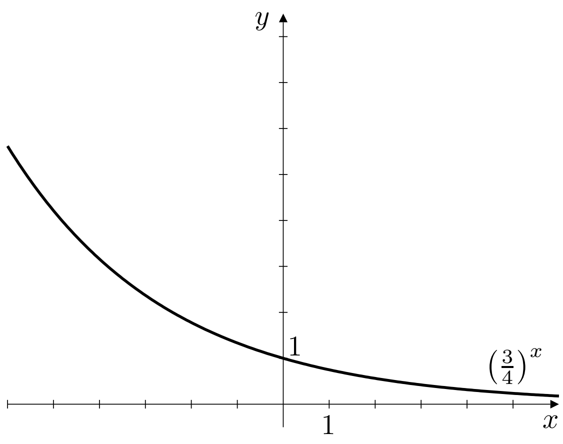
Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$, $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.
$a > 1 \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \Rightarrow$ klesající

Přirozená exponenciální funkce $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{e} \doteq 2{,}718281828$ – Eulerovo číslo





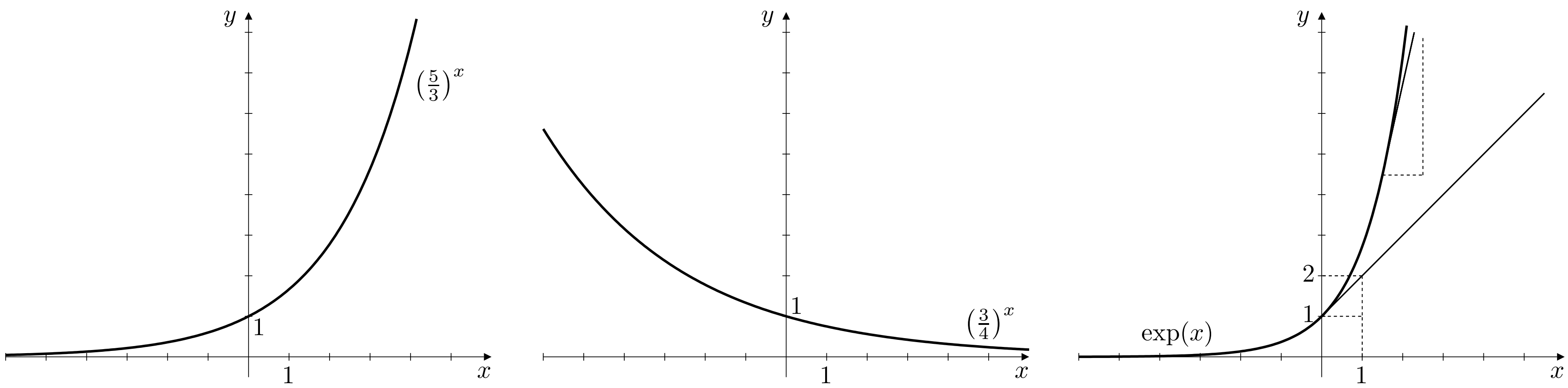
Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se základem a je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x.$$

Přitom $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$, $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.
$a > 1 \;\Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \;\Rightarrow$ klesající

Přirozená exponenciální funkce $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{e} \doteq 2{,}718281828$ – Eulerovo číslo



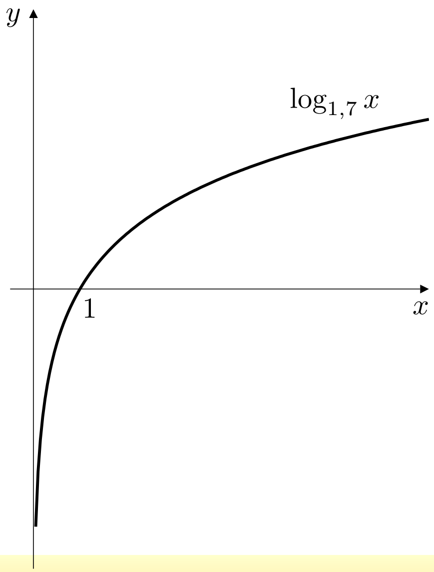
Směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x, \mathrm{e}^x]$ je rovna funkční hodnotě e^x.

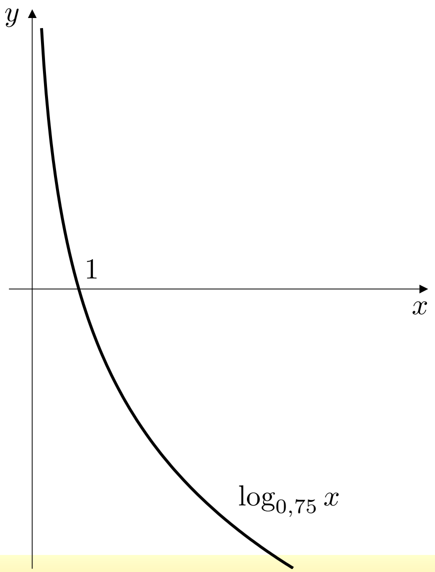
Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1 \ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \ \Rightarrow$ klesající.





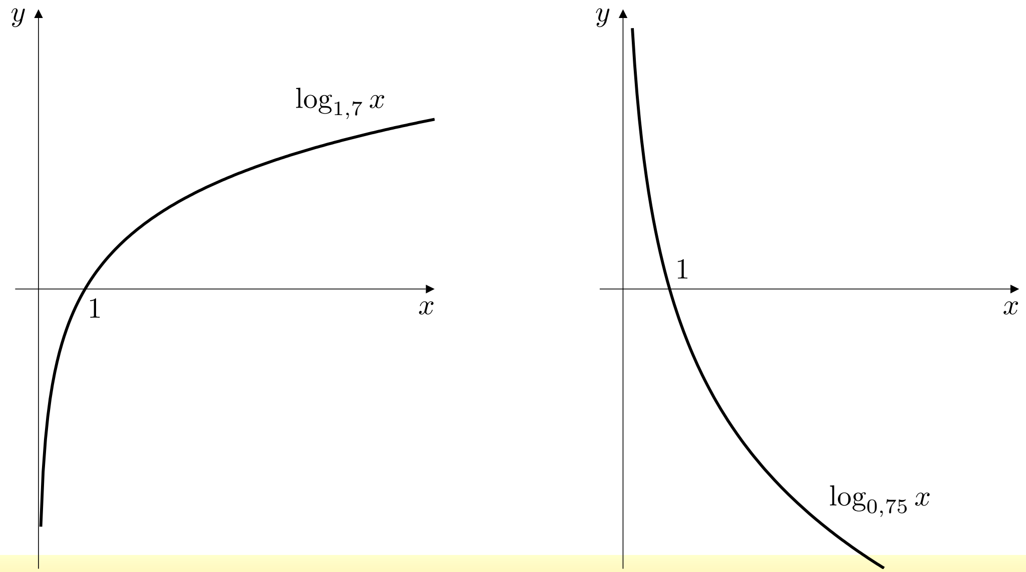
Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1\ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1\ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$



Logaritmická funkce

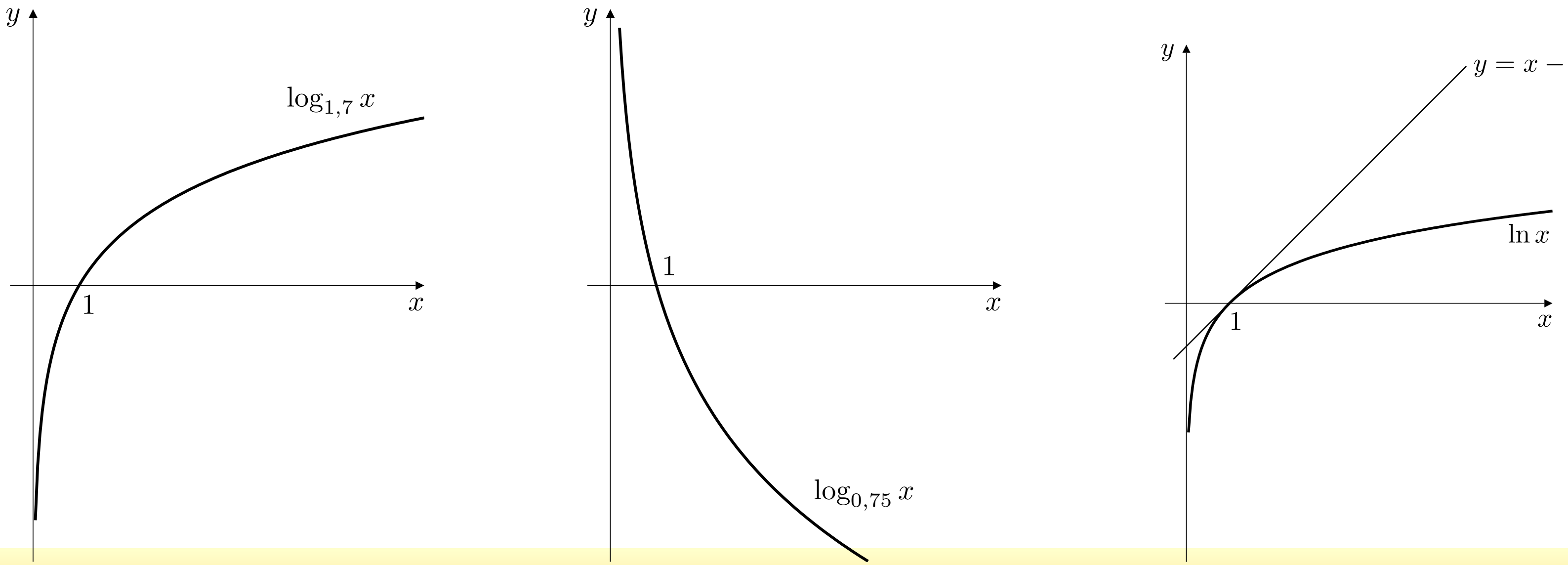
Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1 \ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

Přirozená logaritmická funkce: $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x (= \lg x = \log x)$



Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1 \;\Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \;\Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\begin{aligned} y &= \log_a x \\ a^y &= x \\ y \log_b a &= \log_b x \\ y &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow \ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1 \ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1 \ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\begin{aligned} y &= \log_a x \\ a^y &= x \\ y \log_b a &= \log_b x \\ y &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1\ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1\ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\begin{aligned} y &= x^a \\ \ln y &= a \ln x \\ y &= \mathrm{e}^{a \ln x} \end{aligned}$$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1\ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1\ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a(x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\begin{aligned} y &= x^a \\ \ln y &= a \ln x \\ y &= \mathrm{e}^{a \ln x} \end{aligned}$$

$$x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$$

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$ je inverzní funkcí k funkci exponenciální,

$$f(x) = y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x.$$

$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = (-\infty, \infty)$, $a > 1\ \Rightarrow$ rostoucí, $a < 1\ \Rightarrow$ klesající.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$$

Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

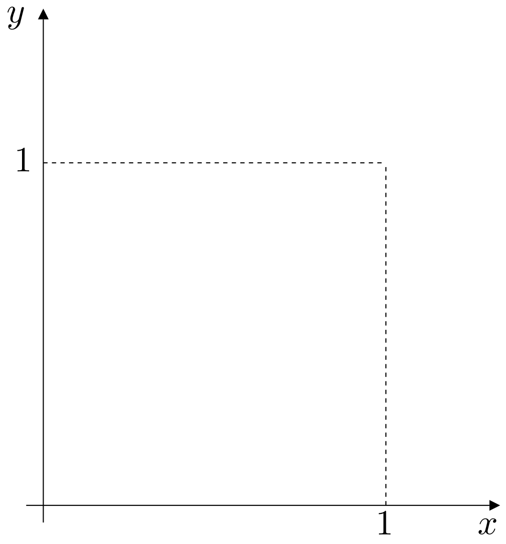
$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

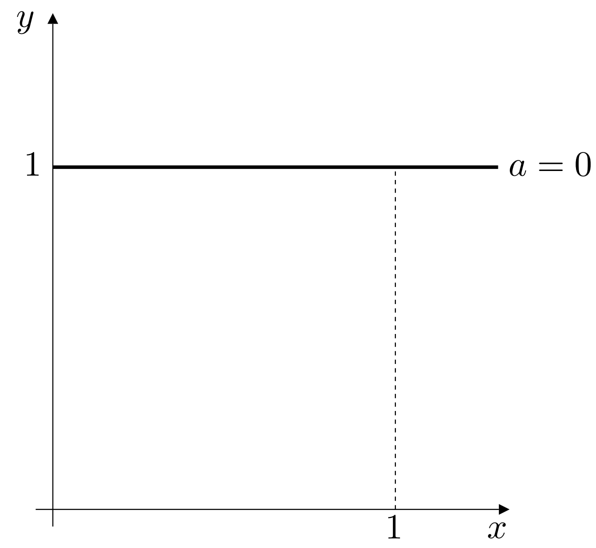


Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

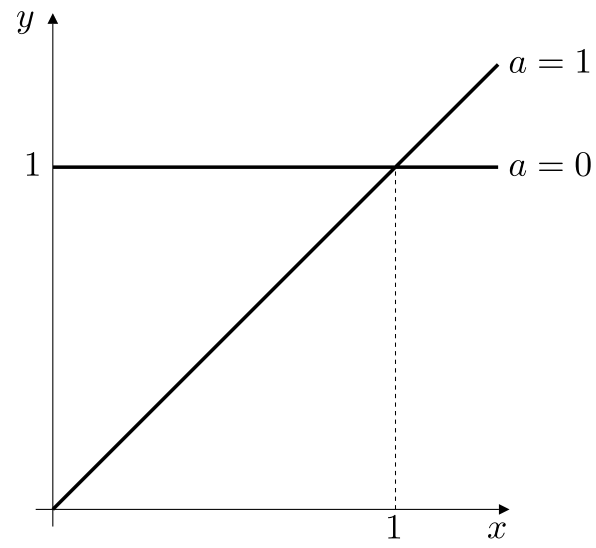


Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

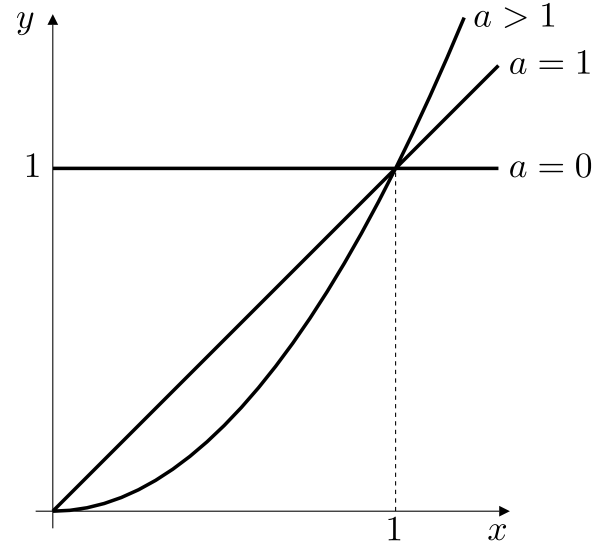


Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

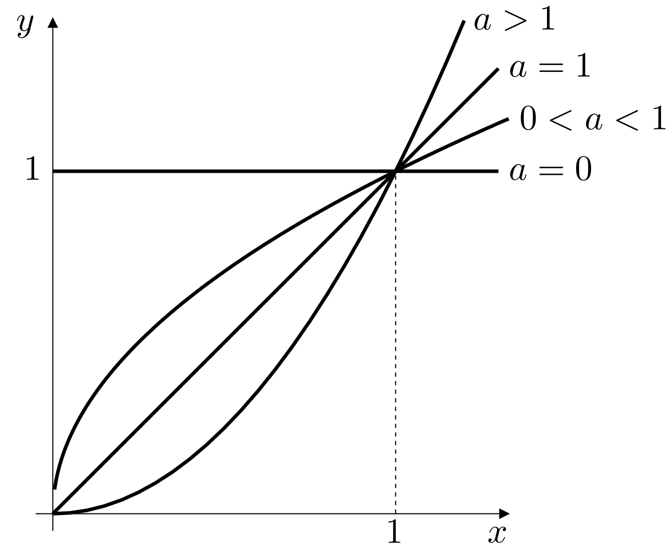


Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

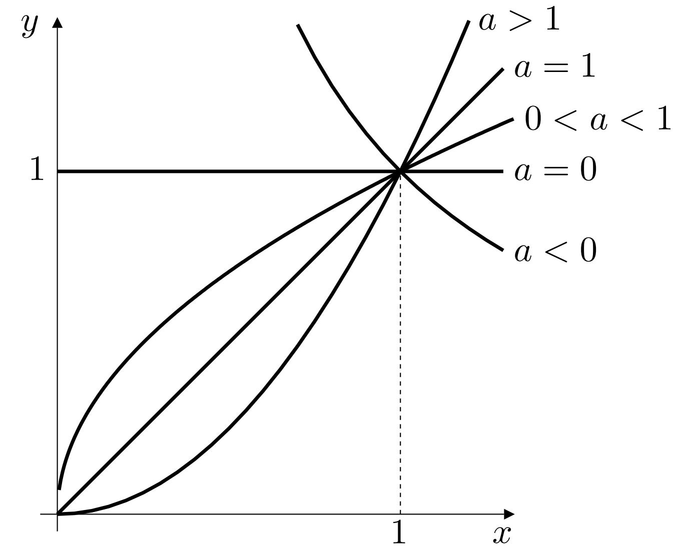


Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$



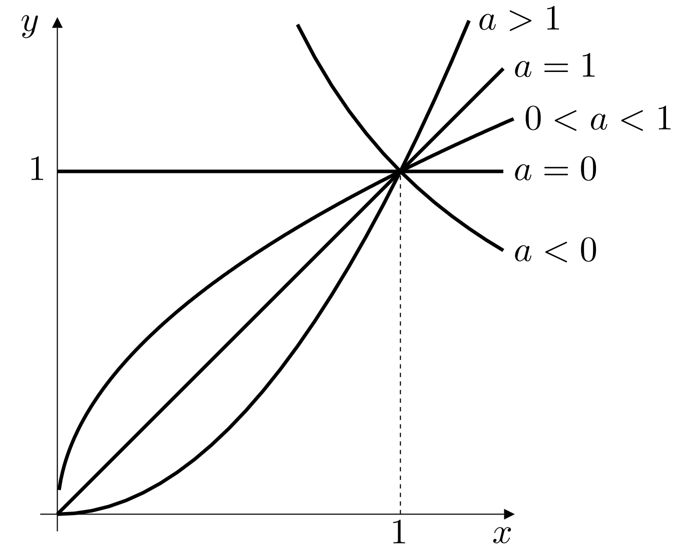
Obecná mocnina

Obecná mocninná funkce („a-tá mocnina“) je pro $a \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$

$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \begin{cases} \{1\}, & a = 0, \\ (0, \infty), & \text{jinak} \end{cases}$$

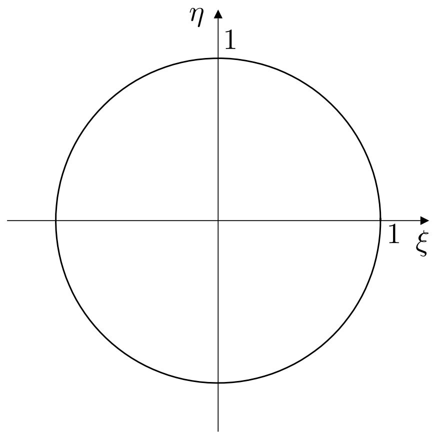
$a < 0 \;\Rightarrow$ klesající, $a > 0 \;\Rightarrow$ rostoucí.



Goniometrické funkce

Goniometrické funkce

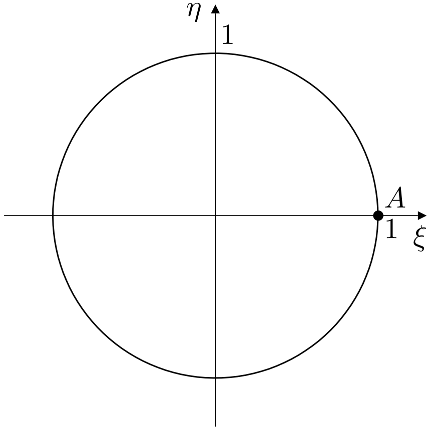
Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.



Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

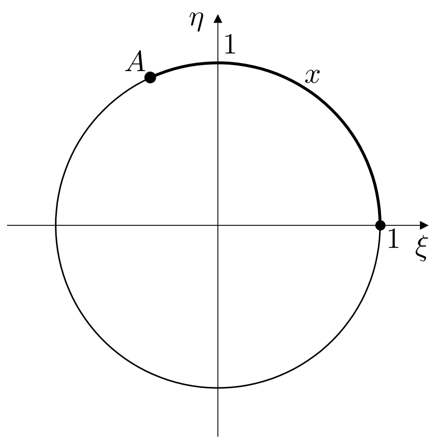
Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$



Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

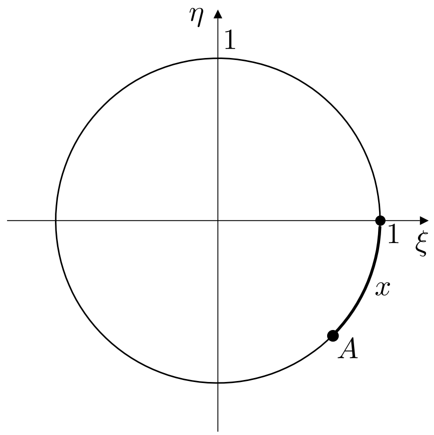
Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$
$x > 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v kladném smyslu má délku x



Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$
$x > 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v kladném smyslu má délku x
$x < 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v záporném smyslu má délku $-x$



Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$
$x > 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v kladném smyslu má délku x
$x < 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v záporném smyslu má délku $-x$

Goniometrické funkce sinus a *cosinus* jsou „definovány“:

$\sin x =$ 2. souřadnice bodu A

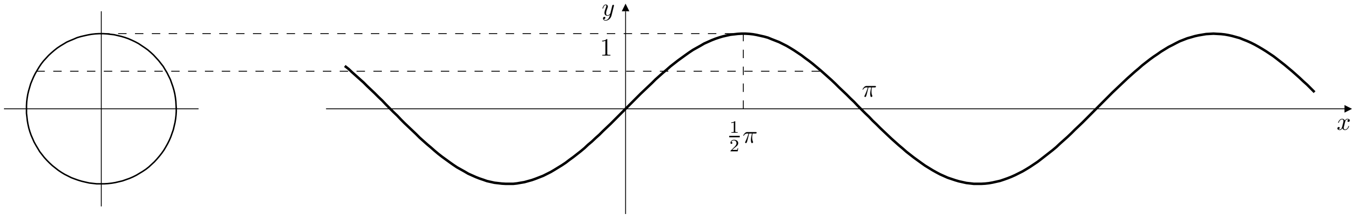
Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$
$x > 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v kladném smyslu má délku x
$x < 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v záporném smyslu má délku $-x$

Goniometrické funkce sinus a *cosinus* jsou „definovány“:

$$\sin x = 2.\text{ souřadnice bodu } A$$



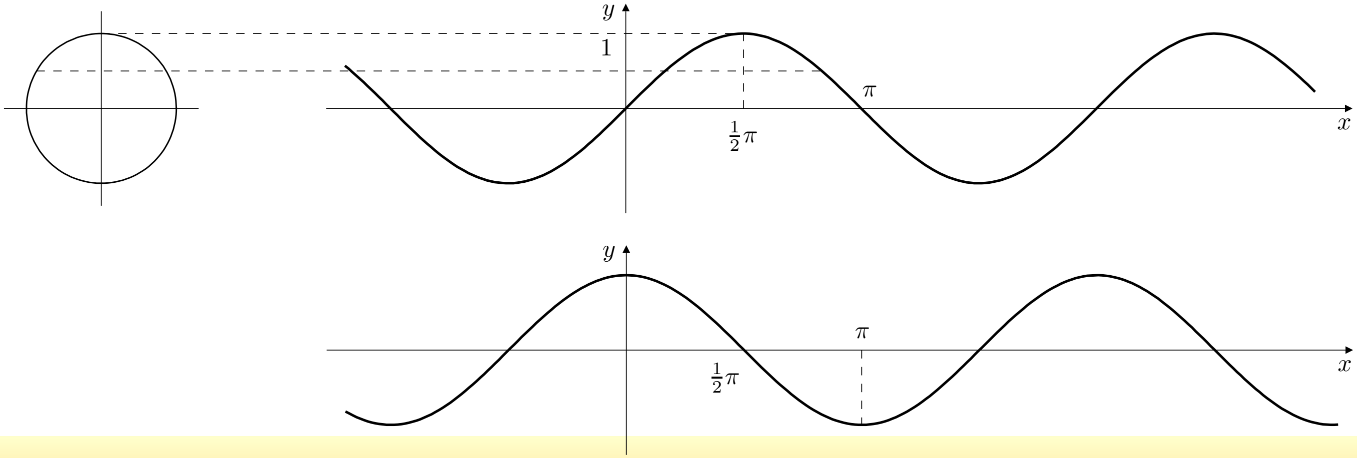
Goniometrické funkce

Uvažujme jednotkovou kružnici k, tj. křivku, která má v ortonormální souřadné soustavě (souřadnice značíme ξ, η) rovnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Bod A leží na kružnici k tak, že
$x = 0$: $A = [1, 0]$
$x > 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v kladném smyslu má délku x
$x < 0$: oblouk kružnice k od bodu $[1, 0]$ k bodu A braný v záporném smyslu má délku $-x$

Goniometrické funkce sinus a *cosinus* jsou „definovány“:

$$\sin x = 2.\ \text{souřadnice bodu } A, \qquad \cos x = 1.\ \text{souřadnice bodu } A.$$



Goniometrické funkce

$D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, lichá, periodická – základní perioda 2π

Goniometrické funkce

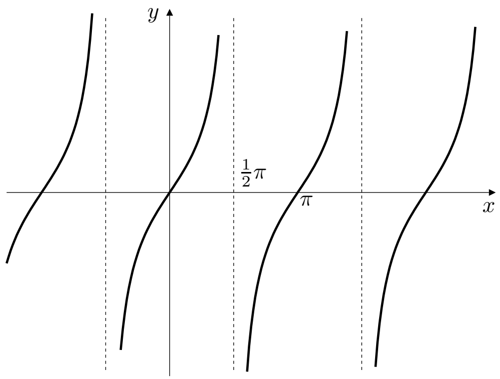
$D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, lichá, periodická – základní perioda 2π
$D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, sudá, periodická – základní perioda 2π

Goniometrické funkce

$D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, lichá, periodická – základní perioda 2π
$D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, sudá, periodická – základní perioda 2π

Goniometrické funkce tangens a *cotangens* jsou definovány:

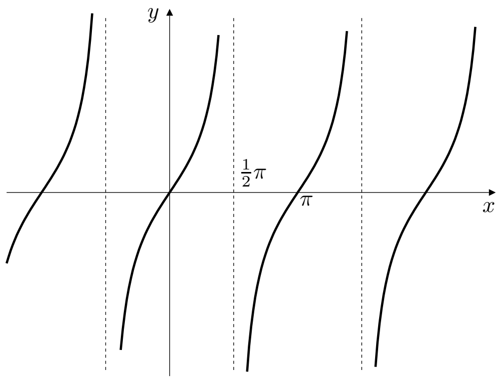
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1\rangle$, ohraničená, lichá, periodická – základní perioda 2π
$D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1\rangle$, ohraničená, sudá, periodická – základní perioda 2π

Goniometrické funkce tangens a *cotangens* jsou definovány:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

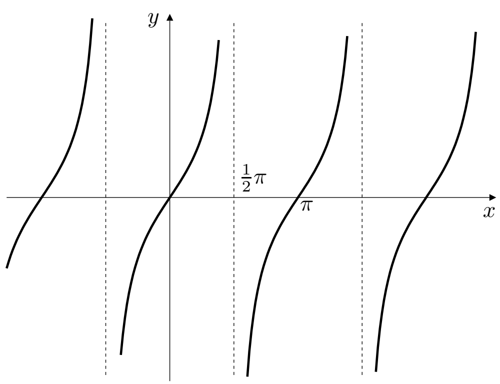


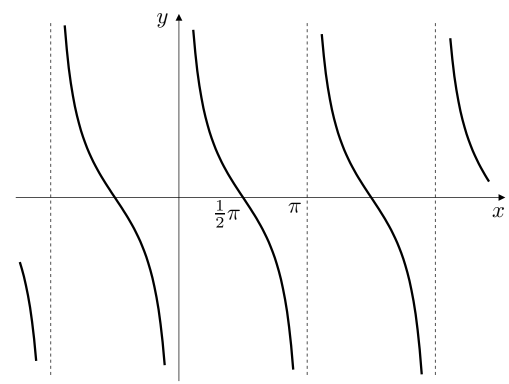
$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$, lichá, periodická – základní perioda π

$D(\sin) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, lichá, periodická – základní perioda 2π
$D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$, ohraničená, sudá, periodická – základní perioda 2π

Goniometrické funkce tangens a *cotangens* jsou definovány:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$





$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}(2k-1)\pi : \; k \in \mathbb{Z} \right\}$, $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$, lichá, periodická – základní perioda π
$D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : \; k \in \mathbb{Z} \}$, $H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$, lichá, periodická – základní perioda π

Goniometrické funkce

Základní vzorce:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1, \qquad \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \cos x,\ \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi) = \sin x$$

Součtové vzorce:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

$$\left(\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha), \quad \left(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

Cyklometrické funkce

Funkce inverzní ke goniometrickým

Cyklometrické funkce

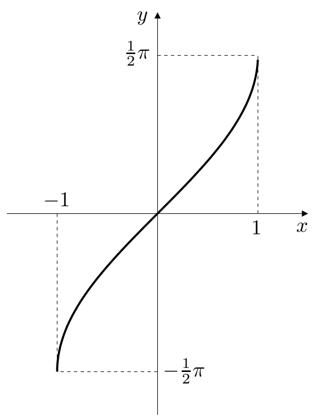
Funkce inverzní ke goniometrickým na zúženém definičním oboru:

goniometrická funkce	definiční obor	cyklometrická funkce
$\sin$	$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$	$\arcsin$
$\cos$	$(0, \pi)$	$\arccos$
tg	$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$	arctg
cotg	$(0, \pi)$	$\mathrm{arccotg}$

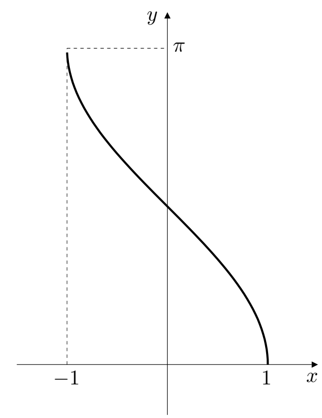
Cyklometrické funkce

Funkce inverzní ke goniometrickým

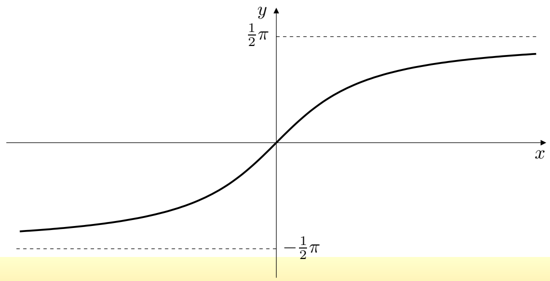
$D(\arcsin) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(\arcsin) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
ohraničená, rostoucí, lichá



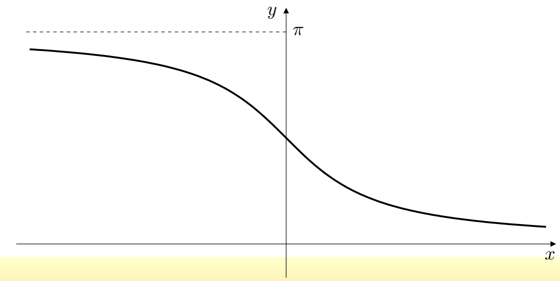
$D(\arccos) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(\arccos) = (0, \pi)$
ohraničená, klesající



$D(\mathrm{arctg}) = \mathbb{R}$, $H(\mathrm{arctg}) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
ohraničená, rostoucí, lichá



$D(\mathrm{arccotg}) = \mathbb{R}$, $H(\mathrm{arccotg}) = (0, \pi)$
ohraničená, klesající



Cyklometrické funkce

Vztahy mezi goniometrickými a cyklometrickými funkcemi:

$$\cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \cos \operatorname{arccotg} x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \cos \operatorname{arctg} x = \sin \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Shrnutí

Elementární funkce jsou

- Polynomy, přirozená exponenciála, funkce sinus
- Funkce, které z nich vzniknou pomocí aritmetických operací, operace skládání funkcí a operace tvoření inverzní funkce v konečném počtu

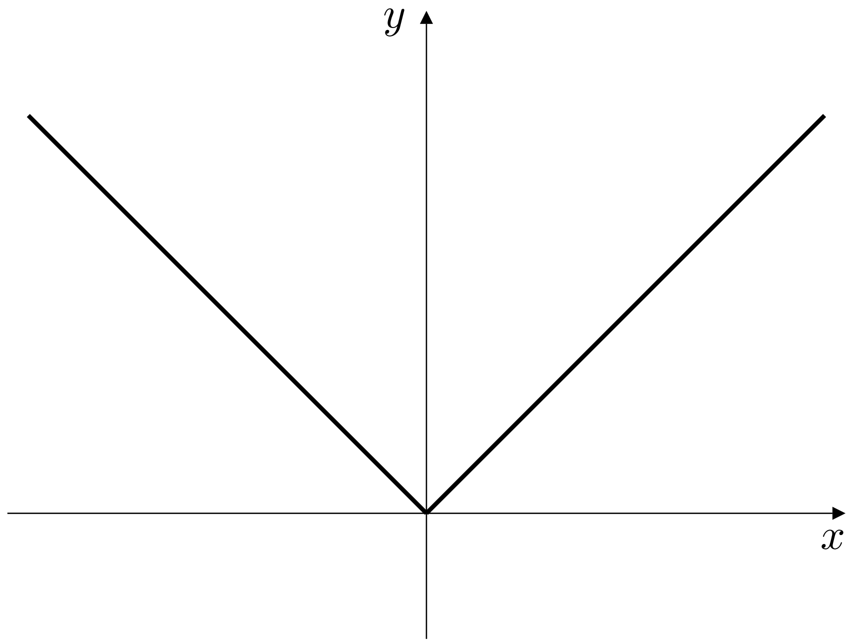
Na každém intervalu, který je částí definičního oboru, lze graf elementární funkce nakreslit plynulým pohybem bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou.

Další funkce

Absolutní hodnota

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

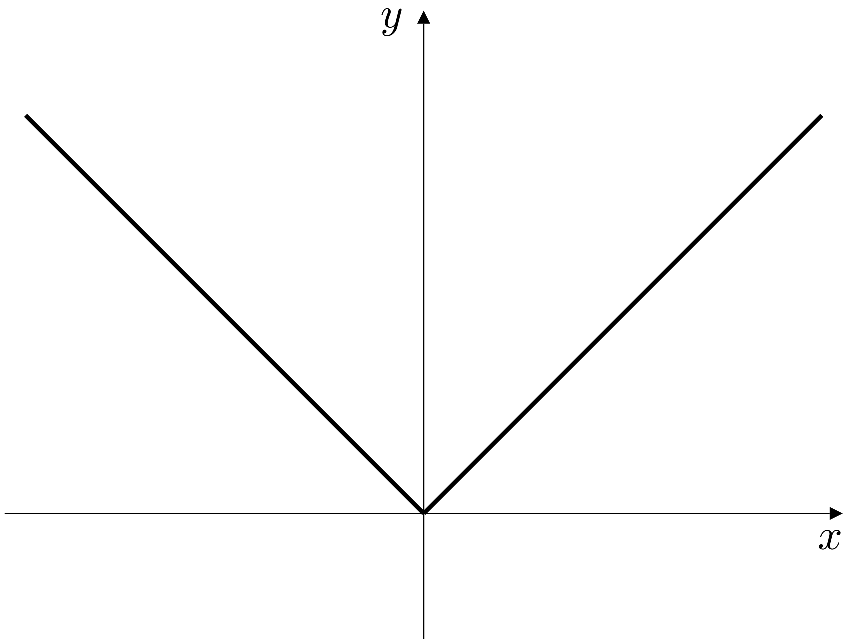
$D(|\cdot|) = \mathbb{R},\ H(|\cdot|) = \langle 0, \infty)$, sudá



Absolutní hodnota

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

$D(|\cdot|) = \mathbb{R},\ H(|\cdot|) = \langle 0, \infty)$, sudá

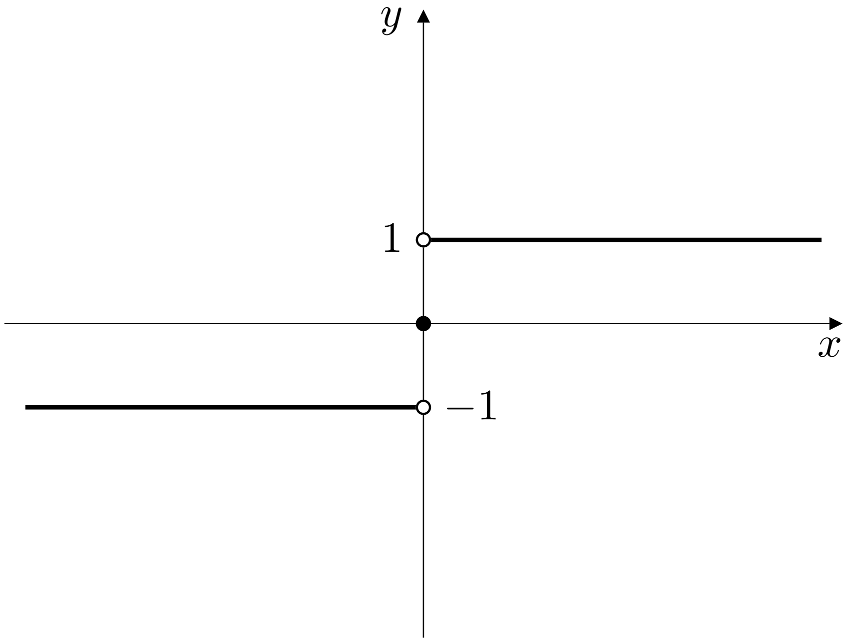


Graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, ale nelze ho nakreslit plynulým pohybem.

Funkce signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

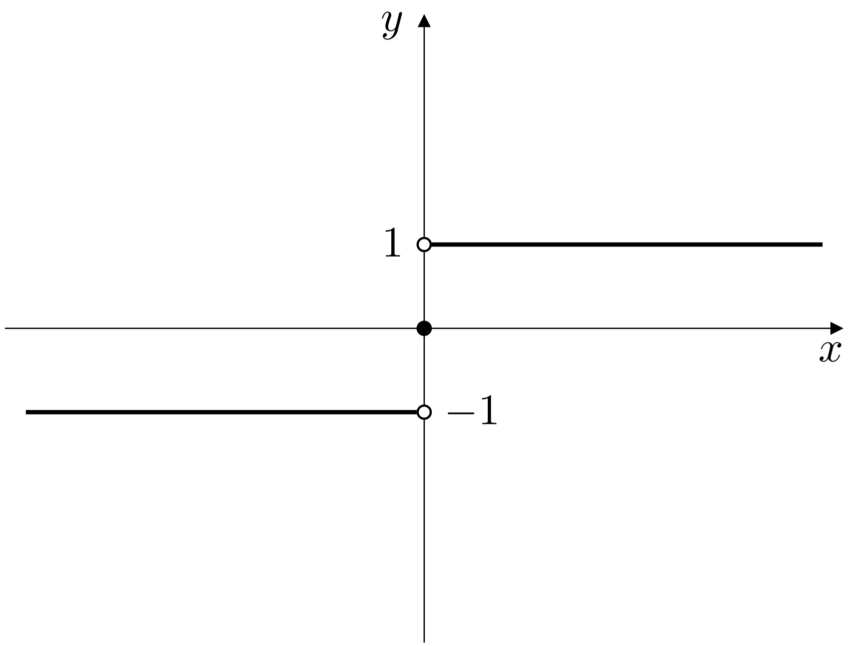
$D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}$, $H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$, lichá



Funkce signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}$, $H(\operatorname{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$, lichá



Graf nelze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou.

Funkce celá část

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : \ z \leq x\},$$

$D([\,\cdot\,]) = \mathbb{R}, \ H(|\ \cdot\ |) = \mathbb{Z}.$